TRAITÉ

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

TRAITÉ

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET DES INTÉGRALES EULÉRIENNES,

Avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique;

PAR A. M. LEGENDRE, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES ET DE CELLE D'ÉDIMBOURG, DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE, etc.

TOME SECOND,

Contenant les méthodes pour construire les Tables elliptiques, le recneil de ces Tables, le Traité des Intégrales Eulériennes et un Appendice.

PARIS,
IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.
1826

TABLE DES MATIÈRES.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES.

RECUEIL DES TABLES ELLIPTIQUES.

TRAITÉ DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CONSTRUCTION DES TABLES.

Nous avons exposé dans le volume précédent la théorie des Fonctions elliptiques et nous en avons fait l'application à plusieurs problèmes importans de Géométrie et de Mécanique; maintenant nous allons nous occuper des tables qu'il est nécessaire de construire pour que l'usage des Fonctions elliptiques puisse être introduit dans l'analyse, à l'instar des Fonctions circulaires et logarithmiques.

Il ne peut être question de réduire en tables les fonctions de la troisième espèce, puisqu'elles contiennent deux constantes arbitraires outre la variable principale, et qu'ainsi il faudrait que ces tables fussent à triple entrée, chose tout-à-fait inexécutable. Nous rappellerons seulement, relativement à ces fonctions, 1°. que le cas des paramètres imaginaires se réduit toujours à celui des paramètres réels, 2°. que les fonctions complètes de ce genre s'expriment toujours par des fonctions de la première et de la seconde espèce; 3°. qu'il y a une infinité de cas particuliers, déterminables algébriquement, où une semblable réduction peut avoir lieu; 4°. qu'on peut pareillement trouver une infinité de cas où une fonction donnée de troisième espèce, est réductible indéfiniment à la première espèce; 5°. enfin, que dans tous les cas la valeur aussi approchée qu'on voudra de toute fonction de troisième espèce, peut être trouvée par des séries régulières et très convergentes.

Toute la difficulté se réduit donc à construire des tables qui représentent les fonctions de première et de seconde espèce, calculées pour un nombre déterminé de valeurs, tant du module c que de l'amplitude φ, afin d'en pouvoir déduire par interpolation, les valeurs des mêmes fonctions correspondantes à toutes valeurs données des quantités c et φ.

Nous allons faire voir quels sont les moyens qu'on peut employer pour parvenir à l'exécution de la table générale que nous venons d'indiquer; mais d'abord nous nous occuperons de la table des fonctions complètes qui est d'un usage plus fréquent et dont la construction ne présente pas de si grandes difficultés.

CHAPITRE PREMIER.

Du calcul des fonctions complètes.

643. Nous supposerons en général qu'on veut calculer les logarithmes des fonctions dont il s'agit jusqu'à 14 décimales, parce que ce nombre est celui que comportent les tables les plus étendues qui aient été publiées jusqu'à présent, savoir : l'*Arithmetica logarithmica* de Briggs et la *Trigonometria Britannica* du même auteur. Les exemples que nous apporterons dans cette hypothèse feront juger aisément des simplifications dont les calculs sont susceptibles, lorsqu'on ne voudra obtenir que dix ou un moindre nombre de décimales exactes.

On verra bientôt que les mêmes données qui servent à calculer les fonctions F^1c, E^1c, servent aussi à calculer les fonctions complémentaires F^1b, E^1b; c'est pourquoi nous ne considérerons que les valeurs de c moindres que sin 45°. Lorsque le module proposé sera plus grand que sin 45°, on échangera entre elles les lettres c et b, afin que c désigne toujours la plus petite des deux.

Il faut d'abord former l'échelle des modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc. et celle de leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, etc.; mais le nombre de termes à calculer varie suivant la grandeur du module primitif, et il importe d'établir des divisions générales qui fixent d'une manière précise le nombre de ces termes.

644. Le but qu'on se propose étant d'obtenir autant qu'il est possible 14 décimales exactes, si on est parvenu à un terme b^{μ} tel que $-\log b^{\mu}$ soit moindre qu'une demi-unité décimale du 14^e ordre, alors on pourra regarder $\log b^{\mu}$ comme nul, et à plus forte raison les termes suivans $\log b^{\mu+1}$, $\log b^{\mu+2}$, etc.; ainsi $b^{\mu-1}$ sera le dernier des termes b, b°, $b^{\circ\circ}$, dont il faut tenir compte.

La série des modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc. comprend toujours un terme de plus; elle devra par conséquent être terminée au module c^{μ}. La raison en est qu'on a alors $c^{\mu} = (\frac{1}{2}c^{\mu-1})^2 . \frac{1}{b^{\mu-1}}$, et qu'ainsi le logarithme de $b^{\mu-1}$ est nécessaire pour composer la valeur de $\log c^{\mu}$.

Passé le terme c^{μ}, il n'y a pas lieu de considérer le suivant $c^{\mu+1}$, parce qu'on aura sans erreur sensible $c^{\mu+1} = (\frac{1}{2}c^{\mu})^2$, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{2^{\mu}} \log \frac{4}{c^{\mu}}$ ne change pas en mettant $\mu + 1$ à la place de μ.

Cela posé, il est facile de voir qu'on connaîtra les limites des différens cas, en commençant par déterminer la valeur du module c qui donne pour son complément $\log b = -\frac{1}{2}(10)^{-14}$.

Le module supposé c étant extrêmement petit, on a d'une manière suffisamment exacte $b = 1 - \frac{1}{2}c^2$ et $\log b = -\frac{1}{2}mc^2$(*); donc $c^2 = \mathrm{M}(10)^{-14}$ et $c = (10)^{-7}\sqrt{\mathrm{M}}$, ou

$$\log c = 3.1811078.$$

Si on assimile c au sinus d'un arc, on trouvera que cet arc n'est qu'une fraction de seconde et qu'on a $c = \sin 0''0313$.

Il faut maintenant partir de ce module très petit pour former la suite des modules croissans c, c', c'', c''', etc.; c'est un calcul qu'on pourra faire d'une manière suffisamment exacte pour notre objet, par une table à sept décimales seulement.

On aura d'abord $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, ou simplement $c' = 2\sqrt{c}$, ce qui donne $\log c' = 6.8915839$ et $c' = \sin 0°2'40''70$.

Pour avoir c'' je fais $c' = \tang^2 \frac{1}{2}\theta$, j'ai $l \tang \frac{1}{2}\theta = 8.4457919$, $\frac{1}{2}\theta = 1°35'55''78$, $\theta = 3°11'51''56$; donc $c'' = \sin 3°11'51''56$ et $\log c'' = 8.7464836$.

Si on fait de nouveau $c'' = \tang^2 \frac{1}{2}\theta'$, on aura $l \tang \frac{1}{2}\theta' = 9.3732418$, $\frac{1}{2}\theta' = 13°17'18''84$, $\theta' = 26°34'37''68$; donc $c''' = \sin 26°34'37''68$ et $\log c''' = 9.6506981$.

Soit enfin $c''' = \tang^2 \frac{1}{2}\theta''$, on aura $l \tang \frac{1}{2}\theta'' = 9.8253490$, $\frac{1}{2}\theta'' = 33°46'40''15$, $\theta'' = 67°33'20''30$; donc $c^{\mathrm{IV}} = \sin 67°33'20''30$ et $\log c^{\mathrm{IV}} = 9.9657898$.

(*) Dans tous les calculs logarithmiques qui suivent, nous désignerons constamment par la lettre m, le nombre connu 0.43429, etc. dont le logarithme est 9.63768 43113 00537 7
et par la lettre M son inverse 2.30258, etc., dont le logarithme est 0.36221 56886 99463.

645. Il résulte des calculs précédens, 1°. que depuis $c = \sin 67°33'$ jusqu'à $c = \sin 26°34'$ on devra se borner à calculer les quatre termes b, $b°$, $b^{°°}$, $b^{°°°}$, et les cinq c, $c°$, $c^{°°}$, $c^{°°°}$, $c^{°°°°}$;

2°. Que depuis $c = \sin 26°34'$ jusqu'à $c = \sin 3°11'$, on n'aura à calculer que les trois termes b, $b°$, $b^{°°}$, et les quatre c, $c°$, $c^{°°}$, $c^{°°°}$;

3°. Que depuis $c = \sin 3°11'$ jusqu'à $c = \sin 0°2'40''$, il suffira de calculer les deux termes b, $b°$, et les trois c, $c°$, $c^{°°}$;

4°. Que depuis $c = \sin 0°2'40''$ jusqu'à $c = \sin 0''0313$, il suffira de calculer le terme b, et les deux c, $c°$;

5°. Enfin qu'au-dessous de $c = \sin 0''0313$, on n'a besoin que du seul terme c.

Tel est le nombre des termes de la série des modules et de celle de leurs complémens, qu'il sera nécessaire de calculer dans les différens cas, pour obtenir 14 décimales exactes dans les logarithmes des fonctions F^1c, E^1c, F^1b, E^1b. Nous allons faire voir maintenant comment les calculs de ces modules peuvent être effectués de la manière la plus facile.

Formation de l'échelle des modules.

646. Connaissant les logarithmes de c et b, il s'agit de trouver ceux des termes suivans $c°$ et $b°$. Pour cela, soit $c° = x$, l'équation $b°c = 2\sqrt{(bc°)}$ donnera $x = \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}(1 - x^2)$, et en faisant $p = \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}$, la valeur de x développée en série régulière sera

$$x = p - \frac{1}{4}\cdot 4p^3 + \frac{1.3}{4.6}\cdot 16p^5 - \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot 64p^7 + \text{etc.}$$

Mais il importe de calculer directement $\log x$; or la valeur $x = \frac{\sqrt{(1+4p^2)}-1}{2p}$ donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p\sqrt{(1+4p^2)}} = \frac{dp}{p}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 4p^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot 16p^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 64p^6 + \text{etc.}\right),$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\log x = \log p - p^2 + \frac{3}{2}\cdot p^4 - \frac{3.5}{2.3}\cdot\frac{4p^6}{3} + \frac{3.5.7}{2.3.4}\cdot\frac{8p^8}{4} - \text{etc.}$$

Ces logarithmes sont hyperboliques; pour les changer en logarithmes vulgaires, il faut multiplier les parties algébriques par m; c'est pourquoi faisant

$$P = mp^2 - \tfrac{3}{2}mp^4 + \tfrac{10}{3}mp^6 - \text{etc.},$$

on aura $\log x$ ou

$$\log c^\circ = \log p - \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \log b^\circ = -\tfrac{1}{2}\mathrm{P};$$

ainsi on connaîtra à la fois $\log c^\circ$ et $\log b^\circ$.

La même formule servira à calculer les termes $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, au moyen des deux précédens c°, b°, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait formé l'échelle entière des modules dans les limites déterminées par l'art. 645.

Nous remarquerons qu'en supposant toujours qu'on veuille obtenir 14 décimales exactes, la valeur de P ne comprendra jamais plus de trois termes; on trouvera même que le troisième ne devient nécessaire que lorsque c est peu éloigné de la limite $\sin 45^\circ$; dans les autres cas, il suffira des deux premiers termes $mp^2 - \tfrac{3}{2}mp^4$, et souvent du seul premier terme mp^2.

647. Si la première valeur du module c est donnée sous la forme $c = \sin\theta$, et qu'en même temps l'angle θ, ainsi que sa moitié, se trouve directement et sans interpolation dans les tables, alors on aura immédiatement les quatre modules c, b, c°, b°, par les formules

$$c = \sin\theta, \quad b = \cos\theta, \quad c^\circ = \tang^2 \tfrac{1}{2}\theta, \quad b^\circ = \frac{\sqrt{b}}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

On calculera ensuite les termes $c^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ}$ en les déduisant des termes précédens c°, b°, par les formules de l'article précédent. C'est ainsi qu'on a procédé dans les calculs qui ont servi à former la Table générale des fonctions $\mathrm{E}^1 c$, $\mathrm{F}^1 c$ dont nous parlerons bientôt.

648. Si la valeur de c est donnée en nombres rationnels assez simples, il pourra être facile de trouver les valeurs logarithmiques de b, c°, b° au moyen des formules

$$b^2 = (1-c)(1+c), \quad c^\circ = \frac{1-b}{1+b} = \frac{c^2}{(1+b)^2}, \quad b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b},$$

et pour cet effet on emploiera la Table connue qui donne jusqu'à 15 ou 20 décimales, les logarithmes des nombres de 1 à 1161, ou même de 1 à 1200. Les calculs seront encore plus faciles si la valeur de b est donnée immédiatement en nombres simples.

Si on ne connaît que $\log c$, dont le double sera $\log c^2$, on cherchera dans une Table ordinaire à sept décimales, un nombre qui approche de c^2 jusqu'à la sixième ou la septième décimale; on transformera ensuite cette valeur en fraction continue, afin d'obtenir une fraction ordinaire exprimée en nombres assez simples qui approche beaucoup de la valeur de c^2. Cela posé, on appliquera la formule suivante qui sert à trouver facilement $\log(1+\mathrm{A})$, lorsqu'on connaît $\log \mathrm{A}$:

$$\log A = \log a + r,$$
$$\log(1 \pm A) = \log(1 \pm a) \pm \frac{ar}{1 \pm a}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}Mr}{1 \pm a}\right);$$

et pour faciliter le calcul de cette formule, on fera

$$r' = \frac{r}{1 \pm a}, \quad \log R = la + lr' + \tfrac{1}{2}r',$$

et on aura

$$\log(1 \pm A) = \log(1 \pm a) \pm R.$$

Par le moyen de $\log c^2$, on connaîtra donc $\log(1 - c^2)$, ou $2 \log b$; ensuite il faudra trouver $\log(1 + b)$, ce qui se fera par l'application de la même méthode. Enfin connaissant $\log(1 + b)$, on aura immédiatement les logarithmes de c° et b°, par les formules

$$c^{\circ} = \frac{c^2}{(1 + b)^2}, \quad b^{\circ} = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b}.$$

649. Si on ne veut pas pousser l'approximation au-delà de dix décimales, le calcul des premiers modules se fera sans difficulté par les Tables de Vlacq ou de Vega, en faisant les interpolations nécessaires, et ayant égard aux secondes différences. On peut à cet effet suivre deux méthodes différentes.

1°. Étant donné $\log c$ ou $\log \sin \theta$, on cherchera l'angle θ avec tout le degré d'exactitude que la Table comporte, c'est-à-dire en calculant les fractions de seconde jusqu'à la cinquième décimale au moins; θ étant connu, on aura par les interpolations ordinaires, les logarithmes des quantités b, c°, b°, savoir : $b = \cos\theta$, $c^{\circ} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\theta$, $b^{\circ} = \frac{2\sqrt{bc^{\circ}}}{c}$.

Ces calculs pourraient être faits de la même manière, lorsqu'il s'agira de trouver $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$; mais ils deviendraient plus compliqués, et les interpolations moins exactes à raison de la petitesse du nouvel angle θ. Il sera donc préférable alors de se servir de la méthode de l'art. 646.

2°. Pour éviter les interpolations assez pénibles qu'exige la méthode précédente, on peut opérer comme il suit.

L'angle θ auquel répond $l \sin \theta$, tombe toujours entre deux angles de la Table, qui ne diffèrent entre eux que de $10''$. Soit α celui des deux qui est multiple de $20''$, et soit

$$l \sin \theta = l \sin \alpha + r;$$

on déduira de là,

$$l \cos \theta = l \cos \alpha - r \operatorname{tang}^2 \alpha \left(1 + \frac{Mr}{\cos^2 \alpha}\right),$$
$$l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{r}{\cos \alpha}\left(1 + \tfrac{1}{2} Mr \operatorname{tang}^2 \alpha\right).$$

Ainsi on connaîtra les logarithmes de b et de c° ; ensuite on aura celui de b° par la formule $b^{\circ} = \frac{2\sqrt{(bc^{\circ})}}{c}$.

Si l'on fait $l \cos \theta = l \cos \alpha - \mathrm{R}$, $l \,\mathrm{tang.}\frac{1}{2}\,\theta = l \,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\alpha + \mathrm{S}$, le calcul des corrections R et S deviendra fort simple par le moyen suivant. Soit $r' = r\,\mathrm{tang}^2\,\alpha$, on aura

$$\log \mathrm{R} = \log r' + r' + r,$$
$$\log \mathrm{S} = \log \frac{r}{\cos \alpha} + \frac{1}{2}\,r';$$

Au reste il n'est point à craindre que les erreurs se multiplient dans ces calculs, puisqu'on suppose toujours θ ou $\alpha < 45^{\circ}$.

Formules pour le calcul des quatre fonctions F^1c, E^1c, F^1b, E^1b.

650. Nous partons toujours de l'hypothèse que l'on veut avoir les logarithmes de ces quatre fonctions, approchés jusqu'à la quatorzième décimale ; d'ailleurs on peut toujours supposer $c < \sin 45^{\circ}$. Cela posé, nous commencerons par le cas qui exige les plus longs calculs, celui où le module c est compris entre $\sin 45^{\circ}$ et $\sin 26^{\circ}\,34'$; alors l'échelle des modules doit être prolongée jusqu'aux termes $b^{\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ}$, inclusivement. Les autres cas seront susceptibles de diverses simplifications à mesure que le module c deviendra plus petit.

Les valeurs de F^1c, E^1c se trouvent d'abord immédiatement par les formules

$$\mathrm{F}^1c = \frac{\pi}{2}\,.\,\mathrm{K}, \qquad \mathrm{K} = \sqrt{\left(\frac{1}{b}\,.\,b^{\circ}b^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}\right)};$$
$$\mathrm{E}^1c = \mathrm{LF}^1c, \qquad \mathrm{L} = \frac{b}{b^{\circ 2}}\left(1 - \frac{1}{2}\,c^{\circ 2}c^{\circ\circ} - \frac{1}{4}\,c^{\circ 2}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}\right).$$

Pour simplifier le calcul du coefficient L, j'observe que les deux termes $\frac{1}{2}\,c^{\circ 2}c^{\circ\circ}\left(1 + \frac{1}{2}\,c^{\circ\circ\circ}\right)$ peuvent se réduire à un seul ; car on a d'une manière suffisamment exacte, $1 + \frac{1}{2}\,c^{\circ\circ\circ} = \sqrt{(1 + c^{\circ\circ\circ})} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}}\right)}$; d'un autre côté, $\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}} = \frac{b^{\circ\circ\circ}}{\sqrt{b^{\circ\circ}}}$. Donc

$$\mathrm{L} = \frac{b}{b^{\circ 2}}\left(1 - \frac{1}{2}\,c^{\circ 2}c^{\circ\circ}\,.\,\frac{\sqrt{b^{\circ\circ\circ}}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}}\right).$$

Ainsi faisant $r = \frac{1}{2}\,c^{\circ 2}c^{\circ\circ}\,.\,\frac{\sqrt{b^{\circ\circ\circ}}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}}$, on aura

$$E^{\prime}c = \frac{b}{b^{\circ 2}} F^{\prime}c\,(1 - r).$$

Lorsque c est donné sous la forme $\sin\theta$, et que l'angle θ ainsi que $\frac{1}{2}\theta$, se trouve immédiatement dans les Tables, on a plus simplement

$$\frac{b}{b^{\circ 2}} = \cos^4 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Tout se réduit donc à trouver $\log(1 - r)$, ce que l'on fera par la formule $\log(1 - r) = - mr - \frac{1}{2} mr^2 - \frac{1}{3} mr^3$, dont il suffira de calculer trois termes au plus.

Le premier terme mr de cette valeur peut être calculé avec une précision suffisante par des Tables à dix décimales; car il ne peut avoir au plus que dix chiffres significatifs : et quand même il y aurait une erreur d'une ou de deux unités sur le dixième chiffre significatif, qui sera au rang de la quatorzième décimale, cette erreur sera confondue avec celles dont les autres logarithmes sont susceptibles; car en poussant l'approximation jusqu'à la quatorzième décimale, on ne peut prétendre que la quatorzième décimale sera toujours exacte.

651. Venons maintenant au calcul des fonctions complémentaires $F^{\prime}b$, $E^{\prime}b$. Les formules des art. 72 et 92 donnent, après avoir échangé entre elles les lettres b et c, et en supposant $\mu = 4$,

$$F^{\prime}b = \frac{K^{\prime}}{2^4}\log\frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}}, \quad K^{\prime} = \sqrt{\left(\frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}}{b}\right)},$$

$$E^{\prime}b = L^{\prime}F^{\prime}b + \frac{1}{K^{\prime}}.$$

On voit d'abord qu'on a exactement $K^{\prime} = K$, et qu'ainsi $K^{\prime}$ est déjà connu; ensuite pour changer les logarithmes compris dans ces formules en logarithmes vulgaires, soit $h = \frac{1}{2^4}\log\frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}}$; ce logarithme tiré immédiatement de la série des modules, sera un logarithme vulgaire, et on en conclura

$$F^{\prime}b = KMh.$$

Pour calculer $E^{\prime}b$, il faut connaître le coefficient $L^{\prime}$; or les formules des art. cités, donnent, après les permutations convenables,

$$L^{\prime} = c\sqrt{c^{\circ}} - c\sqrt{(bc^{\circ}c^{\circ\circ})} - c\sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{b^{\circ}}\right)} - \text{etc.}$$

Cette suite est fort convergente, mais on peut lui donner une forme plus commode; en effet, on a les équations

$\sqrt{(bc^{\circ})} = \frac{1}{2}\, b^{\circ}c$, d'où résultent $\sqrt{(bc^{\circ}c^{\circ\circ})} = \frac{1}{2}\, b^{\circ}c\sqrt{c^{\circ\circ}}$,

$\sqrt{(b^{\circ}c^{\circ\circ})} = \frac{1}{2}\, b^{\circ\circ}c^{\circ}$, $\qquad \sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{b^{\circ}}\right)} = \frac{1}{4}\, b^{\circ\circ}cc^{\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}$,

$\sqrt{(b^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ})} = \frac{1}{2}\, b^{\circ\circ\circ}c^{\circ\circ}$, $\qquad \sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}c^{\circ\circ\circ\circ}}{b^{\circ}b^{\circ\circ}}\right)} = \frac{1}{8}\, b^{\circ\circ\circ}cc^{\circ}c^{\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ\circ}}$,

etc. $\qquad$ etc.

donc

$$L' = c\sqrt{c^{\circ}} - \tfrac{1}{2}\, c^2b^{\circ}\sqrt{c^{\circ\circ}} - \tfrac{1}{4}\, c^2c^{\circ}b^{\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ}} - \tfrac{1}{8}\, c^2c^{\circ}c^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ\circ}} - \text{etc.}$$

Pour rendre cette expression tout à fait rationnelle, on substituera les valeurs $\sqrt{c^{\circ}} = \frac{c}{2}(1 + c^{\circ})$, $\sqrt{c^{\circ\circ}} = \frac{c^{\circ}}{2}(1+c^{\circ\circ})$, etc.; et en observant qu'on a $b^{\circ} = \frac{1 - c^{\circ\circ}}{1 + c^{\circ\circ}}$, $b^{\circ\circ} = \frac{1 - c^{\circ\circ\circ}}{1 + c^{\circ\circ\circ}}$, etc., il viendra enfin

$$L' = \frac{c^2}{2}(1 + c^{\circ}) - \tfrac{1}{4}\, c^2c^{\circ}(1 - c^{\circ\circ}) - \tfrac{1}{8}\, c^2c^{\circ}c^{\circ\circ}(1 - c^{\circ\circ\circ}) - \text{etc.},$$

ou

$$L' = \tfrac{1}{2}\, c^2 + \tfrac{1}{4}\, c^2c^{\circ} + \tfrac{1}{8}\, c^2c^{\circ}c^{\circ\circ} + \tfrac{1}{16}\, c^2c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ} + \text{etc.}$$

Comparant cette expression avec celle du coefficient L (art. 90) qui sert à déterminer $E^{1}c$, on trouve exactement $L' = 1 - L$.

Ce résultat aurait pu se déduire directement de notre théorème sur les fonctions complémentaires, savoir,

$$\frac{\pi}{2} = F^{1}cE^{1}b + F^{1}bE^{1}c - F^{1}cF^{1}b;$$

car en substituant dans cette équation les valeurs $F^{1}c = \frac{\pi}{2}K$, $E^{1}c = LF^{1}c$, $E^{1}b = L'F^{1}b + \frac{1}{K}$, on trouve immédiatement

$$L' = 1 - L;$$

ainsi on a une nouvelle vérification du théorème dont il s'agit.

652. Il suffit, pour l'approximation que nous voulons obtenir, de prendre

$$L' = \tfrac{1}{2}\, c^2\left(1 + \tfrac{1}{2}\, c^{\circ} + \tfrac{1}{4}\, c^{\circ}c^{\circ\circ} + \tfrac{1}{8}\, c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}\right);$$

mais ces quatre termes seraient peu commodes pour le calcul logarithmique, et on va voir qu'ils peuvent être réduits à deux.

En effet soit $y = 1 + \frac{1}{2}\, c^{\circ} + \frac{1}{4}\, c^{\circ}c^{\circ\circ} + \frac{1}{8}\, c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}$, j'observe d'abord qu'on a $1 + c^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}}$; donc $1 + \frac{1}{2}\, c^{\circ}(1 + c^{\circ\circ}) = 1 + \sqrt{c^{\circ\circ}}$, et

$$y = 1 + \sqrt{c^{\circ\circ}} - \tfrac{1}{4}\, c^{\circ}c^{\circ\circ}\left(1 - \tfrac{1}{2}\, c^{\circ\circ\circ}\right).$$

La seconde partie de cette valeur se réduit à un seul terme, parce qu'on a avec une exactitude suffisante,

$$1-\tfrac{1}{2}c^{\circ\circ\circ}=\sqrt{(1-c^{\circ\circ\circ})}=\sqrt{(b^{\circ\circ\circ}\sqrt{b^{\circ\circ}})};$$

il en résulte

$$y=1+\sqrt{c^{\circ\circ}}-\tfrac{1}{4}c^{\circ}c^{\circ\circ}\sqrt{(b^{\circ\circ\circ}\sqrt{b^{\circ\circ}})}.$$

Mais on a

$$(1+\sqrt{c^{\circ\circ}})^2=1+c^{\circ\circ}+2\sqrt{c^{\circ\circ}}=\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}}(1+c^{\circ})=\frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c}\cdot\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}};$$

et cette valeur se réduit ultérieurement à $\frac{b^{\circ}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b^{\circ\circ}}{\sqrt{b^{\circ}}}$; donc si on fait.... $1+\sqrt{c^{\circ\circ}}=\zeta$, on aura $\zeta^4=\frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}}{b}\cdot b^{\circ\circ}=K^2\cdot\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}}$, et $\zeta=K^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}}\right)^{\frac{1}{4}}$. Cela posé, la valeur de y devient

$$y=\zeta\left(1-\tfrac{1}{4}c^{\circ}c^{\circ\circ}\cdot\frac{\sqrt{(b^{\circ\circ\circ}\sqrt{b^{\circ\circ}})}}{\zeta}\right),$$

et le second terme se réduit à $\frac{1}{4}\cdot\frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}(b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}}$; donc enfin on aura

$$L'=\tfrac{1}{2}c^2K^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\frac{1}{4}c^{\circ}c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}(b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}}\right).$$

Par ces transformations non-seulement la valeur de L' est réduite à deux termes; mais le second de ces termes reste toujours très petit par rapport au premier; j'observe d'ailleurs que le facteur $(b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}}$, très peu différent de l'unité, peut être omis sans qu'il en résulte une erreur d'une unité décimale du quatorzième ordre sur le log. de L', et encore moins sur celui de $E'b$.

653. Cela posé, le calcul de $E'b$ se fera par les formules

$$E'b=\frac{1}{K}(1+A),$$

$$A=\tfrac{1}{2}c^2K^{\frac{3}{2}}F'b\cdot\left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\frac{1}{4}c^{\circ}c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right).$$

Nous avons fait voir d'ailleurs comment du log. connu de A on déduit log $(1+A)$; ces formules jointes à celles que nous avons déjà trouvées, savoir,

$$F'c=\frac{\pi}{2}K,\qquad K=\sqrt{\left(\frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}}{b}\right)},$$

$$E'c=\frac{b}{b^{\circ 2}}F'c(1-r),\qquad r=\tfrac{1}{2}c^{\circ 2}c^{\circ\circ}\cdot\frac{\sqrt{b^{\circ\circ\circ}}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}},$$

$$F'b=KMh,\qquad h=\tfrac{1}{16}\log\frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}},$$

sont ce que l'analyse paraît offrir de plus simple pour calculer jusqu'à la quatorzième décimale, les logarithmes des quatre fonctions F^1c, E^1c, F^1b, E^1b, dans le premier cas de l'art. 645, c'est-à-dire lorsque le module c est compris entre sin 45° et sin 26° 34′.

654. Ces formules se simplifieront encore lorsqu'on voudra obtenir une moins grande approximation, ou lorsque c sera plus petit que sin 26° 34′, parce qu'alors il y aurait moins de termes à calculer dans la série des modules.

Ainsi depuis $c = \sin 26° 34'$ jusqu'à $c = \sin 3° 11'$, ou depuis $c = 0.447$ jusqu'à $c = 0.0558$, on pourra faire $b^{\circ\circ\circ} = 1$, et prendre $c^{\circ\circ\circ}$ pour le dernier terme de la suite des modules, ce qui donnera

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^\circ b^{\circ\circ}}{b}\right)}, \quad r = \frac{\frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}}, \quad h = \tfrac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ}},$$

$$A = \tfrac{1}{2} c^2 K^{\frac{3}{2}} F^1 b (b^{\circ\circ})^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\frac{1}{4} c^\circ c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right).$$

Ces formules conviennent au second cas de l'art. 645.

655. Le troisième cas à considérer est celui où c est compris entre sin 3° 11′ et sin 2′ 40″, c'est-à-dire entre 0.0558 et 0.000776. Alors on pourra faire $b^{\circ\circ} = 1$, et prendre $c^{\circ\circ}$ pour le dernier terme de la série des modules; on aura donc pour déterminer F^1c et E^1c, les formules

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^\circ}{b}\right)}, \quad F^1c = \tfrac{1}{2} \pi K, \quad E^1c = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^\circ K} \left(1 - \tfrac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}\right).$$

Dans la dernière, le facteur $1 - \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}$ qu'on peut représenter par $(b^{\circ\circ})^4$, ne peut produire au plus que deux unités dans le quatorzième ordre de décimales, car la limite supérieure de c est déterminée par la condition que log $b^{\circ\circ}$ n'est que d'une demi-unité de cet ordre. Ainsi, peu après cette limite, on pourra négliger tout-à-fait ce facteur, et faire $E^1c = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^\circ K}$.

Dans le même cas, les fonctions F^1b, E^1b se calculent par les formules

$$F^1 b = KMh, \qquad h = \tfrac{1}{4} \log \frac{4}{c^{\circ\circ}},$$

$$E^1 b = \frac{1}{K}(1 + A), \quad A = \tfrac{1}{2} c^2 K^{\frac{3}{2}} F^1 b . \left(1 - \frac{\frac{1}{4} c^\circ c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right);$$

et on remarquera que le facteur $1 - \frac{\frac{1}{4} c^\circ c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}$ ne peut donner au plus qu'une unité décimale du onzième ordre : ainsi il devra être négligé si on se borne à dix décimales; alors on aurait simplement $E^1b = \frac{1}{K}\left(1 + \frac{1}{2} c^2 K^{\frac{3}{2}} F^1 b\right)$.

656. Ces formules sont déjà réduites à un tel degré de simplicité, qu'il serait presque inutile de faire mention des deux derniers cas de l'article 645; l'un où l'on peut faire $b^{\circ}=1$, $K=\frac{1}{\sqrt{b}}$, $h=\frac{1}{2}l\frac{4}{c^{\circ}}=l\frac{4}{c}+\frac{1}{2}l\frac{1}{b}$; l'autre où l'on peut faire $b=1$, $K=1$, $h=\log\frac{4}{c}$.

Il ne reste plus qu'à faire voir dans quelques exemples, l'application des formules précédentes; nous commencerons par le cas où il faut apporter le plus de précision dans les calculs, mais qui offre plusieurs moyens de vérification; et pour mieux juger de l'exactitude des formules, nous ne négligerons les décimales qu'au-delà du quinzième ordre.

EXEMPLE I. $c=\sin 45^{\circ}$.

657. On aura $c^{\circ}=\text{tang}^2\, 22^{\circ}\frac{1}{2}=(\sqrt{2}-1)^2$, $b^{\circ}=2\sqrt{\frac{c^{\circ}}{c}}$, ce qui donne d'abord les logarithmes suivans,

		c, b...	9.84948 50021 68010
tang $22^{\circ}\frac{1}{2}$...	9.61722 43146 62137...	b°...	9.99351 18092 42113
c°........	9.23444 86293 24274.		

Pour trouver les termes suivans $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, on calculera par la méthode de l'art. 646, d'abord p, ensuite les différens termes qui composent P, et que nous désignerons ici par 1), 2), 3).

$\frac{1}{2}c^{\circ}$.....	8.93341 86336 60293	p^2....	5.74665 09161 57
$(\frac{1}{2}c^{\circ})^2$...	7.86683 72673 20586	m....	9.63778 43113 00
b°......	9.99351 18092 42113	1)....	5.38443 52274 57
p......	7.87332 54580 78473	p^2...	5.74665 0916
		$\frac{3}{2}$....	0.17609 1259
		2)...	1.30717 74
		p^2...	5.74665 09
		$\frac{20}{9}$...	0.34678 7
		3)....	7.40061 5.

D'après les logarithmes trouvés des trois parties de la valeur de P, le premier terme 1) se trouve par des Tables à dix décimales, 0.00002 42345 64925; mais comme on pourrait craindre, dans ce cas, que la quatorzième décimale ne fût pas exacte, et encore moins la quinzième, voici le moyen d'obtenir une plus grande précision.

658. Il s'agit de trouver le nombre A d'après son logarithme...... 5.38443 52274 57; je trouve dans les Tables qu'en faisant $a = 0.0000\ 2423$, on a

$$\begin{aligned} \log a &= 5.38435\ 34141\ 37, \\ \log A &= 5.38443\ 52274\ 57, \\ \hline r &= \quad\quad 8\ 18133\ 20, \end{aligned}$$

ce qui donne $\log A = \log a + r$; donc $A = ae^{Mr}$, $A - a = a(e^{Mr} - 1)$ $= ae^{\frac{1}{2}Mr}(e^{\frac{1}{2}Mr} - e^{-\frac{1}{2}Mr}) = aMre^{\frac{1}{2}Mr}\left(1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{M^2r^2}{4} + \frac{1}{120}\cdot\frac{M^4r^4}{16}\right)$; et enfin,

$$\log(A - a) = l(aMr) + \tfrac{1}{2}r + \frac{Mr^2}{24}\left(1 - \frac{M^2r^2}{120}\right).$$

Voici le calcul de cette formule :

r........	5.91282 40168
a.......	5.38435 34141
M.......	0.36221 56887
$\frac{1}{2}r$......	4 09067
$\frac{1}{24}Mr^2$...	6
$A - a$...	1.65943 40269

$A - a =$	0.00000 00045 64929
a...	0.00002 423
$A =$	0.00002 42345 64929.

On voit que la formule pourra, dans des cas semblables, être réduite aux deux premiers termes, de sorte qu'on aura $\log(A - a) = l(aMr) + \frac{1}{2}r$, et l'usage en sera extrêmement facile; d'ailleurs il suffit de calculer $\log(A - a)$ avec sept décimales, pour en tirer la valeur de A exacte jusqu'à la quinzième décimale.

659. Nous venons de trouver la valeur du premier terme 1) de P; les termes 2) et 3) s'obtiennent sans difficulté par leurs logarithmes : ainsi on en conclura

1)...	0.00002 42345 64929
2) —	20 28511
3) +	252
P =	0.00002 42325 36670
p....	7.87332 54580 78473
$c^{\circ\circ}$...	7.87330 12255 41803.

$\frac{1}{2}$P....	0.00001 21162 68335
$b^{\circ\circ}$....	9.99998 78837 31665

Connaissant $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, on se servira de la même méthode pour en déduire $c^{\circ\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ\circ}$; mais la quantité P se réduisant à son premier terme mp^2, le calcul se simplifie beaucoup.

$\frac{1}{2}c^{\circ\circ}$....	7.57227 12298 77822	p^2....	0.28910 915
$(\frac{1}{2}c^{\circ\circ})^2$..	5.14454 24597 55644	m....	9.63778 431
$1:b^{\circ\circ}$...	1 21162 68335	P.....	9.92689 346
p.......	5.14455 45760 23979		
P......	84507	$\frac{1}{2}$P....	0.00000 00000 42254
$c^{\circ\circ\circ}$.....	5.14455 45759 39472	$b^{\circ\circ\circ}$...	9.99999 99999 57746.

Il ne reste plus qu'à calculer le terme $c^{\circ\circ\circ\circ}$, ce qui se fera simplement par la formule $c^{\circ\circ\circ\circ} = (\frac{1}{2}c^{\circ\circ\circ})^2 \frac{1}{b^{\circ\circ\circ}}$.

$\frac{1}{2}c^{\circ\circ\circ}$...	4.84352 45802 75491
	9.68704 91605 50982
	42254
$c^{\circ\circ\circ\circ}$...	9.68704 91605 93236.

660. Ayant formé ainsi l'échelle entière des modules, nous calculerons d'abord K et F^1c, comme il suit :

$\frac{1}{b}$......	0.15051 49978 31990
b°.....	9.99351 18092 42113
$b^{\circ\circ}$.....	9.99998 78837 31665
$b^{\circ\circ\circ}$....	9.99999 99999 57746
K^2.....	0.14401 46907 63514
K.....	0.07200 73453 81757
$\frac{1}{2}\pi$....	0.19611 98770 30153
F^1c....	0.26812 72224 11910.

Pour calculer ensuite E^1c, on commencera par former le logarithme de r qu'il suffit ordinairement d'exprimer avec dix décimales, mais que pour plus de sûreté on peut porter jusqu'à douze; ensuite on en déduira les différens termes de $\log(1-r)$ que nous désignerons à l'ordinaire par 1), 2), 3),

c^{o2}......	8.46889 72586 485	r......	6.04117 15175 72
$\frac{1}{2}c^{oo}$......	7.57227 12298 778	m......	9.63778 43113 00
$1:\sqrt[4]{b^{oo}}$....	30290 671	1).....	5.67895 58288 72
$\sqrt{b^{ooo}}$.....	— 211	$\frac{2}{2}r$.....	5.74014 15
r.........	6.04117 15175 72	2).....	1.41909 73
		$\frac{3}{2}r$.....	5.86508 0
		3).....	7.28417 7.

La valeur du premier terme 1) se trouve par les Tables à dix décimales, 0.00004 77480 7077; pour la déterminer avec plus de certitude, et jusqu'à la quinzième décimale, on fera usage du moyen indiqué art. 658.

Soit $a = 0.00004\ 775$, on aura

$$\log a = 5.67897\ 33759\ 20$$
$$\log A = 5.67895\ 58288\ 72$$
$$r = \quad 1\ 75470\ 48 \qquad \log A = \log a - r.$$

r.........	5.24420 40641	$\log(a - A) = \log(aMr) - \frac{1}{2}r.$	
M........	0.36221 56887	$a - A =$	0.00000 00019 29232
a.........	5.67897 33759	$a =$	0.00004 775
$\frac{1}{2}r$........	— 87735	$A =$	0.00004 77480 70768
$a - A$....	1.28538 43552.		

On voit combien la première détermination de A, par les Tables à dix décimales, était approchée, et on en conclura que l'usage de ces Tables sera toujours suffisant dans les cas ordinaires, lorsqu'on ne veut pas obtenir plus de quatorze décimales.

Les deux autres termes 2) et 3) de la valeur de log $(1-r)$, se trouvent sans difficulté par leurs logarithmes, et on en déduit le résultat suivant pour log E'c.

1)...	0.00004 77480 70768	F'c...	0.26812 72224 11910
2)...	26 24807	$\frac{b}{b^{o2}}$...	9.86246 13836 83782
3)...	192		0.13058 86060 95692
$l(1-r) = -$	0.00004 77506 95767		4 77506 95767
		E'c...	0.13054 08553 99925.

661. On peut vérifier la valeur trouvée pour E'c par l'équation des

fonctions complémentaires qui devient dans ce cas $\frac{1}{2}\pi = 2FE - F^2$, et d'où résulte $E = \frac{1+KF}{2K} = \frac{1}{2K}(1+A)$, en faisant $A = KF$:

K....	0.07200 73453 81757
F....	0.26812 72224 11910
A....	0.34013 45677 93667.

D'après cette valeur de log A, on trouve aisément une fraction exprimée en nombres peu considérables qui approche beaucoup de A, cette fraction est $\frac{871}{398} = a$. Prenant son logarithme avec quinze décimales, ainsi que celui de $1 + a = \frac{1269}{398}$, et appliquant la formule de l'art. 648, on trouve ce qui suit :

871...	2.94001 81550 07663	1269....	3.10346 16220 94705
398...	2.59988 30720 73688	398...	2.59988 30720 73684
a.....	0.34013 50829 33975	$1+a$...	0.50357 85500 21017
A.....	45677 93667	1) —	3535 65354
$r =$...	5151 40308	$1+A$..	0.50357 81964 45663
	$\log A = \log a - r$	2K.....	0.37303 73410 45738
		E'c.....	0.13054 08553 99925.

r........	3.71192 55333
$1+a$....	0.50357 85500
r'........	3.20834 69833
a........	0.34013 50829
$\frac{1}{2}r'$....—	808
(1).......	3.54848 19854.

On voit que la valeur trouvée pour log E'c s'accorde jusqu'à la quinzième décimale avec celle que nous avions déjà trouvée, ce qui confirme pleinement tous ces calculs.

Il n'y a pas lieu de calculer dans cet exemple les valeurs des fonctions F'b, E'b, puisqu'elles sont les mêmes que celles de F'c et E'c; mais si on exécute ces calculs par les méthodes indiquées, on obtiendra deux nouvelles vérifications de nos formules.

EXEMPLE II. $c = \sqrt{2} - 1 = \tang \frac{1}{8}\pi$.

662. Cet exemple est compris dans le second cas de l'art. 645; ainsi il ne faut prolonger l'échelle des modules que jusques aux termes $b^{\circ\circ}$ et $c^{\circ\circ\circ}$; et d'abord nous supposerons qu'on connaît seulement $\log c$ ...... $= 9.61722\ 43146\ 6214$, qui donne

$$\log c^{\circ} = 9.23444\ 86293\ 2428.$$

De cette valeur il faut déduire $\log b$; pour cela on trouve d'abord la valeur approchée $c^{\circ} = 0.171573$, laquelle, par les fractions continues, se transforme en $\frac{169}{985}$; soit donc $c^{\circ} = \mathrm{A}$ et $\frac{169}{985} = a$, on aura $1 - a = \frac{816}{985}$. Or par la Table à vingt décimales, on trouve les logarithmes de a et de $1 - a$ comme il suit :

169...	2.22788 67046 13673	816....	2.91169 01587 53861
985...	2.99343 62304 97611	985....	2.99343 62304 97611
a.....	9.23445 04741 16062	$1-a$...	9.91825 39282 5625
A.....	9.23444 86293 2428		
$r =$	18447 9178		

Ensuite il faut appliquer les formules de l'article 648, savoir :

$$\log \mathrm{A} = \log a - r, \qquad r' = \frac{r}{1-a},$$
$$\log (1 - \mathrm{A}) = \log (1 - a) + \mathrm{R}, \qquad \log \mathrm{R} = \log (ar') - \tfrac{1}{2} r';$$

en voici le calcul :

r........	4.26594 73549	$1-a$....	9.91825 39282 5625
$1-a$....	9.91825 39283	R.....	3820 6987
r'........	4.34769 34266	$1-\mathrm{A}$...	9.91825 43103 2612
a........	9.23445 04741	b........	9.95912 71551 6306
$-\frac{1}{2}r'$....	$-$ 11134		
R.......	3.58214 27873		

Il est aisé de vérifier cette valeur de $\log b$; car puisque $c = \sqrt{2} - 1$, il en résulte $b^{\circ} = 2\sqrt{2} - 2 = 2c$;

c.....	9.61722 43146 6214
2.....	0.30102 99956 6398
b^2....	9.91825 43103 2612
b.....	9.95912 71551 6306

ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat précédent.

Maintenant il faut avoir le log. de $1 + b$, pour en déduire ceux de c° et b°; or en prenant pour b une valeur approchée telle que $\frac{152}{167}$, on trouvera les logarithmes suivans qui répondent à la valeur exacte de b.

$1+b$...	0.28107 42301 90515	$2\sqrt{b}$...	0.28059 35732 4551
c......	9.61722 43146 6214	$1+b$...	0.28107 42401 90515
$\sqrt{c^\circ}$...	9.33615 00844 71625	b°......	9.99951 93430 54995
c°.....	8.67230 01689 4325		

Maintenant le calcul de $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, et ensuite celui de $c^{\circ\circ\circ}$, se feront par la méthode ordinaire comme il suit :

$\frac{1}{2}c^\circ$....	8.37127 01732 7927	p^2.....	3.48604 20070
$(\frac{1}{2}c^\circ)^2$...	6.74254 03465 5854	m.....	9.63778 43113
$1:b^\circ$....	0.00048 06569 45005	mp^2....	3.12382 63183
P[illegible]....	6.74302 10035 03545	$\frac{3}{2}mp^2$..	— 1995
P......	1329 92184	P.....	3.12382 61188
$c^{\circ\circ}$.....	6.74302 08705 1136	$\frac{1}{2}$P....	0.00000 00664 96092
	0.30102 99956 6398	$b^{\circ\circ}$....	9.99999 99335 03908
$\frac{1}{2}c^{\circ\circ}$....	6.44199 08748 4738		
	2.88398 17496 9476		
	664 9609		
$c^{\circ\circ\circ}$....	2.88398 18161 9085		

663. L'échelle des modules étant ainsi formée, on procédera à l'ordinaire pour avoir K et F'c :

$\frac{1}{b}$	0.04087 28448 3694
b°	9.99951 93430 54995
$b^{\circ\circ}$	9.99999 79335 03908
	0.04039 21213 9584
K	0.02019 60606 9792
$\frac{1}{2}\pi$	0.19611 98770 3015
$F'c$	0.21631 59377 2807

Pour avoir ensuite $E'c$, il faut chercher log $(1-r)$ d'après la valeur $r = \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} \sqrt[4]{\frac{1}{b^{\circ\circ}}}$. Voici le calcul :

$c^{\circ 2}$	7.34460 03379	$\log(1-r)$	$= -R$
$\frac{1}{2}c^{\circ\circ}$	6.44199 08748	$\log R$	$= \log mr + \frac{1}{2} mr$
$1 : \sqrt[4]{b^{\circ\circ}}$ ..	166	$\log mr$	= 3.42437 55406
r	3.78659 12293	$\frac{1}{2} mr$	= 1329
m	9.63778 43113	$\log R$	= 3.42437 56735
mr	3.42437 55406	R	= 0.00000 02656 90284

$\frac{b}{b^{\circ 2}}$	9.96008 84690 5307
$F'c$	0.21631 59377 2807
$(1-r)$	— 2656 9028
$E'c$	0.17640 41410 9086

664. Maintenant le calcul de $F'b$ doit être fait par la formule $F'b = KMh$, où l'on a $h = \frac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ}}$; voici ce calcul :

4	0.60205 99913 2796	h	9.98441 91861 62678
$c^{\circ\circ\circ}$	2.88398 18161 9085	M	0.36221 56886 99465
$8h =$	7.71807 81751 3711	K	0.02019 60606 9792
$h =$	0.96475 97718 9214	$F'b$	0.36683 09355 6006

On peut vérifier cette valeur de log $F'b$, par la propriété des fonctions $F'b$, $F'c$, démontrée art. 85, laquelle donne $F'b = \sqrt{2} \cdot F'c$. En effet, si on prend la différence des logarithmes des deux fonctions, on trouve que cette différence répond à $\frac{1}{2}$ log 2.

$F'b$....	0.36683 09355 6006
$F'c$....	0.21631 59377 2807
	0.15051 49978 3199 $= \frac{1}{2}\log 2$.

Le résultat est donc exact jusque dans la dernière décimale.

665. Il reste à trouver $\log E'b$, et pour cela il faut calculer $\log A$ par la formule $A = \frac{1}{2} c^{\circ} K^{\frac{3}{2}} F'b (b^{\circ\circ})^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\frac{1}{4} c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right)$; mais d'abord faisant..... $r = \frac{\frac{1}{4} c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}$, nous chercherons $\log(1 - r) = -R$, ce qui se fera par l'équation $\log R = \log(mr) + \frac{1}{2} mr$.

$\frac{1}{2} c^{\circ}$.....	8.37127 01732 8	$\frac{1}{2} c^{\circ}$.....	8.93341 86336 6030
$\frac{1}{2} c^{\circ\circ}$....	6.44199 08748 5	K......	0.02019 60606 9792
	4.81326 10481 3	$\sqrt{K}$....	0.01009 80303 4896
$\sqrt{K}$....	1009 80303 5	$F'b$.....	0.36683 09355 6006
r.......	4.80316 30178	$\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}$....	— 166 2402
m......	9.63778 43113		9.33054 36436 4322
mr.....	4.44094 73291	R.......	— 27602 5185
$\frac{1}{2} mr$....	13801	A.......	9.33054 08833 9137
$\log R =$	4.44094 87092		

De cette valeur de $\log A$, il faut déduire $\log(1 + A)$; c'est ce qu'on obtiendra aisément au moyen de la valeur approchée $a = \frac{137}{640}$, qui donne $1 + a = \frac{777}{640}$. Voici le calcul d'où l'on tire ensuite $\log E'b$.

137....	13672 05671 56407	r......	3.46272 56169
640....	80617 99739 83887	$1 + a$..	0.08424 10448
a......	9.33054 05931 7252	r'......	3.37848 45721
A.....	8833 9137	a......	9.33054 05932
	$r =$ 2902 1885	$\frac{1}{2} r'$....	1195
	$\log A = \log a + r$	1)......	2.70902 52848.

777....	89042 10188 00914
640....	80617 99739 83887
1+a..	0.08424 10448 17027
1).....	511 71163
1+A..	0.08424 10959 8819
K.....	2019 60606 9792
E'b....	0.06404 50352 9027.

On s'assurera aisément que cette valeur est la même qu'on déduirait soit de la formule $E'b = \sqrt{2}(E'c - cF'c)$, soit de la formule $E'b = \frac{\pi}{4F'c} + cF'c$.

EXEMPLE III. $c = \sin\theta$, $\sin 2\theta = \tang^2 15°$.

666. Dans cet exemple qui se rapporte au troisième cas de l'art. 645, on ne donne directement ni la valeur de c, ni celle de b; il faut les déduire de l'équation $\sin 2\theta = \tang^2 15°$ ou $2bc = \tang^2 15°$. Voici le procédé que nous emploierons pour cet objet.

De l'équation $\sin 2\theta = \tang^2 \lambda$, on tire $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{(\cos 2\lambda)}}{\cos^2 \lambda}$. Soit donc $A = \frac{\sqrt{(\cos 30°)}}{\cos^2 15°}$, on aura $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + A)$: connaissant par cette équation $\cos\theta$ ou b, on aura ensuite c par l'équation $c = \frac{\tang^2 15°}{2b}$. Voici le détail des calculs.

sin 15°...	9.41299 62305 6934	$\sqrt{(\cos 30°)}$.	9.96876 53158 47925
cos 15°...	9.98494 37781 0270	cos² 15°....	9.96988 75562 0540
tang 15°...	9.42805 24524 6664	A.........	9.99887 77596 42525
tang² 15°...	8.85610 49049 3328		

Une valeur approchée de A est $a = \frac{387}{388}$; elle servira à calculer log. $(1+A)$, comme il suit :

387...	58771 09650 18911
388...	58883 17255 94207
a.....	9.99887 92394 24704
A.....	77596 42525
$r =$	14797 82179
$\log A = \log a - r$.	
r.......	4.17019 77928
$1+a$...	0.30046 99769
r'.......	3.86972 78159
a.......	9.99887 92394
$\frac{1}{2}r'$.....	— 3704
1)......	4.86860 66849

775....	88930 17025 06310
388....	58883 17255 94207
$1+a$..	0.30046 99769 12103
1).....	7389 35761
$1+A$.	0.30046 92379 76342
2......	0.30102 99956 63981
b^2.....	9.99943 92423 1236
b......	9.99971 96211 5618
$2b$.....	0.30074 96168 2016
tang² 15°.	8.85610 49049 3328
c......	8.55535 52881 1312

Connaissant les logarithmes de c et b, on trouvera par la méthode ordinaire, ceux de c^o, b^o, puis celui de c^{oo}, ce qui suffit dans le cas présent pour compléter la série des modules. Voici le calcul.

$\frac{1}{2}c$....	8.25432 52924 4914
$(\frac{1}{2}c)^2$..	6.50865 05848 9828
$1:b$...	28 03788 4382
p......	6.50893 09637 4210
P =	452 52874
c^o.....	6.50893 09184 89226
	0.30102 99956 63981
$\frac{1}{2}c^o$....	6.20790 09228 25245
$(\frac{1}{2}c^o)^2$..	2.41580 18456 50490
$1:b^o$..	226 26437
c^{oo}....	2.41580 18682 76927

p^2......	3.01786 193
m......	9.63778 431
mp^2.....	2.65564 624
$\frac{3}{2}mp^2$....	— 7
log P =	2.65564 617
$\frac{1}{2}$ P =	0.00000 00226 26437
b^o......	9.99999 99773 73563

667. L'échelle des modules étant terminée, on calculera comme il suit les quantités F^1c, E^1c.

$\frac{b^o}{b}$....	0.00028 03562 17382
K....	0.00014 01781 08691
$\frac{1}{2}\pi$...	0.19611 98770 30153
$\log F^1c =$	0.19626 00551 38844

$\frac{\frac{1}{2}\pi}{K}$....	0.19597 96989 21462
$\frac{1}{b^o}$....	226 26437
$\log E^1c =$	0.19597 97215 4790

Venons maintenant au calcul de $F'b$, il se fera par l'équation $F'b = KMh$, où l'on a $h = \frac{1}{4}\log\frac{4}{c^{oo}}$.

$\log\frac{4}{c^{oo}} = 8.18625\ 81230\ 51035$		h.....	0.31102 54430 50353
$h = 2.04656\ 45307\ 6276$		M....	0.36221 56886 99465
		K....	14 01781 08691
		$\log F'b =$	0.67338 13098 58509
		$\log F'c =$	0.19626 00551 38844
		$\log 3 =$	0.47712 12547 19665

On voit qu'entre les logarithmes calculés de $F'b$ et $F'c$, la différence répond exactement au logarithme de 3, ce qui s'accorde avec la propriété de ces fonctions.

On peut encore faire voir que la valeur trouvée pour $F'c$ satisfait exactement à l'équation $F'c = \frac{2\cos 15^\circ}{\sqrt[4]{27}} F'(\sin 45^\circ)$, donnée art. 155.

$F'(\sin 45^\circ)$....	0.26812 72224 11910
2............	0.30102 99956 63981
cos 15°.......	9.98494 37781 0270
	0.55410 09961 78591
$\sqrt[4]{27}$.....	0.35784 09410 39747
$\log F'c =$	0.19626 00551 38844

valeur qui s'accorde parfaitement avec le résultat du calcul précédent.

Il ne reste plus qu'à calculer le log. de $E'b$; pour cela nous suivrons la formule de l'art. 655.

$$r = \frac{1}{4}\cdot\frac{c^o c^{oo}}{\sqrt{K}}.$$

$$l(1-r) = -mr.$$

$F'b$......	0.67338 13098 5851		
$\frac{1}{2}c^2$......	6.80968 05805 6226		
K.......	14 01781 0869	$\frac{1}{2}c^o$......	6.20790 09
$\sqrt{K}$.....	7 00890 54345	$\frac{1}{2}c^{oo}$.....	2.11477 19
mr......	— 913	m......	9.63778 43
A.......	7.48327 21575 8289	$1:\sqrt{K}$..	— 7 01
		mr......	7.96038 70

Une valeur approchée de A est $\frac{17}{5587} = a$, $1 + a = \frac{5604}{5587}$.

17..	23044 89213 7827
5587..	74717 86713 6017
a.....	7.48327 02500 1810
A.....	21575 8289
	$r =$ 19075 6479

r......	4.28047 92975
$1+a$..	131 94553
r'.....	4.27915 98422
a......	7.48327 02500
$\frac{1}{2}r'$....	9509
R.....	1.76243 10431

5604...	74849 81266 1374
5587...	74717 86713 6017
$1+a$..	0.00131 94552 5357
R......	57 8670
$1+$A..	0.00131 94610 4027
K......	14 01781 0869
log E'b =	0.00117 92829 3158

Les valeurs que nous venons de trouver pour E'c, E'b, peuvent être vérifiées par les formules de l'art. 158; ou tout à la fois par la formule E'b = 3E'c — 2F'(sin 45°). Voici le calcul de celle-ci :

E'c....	0.19597 97215 4790
3......	0.47712 12547 1966
	0.67310 09762 6756
	$a = \frac{196}{249}$, $1 - a = \frac{53}{249}$,
$1-a$..	9.32807 65225 0505
R.....	+ 17841 5897
$1-$A..	9.32807 83066 6402
	0.67310 09762 6756
E'b...	0.00117 92829 3158

valeur conforme au résultat déjà trouvé.

F' sin 45°..	0.26812 72224 1191
2.........	0.30102 99956 6398
	0.56915 72180 7589
	0.67310 09762 6756
A........	9.89605 62418 0833
a.........	9.89605 67242 6074
LA = La — r....	$r =$ 4824 5241,
r.....	3.68345 44801
$1-a$..	9.32807 65225
r'....	4.35537 79576
a.....	9.89605 67243
ar'....	4.25143 46819
$\frac{1}{2}r'$...	— 11333
R.....	4.25143 35486.

EXEMPLE IV. *Soit* $c=\sin\theta$, *et* $\sin 2\theta=\frac{1}{2}(n-1)^4$, $n=\sqrt[3]{2}$.

668. Les fonctions calculées sur ce module jouissent de propriétés fort remarquables, ainsi qu'on l'a fait voir art. 162. Pour déduire c de la valeur connue de $\sin 2\theta$, soit $\sin 2\theta=y$, on aura

$$\log\sin\theta=\log\tfrac{1}{2}y+\frac{m}{4}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{y^4}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{y^6}{3}+\text{etc.}\right).$$

Soit encore $R=\frac{m}{4}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{y^4}{2}\right)$, on aura $\log R=\log\left(\frac{my^2}{8}\right)+\frac{3my^2}{8}$.

Voici d'après cette formule le calcul du module c et celui de son complément $b=\frac{y}{2c}$:

$n-1$....	9.41484 14525 79111
$(n-1)^4$..	7.65936 58103 16444
2.......	0.30102 99956 63981
$\sin 2\theta$....	$\bar{7}$.35833 58146 52463
$\frac{1}{2}y$......	7.05730 58189 88482
R.......	2827 26686
c.......	7.05730 61017 15168
b........	9.99999 97172 73314.

$\frac{1}{2}m$....	9.33675 43156 36
$\frac{1}{4}y^2$....	4.11461 16379 77
$\frac{1}{8}my^2$...	3.45136 59536
$\frac{3}{8}my^4$...	8482
R......	3.45136 68018.

Connaissant le module très petit c, et son complément b, on en déduira les termes suivans de l'échelle, comme il suit :

$\frac{1}{2}c$.....	6.75627 61060 51187
$(\frac{1}{2}c)^2$...	3.51255 22121 02374
$1:b$....	2827 26686
p......	3.51255 24948 29060
P......	—46
c°......	3.51255 24948 29014
$\frac{1}{2}c^\circ$....	3.21152 24991 65033
$(\frac{1}{2}c^\circ)^2$..	$\bar{6}$.42304 49983 30066
$1:b^\circ$...	23
$c^{\circ\circ}$.....	$\bar{6}$.42304 49983 30089.

p^2....	$\bar{7}$.02510 499
m....	9.63778 431
P.....	$\bar{6}$.66288 930
$\frac{1}{2}$P....	0.00000 00000 00023
b°....	9.99999 99999 99977
$\frac{\pi}{2}$.....	0.19611 98770 30152 6
$\sqrt{\frac{b^\circ}{b}}$..	0.00000 01413 63331 5
F^1c...	0.19612 00183 93484.

D'après l'article 163, cette valeur de $F'c$ doit satisfaire à l'équation... $F'c = \frac{(n+1)^2}{3\sqrt{3}} F' \sin 15°$, c'est ce qu'on vérifiera ainsi:

$n+1$....	0.35409 32673 80183
$(n+1)^2$...	0.70818 65347 60366
$\sqrt{27}$.....	0.71568 18820 79494
diff......	9.99250 46526 80872
$F' \sin 15°$..	0.20361 53657 1262
$F'c$......	0.19612 00183 93492.

Cette valeur s'accorderait avec la précédente jusque dans la 15^e^ décimale, si on eût pris $lF' \sin 15° = 0.20361\ 53657\ 12612$.

669. Pour trouver la fonction $E'c$, on a la formule réduite $E'c = \frac{b}{b^{02}} F'c\,(1-r)$, ou simplement $E'c = \frac{b}{b^{02}} F'c$,

b......	9.99999 97172 73314
$1:b^{02}$...	46
$F'c$....	0.19612 00183 93492
$E'c$.....	0.19611 97356 66852.

La fonction $F'b$ se calculera par les formules $h = \frac{1}{4} \log \frac{4}{c^{00}}$, $F'b = \ldots hM \sqrt{\frac{b^0}{b}}$.

4....	0.60205 99913 27962
c^{00}...	6.42304 49983 30089
$4h =$	14.17901. 49929 97873
$h =$	3.54475 37482 49468.

h.....	0.54958 60704 10184
M....	0.36221 56886 99463
$\sqrt{\frac{b^0}{b}}$	1413 63331
$F'b$...	0.91180 19004 72978
$F'c$...	0.19612 00183 93492
Diff...	0.71568 18820 79486.

La différence de ces deux logarithmes répond à très peu près à $\sqrt{27}$, et en effet on doit avoir exactement $F'b = 3\sqrt{3}.F'c$.

Il reste à calculer $E'b$ par les formules $E'b = \frac{1}{K}(1+A)$, $A = \frac{1}{2} c^2 K^{\frac{3}{2}} F'b$.

$\frac{1}{2}c^2$...	3.81358 22077 66355
K.....	1413 63332
$K^{\frac{1}{2}}$...	706 81666
F'b...	0.91180 19004 72978
A....	4.72538 43202 84331
m....	9.63778 43113
mA...	4.36316 86316
$\frac{1}{2}m$A..	11538
R.....	4.36316 74778.

$$R = L(1+A) = m(A - \tfrac{1}{2}A^2),$$
$$\log R = L(mA) - \tfrac{1}{2}mA.$$

1+A...	0.00000 23076 36915
K......	1413 63332
E'b.....	0.00000 21662 73583

Les valeurs de E'c, E'b pourront être vérifiées par les formules de l'art. 169:

$$E'c = \left(\frac{1}{2} + \frac{2n-1}{2\sqrt{3}}\right)F'c + \frac{\pi}{4F'b},$$
$$E'b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1-2n}{2\sqrt{3}}\right)F'b + \frac{\pi}{4F'c}.$$

et les résultats s'accorderont aussi exactement qu'on peut le désirer.

CHAPITRE II.

Construction et usage de la table des fonctions complètes.

670. **A**u moyen des méthodes précédentes on a calculé, pour toutes les valeurs de θ, de dixième en dixième de degré, les logarithmes des quatre fonctions F'c, F'b, E'c, E'b, approchés jusqu'à la quatorzième décimale. On a continué ainsi jusqu'à 15°; depuis 15° jusqu'à la limite 45°, on s'est borné à calculer ces logarithmes de demi-degré en demi-degré; on a ensuite interpolé les termes trouvés, en insérant quatre moyens entre deux termes consécutifs, de sorte que la table s'est trouvée construite dans son entier pour tous les dixièmes de degré de l'angle du module.

Quoique les logarithmes calculés directement doivent être en général exacts, au moins jusqu'à la treizième décimale inclusivement, on s'est contenté de marquer les différences comme si les fonctions F et E n'étaient calculées qu'avec 12 décimales. L'interpolation de 15° à 45° a été faite dans le même principe.

Les formules dont on s'est servi pour cette interpolation, sont assez connues; cependant nous les rapporterons ici, afin qu'on puisse plus facilement vérifier nos calculs.

671. La Table ayant été calculée pour chaque demi-degré, de 15 à 45 degrés, supposons que pour une valeur déterminée $\theta = \alpha$, le terme A représente log F^1 ou log E^1, avec ses différences successives, comme il suit :

$$\alpha \mid A \mid \delta A \mid \delta^2 A \mid \delta^3 A \mid \delta^4 A$$

Pour insérer quatre moyens entre deux termes consécutifs A, $A + \delta A$, qui répondent aux variables α, $\alpha + 1$, en prenant pour unité des variables un demi-degré, je forme d'abord les *différences moyennes* successives, savoir :

$$a' = \frac{2}{10}\delta A, \quad a'' = \frac{4}{100}\delta^2 A, \quad a''' = \frac{8}{1000}\delta^3 A, \quad a^{\text{iv}} = \frac{16}{10000}\delta^4 A;$$

désignant ensuite par dA, d^2A, d^3A, d^4A, les nouvelles différences de A qui auront lieu lorsqu'il y aura quatre moyens insérés entre A et $A + \delta A$, on aura les valeurs suivantes de ces différences :

$$\begin{aligned}
d^4A &= a^{\text{iv}}, \\
d^3A &= (a''' - 4a^{\text{iv}}) - 2a^{\text{iv}}, \\
d^2A &= a'' - 4(a''' - 4a^{\text{iv}}), \\
d\,A &= a' - a^{\text{iv}} - 2(d^2A + d^3A).
\end{aligned}$$

Connaissant les différences dA, d^2A, d^3A, d^4A, on formera sans difficulté les quatre termes qui suivent A, et le cinquième qui devra être le même que le terme connu $A + \delta A$, et qui servira ainsi à vérifier les calculs. Ces termes étant trouvés, on les terminera à la douzième décimale, en rejetant les deux autres, et on les insérera dans la Table formée de dixième en dixième de degré; on y joindra en même temps les différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes (s'il y a lieu) de ces nouveaux termes, lesquelles doivent s'accorder suivant une loi convenable, avec les différences précédentes; et si quelqu'anomalie s'y faisait remarquer, on en conclurait que dans le calcul d'interpolation il s'est glissé une erreur qu'il faut rectifier.

672. Je remarquerai que lorsque les différences quatrièmes $\delta^4 A$ sont assez grandes pour que les différences suivantes $\delta^5 A$ aient quelqu'influence dans les interpolations, il conviendra de prendre $\delta^4 A - \frac{7}{10}\delta^5 A$ au lieu

de $\delta^4 A$. En effet, les termes A et $A + \delta A$ étant censés répondre aux indices $x = 0$, $x = 1$, si on calcule le terme intermédiaire qui répond à l'indice x, la partie de ce terme due aux différences $\delta^4 A$, $\delta^5 A$, sera

$$\frac{x.x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4}\left(\delta^4 A + \frac{x-4}{5}\delta^5 A\right);$$

d'où l'on voit qu'on peut tenir compte des cinquièmes différences, en prenant $\delta^4 A + \frac{x-4}{5}\delta^5 A$ au lieu de $\delta^4 A$. Mais comme $\delta^5 A$ est censé très petit par rapport à $\delta^4 A$, si l'on donne à x une valeur moyenne $\frac{1}{2}$, le terme $\frac{x-4}{5}\delta^5 A$ se réduira à $-\frac{7}{10}\delta^5 A$; ainsi au lieu de $\delta^4 A$, on pourra prendre $\delta^4 A - \frac{7}{10}\delta^5 A$, ce qui sera suffisamment exact pour les valeurs de x qui répondent aux quatre moyens, savoir, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Ce moyen a été employé surtout pour les valeurs de $F^1 c$, depuis 45° jusqu'à 65°; passé 65° il a fallu tenir compte plus exactement des cinquièmes différences, ce qui a été pratiqué de la manière suivante.

673. On a fait d'abord le calcul entier de l'interpolation, en ayant égard seulement aux quatrièmes différences. Ensuite pour tenir compte des cinquièmes différences, et jusqu'à un certain point des sixièmes, on a ajouté des corrections aux différens moyens insérés, savoir,

Au 1er moyen... $+ \alpha' \left(\delta^5 A - \frac{3}{4}\delta^6 A\right)$, $\log \alpha' = 8.4071529$
Au 2e.......... $+ \alpha'' \left(\delta^5 A - \frac{3}{4}\delta^6 A\right)$, $\log \alpha'' = 8.4764258$
Au 3e.......... $+ \alpha''' \left(\delta^5 A - \frac{3}{4}\delta^6 A\right)$, $\log \alpha''' = 8.3584482$
Au 4e.......... $+ \alpha^{\text{iv}} \left(\delta^5 A - \frac{3}{4}\delta^6 A\right)$, $\log \alpha^{\text{iv}} = 8.0516926$

Dans ces expressions, la quantité $-\frac{3}{4}\delta^6 A$ est la valeur moyenne de $\frac{x-5}{6}\delta^6 A$, laquelle s'obtient en faisant $x = \frac{1}{2}$. Quant aux coefficiens α', α'', α''', α^{iv}, ce sont les valeurs de la quantité $\frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{1.2.3.4.5}$, lorsqu'on y fait successivement $x = \frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

674. Pour donner un exemple de ces interpolations, supposons qu'il s'agit d'insérer quatre moyens entre les deux valeurs de $\log F^1$ qui répondent aux angles $\theta = 57°5$ et $\theta = 58°0$.

La Table des valeurs de $\log F^1$, calculées de demi-degré en demi-degré, donne les résultats suivans pour le cas de $\theta = 57°5$:

θ	Log F^1.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
57°5	0.320 640 298 695	2 541 165 315	39 775 335	853 935	38 660	2 398	202

D'après ces données, les différences moyennes jusqu'au quatrième ordre, seront

$a' = 508\ 233\ 063.00$, $a'' = 1591\ 013.40$, $a''' = 6831.48$, $a^{\text{iv}} = 61.8656$;

on en tire par les formules précédentes,

$dA = 505\ 090\ 725.90$, $d^2A = 1564\ 677.33$, $d^3A = 6460.29$, $d^4A = 61.87$.

Au moyen de ces différences, on calculera les termes intermédiaires comme il suit :

θ.	A.	dA.	d^2A.	d^3A.	d^4A.
57.5	0.320 640 298 695.00	505 090 725.90	1 564 677.33	6 460.29	61.87
57.6	0.321 145 389 420.90	506 655 403.23	1 571 137.62	6 522.16	61.87
57.7	0.321 652 044 824.13	508 226 540.85	1 577 659.78	6 584.03	
57.8	0.322 160 271 364.98	509 804 200.63	1 584 243.81		
57.9	0.322 670 075 565.61	511 388 444.44			
58.0	0.323 181 464 010.05				

Pour calculer ensuite la correction due aux cinquièmes et sixièmes différences, on aura $\delta^5A - \frac{3}{4}\delta^6A = 2246\frac{1}{2}$, ce qui donnera les corrections à appliquer aux dernières figures des moyens insérés comme il suit :

	1er...	2e...	3e...	4e...
	420.90	824.13	364.98	565.61
Cor.	+ 57.37	+ 67.29	+ 51.33	+ 25.30
	478.27	891.42	416.31	590.91.

Les moyens ainsi corrigés sont, en supprimant les deux décimales, tels qu'on les voit dans la Table générale construite pour chaque dixième de degré.

675. Si on voulait aller plus loin et étendre la Table à tous les centièmes de degré, ce qui en rendrait les différences plus petites et l'usage beaucoup plus facile, il faudrait commencer par insérer un moyen entre deux termes consécutifs de la Table actuelle. On aurait ainsi une nouvelle Table calculée pour tous les demi-dixièmes de degré; il faudrait ensuite diviser chaque intervalle en cinq parties égales par quatre moyens, ce qui se ferait par les formules que nous avons rapportées. Ces interpolations cependant ne pourraient être pratiquées avec succès que jusqu'à 80 ou 85 degrés au plus; elles pourraient être prolongées plus loin pour $\log E^1$ que pour $\log F^1$ qui augmente rapidement vers la fin de la Table. Mais comme la Table sera toujours de peu d'usage dans cette extrémité, et qu'il est facile d'y suppléer par le calcul direct, on pourra laisser subsister la Table actuelle,

calculée pour chaque dixième de degré, dans la petite partie qui ne se prête pas facilement aux interpolations. L'inconvénient que nous remarquons ici dans la Table des log. des fonctions $F'b$, $E'b$, a lieu également, ou même à un plus haut degré, dans la simple Table des logarithmes des nombres, vers le commencement de cette Table, et jusqu'à une assez grande distance. Il a lieu également, et par la même raison, dans la Table des logarithmes-sinus, pour les petits arcs; et dans celle des logarithmes-tangentes, il se fait sentir tant pour les petits arcs que pour ceux qui diffèrent peu de 90°. Dans tous ces cas, les interpolations ne peuvent être faites avec sûreté, et il faut recourir à des moyens particuliers pour y suppléer.

676. Pour avoir le milieu entre deux termes consécutifs A, A1 d'une suite dont les différences deviennent progressivement plus petites qu'une quantité donnée, il est bon d'avoir recours aux termes qui précèdent et qui suivent les deux termes proposés. Supposons donc que la suite dont il s'agit soit représentée comme on voit ici :

$$\ldots A(-3),\ A(-2),\ A(-1),\ A,\ A1,\ A2,\ A3,\ \text{etc.};$$

et soit $A\frac{1}{2}$ le moyen cherché entre A et A1, on aura

$$A\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{A+A1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2A(-1)+\delta^2A}{8}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\delta^4A(-2)+\delta^4A(-1)}{32}$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\delta^6A(-3)+\delta^6A(-2)}{128}+\text{etc.}$$

Cette formule suit une loi très simple dont voici la démonstration.

Un terme quelconque $A\,(x)$ peut en général être représenté par.... $A\,(1+\delta)^x$, pourvu qu'après le développement de cette puissance, chaque terme $A\delta^n$ soit remplacé par δ^nA. Cela posé, on aura, suivant cette notation,

$$A\left(\tfrac{1}{2}\right)=A\,(1+\delta)^{\frac{1}{2}},$$
$$A+A1=A+A\,(1+\delta)=A\,(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+\delta)^{\frac{1}{2}}+(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}\right],$$
$$\delta^2A(-1)+\delta^2A=A\delta^2(1+\delta)^{-1}+A\delta^2=A\delta^2(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}\left[(1+\delta)^{\frac{1}{2}}+(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}\right],$$
$$\delta^4A(-2)+\delta^4A(-1)=A\delta^4(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}\left[(1+\delta)^{\frac{1}{2}}+(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}\right],$$
etc.

Si donc l'équation supposée a lieu, c'est-à-dire, si en général $A\left(\frac{x}{2}\right)$ est de la forme

$$\begin{aligned} A\left(\tfrac{1}{2}\right) = p\,(A + A1) &+ p'\,[\delta^2 A\,(-1) + \delta^2 A] \\ &+ p''\,[\delta^4 A\,(-2) + \delta^4 A\,(-1)] \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

p, p', p'', etc., étant des coefficiens constans; il faudra, en substituant les valeurs précédentes, qu'on ait l'équation identique

$$\frac{1}{(1+\delta)^{\frac{1}{2}} + (1+\delta)^{-\frac{1}{2}}} = p + p'\cdot\frac{\delta^2}{1+\delta} + p''\cdot\frac{\delta^4}{(1+\delta)^2} + p'''\cdot\frac{\delta^6}{(1+\delta)^3} + \text{etc.}$$

Soit $\frac{\delta^2}{1+\delta} = z$; si on élève au quarré le premier membre de cette équation, il deviendra $\frac{1+\delta}{4+4\delta+\delta^2} = \frac{1}{4+z}$; donc on doit avoir

$$\frac{1}{\sqrt{(4+z)}} = p + p'z + p''z^2 + p'''z^3 + \text{etc.};$$

or cette équation est satisfaite généralement au moyen des valeurs suivantes,

$$p = \tfrac{1}{2},\quad p' = -\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3,\quad p'' = \tfrac{1.3}{2.4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5,\quad p''' = -\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^7,\ \text{etc.}$$

Ces coefficiens donneront donc aussi la loi générale de l'expression de $A\left(\frac{1}{2}\right)$.

Au reste, cette expression sera toujours si convergente, qu'il suffira de prendre les deux premiers termes, ou tout au plus les trois premiers.

677. Veut-on, par exemple, calculer la valeur de log F' qui répond à l'angle du module $\theta = 61°\,05$? On prendra dans la Table les valeurs suivantes :

$A =$	0.339 295 030 747		
$A1 =$	0.339 859 136 462		
$s =$	0.679 154 177 209	$\frac{1}{2}s =$	0.339 577 088 604.5
$\delta^2 A\,(-1) =$	1 821 030		
$\delta^2 A =$	1 829 864		
$s' =$	3 650 894	$\frac{1}{16}s' = -$	228 180.9
$\delta^4 A\,(-2) =$	86		
$\delta^4 A\,(-1) =$	85		
$s'' =$	171	$\frac{3}{256}s'' = +$	2.0
Milieu cherché.....		$A\left(\frac{1}{2}\right) =$	0.339 576 860 425.6

678. Soit encore proposé pour exemple de trouver log F' pour l'angle

$\theta = 77° 25$; on fera le calcul d'après les élémens pris dans la Table ; comme il suit :

$$
\begin{array}{lrlr}
\text{A} \ldots\ldots\ldots & 0.464\ 973\ 191\ 062.35 & & \\
\text{A1} \ldots\ldots & \underline{0.466\ 078\ 604\ 921.92} & & \\
s = & 0.931\ 051\ 795\ 984.27 & \tfrac{1}{2}\, s = & 0.465\ 525\ 897\ 992.13 \\
\delta^{2} \text{A} (-1) \ldots & 6\ 555\ 790 & & \\
\delta^{2} \text{A} \ldots\ldots\ldots & \underline{6\ 643\ 169} & & \\
s' \ldots & 13\ 198\ 959 & \tfrac{1}{16}\, s' \ldots & -\ 824\ 934.94 \\
\delta^{4} \text{A} (-2) \ldots & 1\ 894 & & \\
\delta^{4} \text{A} (-1) \ldots & \underline{1\ 957} & & \\
s'' \ldots & 3\ 851 & \tfrac{3}{256}\, s'' \ldots & \underline{+\ 43.13} \\
 & \text{Milieu cherché} \ldots & \text{A} \left(\tfrac{1}{2}\right) = & 0.465\ 525\ 073\ 100.32
\end{array}
$$

679. Ayant expliqué la construction de la Table des fonctions complètes, et les moyens de l'étendre jusqu'aux centièmes de degré, ce qui serait un travail fort utile sans être bien considérable, il nous reste à montrer les usages de cette Table, c'est-à-dire à faire voir comment, pour une valeur donnée de l'angle θ, non comprise dans la Table, on trouvera les logarithmes des fonctions F^1 et E^1, approchés jusqu'à la douzième décimale ; et réciproquement, comment du logarithme donné d'une de ces fonctions, on déduirait l'angle du module θ, et le module lui-même c.

Et d'abord, si au lieu de donner l'angle θ, on donne le module c ou son complément b, il faudra en déduire l'angle correspondant θ avec toute la précision nécessaire, pour que les quantités négligées n'influent pas sur la douzième décimale de log F ou log E. Cet objet mérite un examen particulier.

Comme nous supposons toujours $c < b$, il sera plus exact de déterminer l'angle θ par le moyen de son sinus c que par le moyen de son cosinus b ; cela est vrai surtout si l'angle θ est d'un petit nombre de degrés, parce qu'alors une petite erreur sur cos θ en produit une assez grande sur θ. Ainsi en général si on donne à la fois log c et log b, il faudra déterminer l'angle θ par le moyen de log c.

Si l'on veut déterminer à dix décimales seulement, les fonctions F^1, E^1, en négligeant les deux de plus que donne la Table, il suffira de chercher l'angle θ par les Tables de Vlacq ou de Vega, et en ayant égard aux secondes différences. Ce calcul n'a pas besoin d'autre explication ; seulement après avoir trouvé l'angle θ en degrés, minutes et secondes, il faudra tout réduire en dixièmes de degré, et parties décimales du dixième de degré, puisque le dixième de degré doit servir d'unité dans les calculs d'interpolation.

680. Mais si on veut exprimer les logarithmes avec douze décimales, comme sont ceux de notre Table, alors l'angle θ ne peut plus se trouver avec une précision suffisante par des Tables à dix décimales, telles que celles de Vlacq ou de Vega.

Dans ce cas, il faudra employer les Tables de la *Trigonometria Britannica*, qui sont calculées pour chaque centième de degré avec quatorze décimales. Soit a l'angle de cette Table le plus approché de l'angle cherché θ, et soit

$$l\sin\theta = l\sin a + r.$$

De là il faut tirer la valeur de $\theta - a$. Or en regardant θ et r comme seules variables, on a $\frac{d\theta}{dr} = \mathrm{M}\tang\theta$, $\frac{dd\theta}{dr^2} = \frac{\mathrm{M}}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = \frac{\mathrm{M}^2\sin\theta}{\cos^3\theta}$, ... $\frac{d^3\theta}{dr^3} = \frac{\mathrm{M}^2(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)}{\cos^4\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = \frac{\mathrm{M}^3(1 + 2\sin^2\theta)}{\cos^4\theta}\tang\theta$; faisant ensuite dans ces coefficiens $\theta = a$, on aura par la formule de Taylor,

$$\theta = a + \mathrm{M}r\tang a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}r}{\cos^2 a} + \frac{1 + 2\sin^2 a}{2.3}\cdot\frac{\mathrm{M}^2r^2}{\cos^4 a} + \text{etc.}\right).$$

Et pour évaluer θ en degrés, soit $\theta = a + x$, et R° le nombre de degrés compris dans le rayon, on aura

$$\mathrm{R}^\circ x = \mathrm{R}^\circ\mathrm{M}r\tang a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}r}{\cos^2 a} + \frac{1 + 2\sin^2 a}{2.3}\cdot\frac{\mathrm{M}^2r^2}{\cos^4 a} + \text{etc.}\right).$$

Cette formule se réduira le plus souvent à ses deux premiers termes, et alors le calcul en sera très facile. Quelquefois la différence r sera assez grande pour qu'il faille tenir compte du troisième terme; mais pour avoir besoin du quatrième, il faudrait que a fût très petit, et alors il y a uu autre moyen de déduire l'arc de son sinus.

681. Il conviendra dans ce cas d'employer la formule

$$\log\theta = \log\sin\theta + \frac{m}{6}\sin^2\theta + \frac{11m}{180}\sin^4\theta + \frac{191m}{5670}\sin^6\theta + \text{etc.},$$

ou, en convenant que les nombres renfermés en parenthèses sont les logarithmes des coefficiens,

$$\begin{aligned}\log\theta = \log\sin\theta &+ \sin^2\theta\,[\,8.85963\ 30609\,]\\ &+ \sin^4\theta\,[\,8.42390\ 450\,]\\ &+ \sin^6\theta\,[\,8.16523\ 46\,] + \text{etc.},\end{aligned}$$

et pour que θ soit exprimé en degrés, il faudra ajouter à ce logarithme la constante $1.75812\ 26324$, qui est le logarithme de R° ou de $\frac{180}{\pi}$.

Il faut maintenant montrer par quelques exemples, l'usage de ces formules.

682. *Exemple I.* Étant donné le module $c = \sin\theta = \sqrt{2} - 1$, dont le logarithme $= 9.61722\ 43146\ 6214$, on demande l'angle correspondant θ exprimé en degrés et parties décimales de degré.

Par la *Trigon. Britan.*, on trouve l'angle approché $a = 24°\,47$, qui donne

$$\begin{array}{rl} l \sin a = & 9.61922\ 76371\ 2662 \\ l \sin \theta = & \ \underline{43146\ 6214} \\ r = - & \ 33224\ 6448. \end{array}$$

Il faudra ensuite calculer les différens termes de la valeur de x, d'après la formule de l'art. 680. Voici ce calcul :

$$\begin{array}{rlrl} r\ldots & 4.52146\ 03467 & & \\ \text{M}\ldots & \underline{0.36221\ 56887} & & \\ \text{M}r\ldots & 4.88367\ 60354\ldots\ldots\ldots\ldots & & 4.88367\ 60 \\ \text{R}°\ldots & 1.75812\ 26324 & \cos^2 a\ldots\ldots & \underline{9.91825\ 29} \\ \text{tang}\,a\ldots & \underline{9.65810\ 11701} & & 4.96542\ 31 \\ 1)\ldots & 6.29989\ 98379 & 2\ldots & \underline{0.30103\ 00} \\ & & & 4.66439\ 31 \\ & & 1)\ldots & \underline{6.29989\ 98} \\ & & 2)\ldots & 0.96429\ 29 \end{array}$$

On voit par la petitesse du second terme 2) de la valeur de x, qu'il est inutile d'avoir égard au troisième; ainsi des deux premiers on conclura la valeur de θ comme il suit :

$$\begin{array}{rl} a\ldots & 24°\,47000\ 00000\ 000 \\ 1) - & 0.00019\ 94802\ 197 \\ 2) + & \underline{\ 9\ 217} \\ \theta = & 24.46980\ 05207\ 020. \end{array}$$

Cette valeur de θ est plus exacte qu'il ne faut pour que l'interpolation de la Table donne douze décimales exactes.

On aurait trouvé la même valeur de θ par la simple interpolation de la *Trigon. Britan.*, en ayant égard aux secondes différences.

683. Connaissant la valeur de θ, si l'on veut avoir la valeur correspondante de $\log F'$, on prendra dans notre Table les données suivantes qui répondent à l'angle $\alpha = 24° 4$.

a	A	δA.	δ^2A.	δ^3A.	δ^4A.
24.4	0.216 198 561 343	168 272 307	745 715	768	5

et on aura à calculer la formule suivante dans laquelle............ $x = 0.69800\ 52070\ 2$,

$$A(x) = A + x\left(\delta A - \frac{1-x}{2}\left(\delta^2 A - \frac{2-x}{3}\left(\delta^3 A - \frac{3-x}{4}\delta^4 A.\right.\right.\right.$$

Pour calculer cette formule je fais successivement

$$\delta^3 Ax = \delta^3 A - \frac{3-x}{4}\delta^4 A, \qquad \frac{3-x}{4} = 0.57,$$
$$\delta^2 Ax = \delta^2 A - \frac{2-x}{3}\delta^3 Ax, \qquad \frac{2-x}{3} = 0.434\ 0,$$
$$\delta Ax = \delta A - \frac{1-x}{2}\delta^2 Ax, \qquad \frac{1-x}{2} = 0.150\ 997\ 4.$$
$$A(x) = A + x\delta Ax,$$

d'où résulte

$$\begin{array}{rr}
\delta^3 Ax = & 765.1 \\
\delta^2 Ax = & 745\ 383.0 \\
\delta\, Ax = & 168\ 159\ 756.1 \\
A = & 0.216\ 198\ 561\ 348 \\
x\delta Ax\ldots & 117\ 376\ 385.4 \\
\hline
A(x) = & 0.216\ 315\ 937\ 728.4 = \log F',
\end{array}$$

valeur qui s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée cidessus, n° 663.

La notation dont nous nous sommes servi dans cet exemple, exprime en général les différences corrigées successives δAx, $\delta^2 Ax$, $\delta^3 Ax$, etc., qui, dans chaque ordre, permettent de négliger les différences des ordres ultérieurs. On a donc exactement d'après cette notation

$$A(x) = A + x\delta Ax,$$
$$A(x) = A + x\delta A + \frac{x.x-1}{2}\,\delta^2 Ax,$$
$$A(x) = A + x\delta A + \frac{x.x-1}{2}\,\delta^2 A + \frac{x.x-1.x-2}{2.3}\,\delta^3 Ax.$$
etc.

684. *Ex. II.* Étant donné log c ou log sin $\theta = 8.55535\ 52881\ 1312$, on demande l'angle θ exprimé en degrés et parties décimales de degré.

On peut encore trouver cet angle d'une manière suffisamment approchée par la Table de la *Trig. Brit.*; on a d'abord $a = 2°06$,

$$\begin{aligned} \log \sin a &= 8.55565\ 10170\ 2887 \\ \log \sin \theta &= 8.55535\ 52881\ 1312 \\ r &= -\quad 29\ 57289\ 1575 \end{aligned}$$

On fera ensuite le calcul de la formule de l'art. 680, comme il suit :

r....	6.47089 37910				
M...	0.36221 56887				
Mr...	6.83310 94797	....	6.83310 948		
tang a	8.55593 17782	$\cos^2 a$..	9.99943 848		
R°...	1.75812 26324	$\frac{Mr}{\cos^2 a}$.	6.83367 100	$q = \frac{1+2\sin^2 a}{3}$	$= 0.3342$
(1)...	7.14716 38903		0.30103 000	q........	9.52400 6
a....	6.53264 100	a...	6.53264 100	$\frac{Mr}{\cos^2 a}$.....	6.83367 1
(2)...	3.67980 489			b........	6.35767 7
b....	6.35767 7				
(3)..	0.03748 2				

$$\begin{aligned} a + (2)\ldots &\ 2°06000\ 04784\ 150 \\ (1) - &\qquad\ \ 140\ 33431\ 862 \\ (3) - &\qquad\qquad\qquad\ \ 1\ 090 \\ \theta = &\ 2.05859\ 71351\ 198 \end{aligned}$$

D'après cette valeur de θ, nous chercherons par interpolation la valeur de log F'; pour cela nous prendrons dans la Table les nombres suivans correspondans à 2°0.

$$\begin{aligned} A &= 0.196\ 252\ 187\ 490.54, & \delta A &= 13\ 563\ 720, \\ \delta^2 A &= 662\ 025, & \delta^3 A &= 54, \\ \delta^4 A &= 2 \end{aligned}$$

Cela posé il faut faire $x = 0.58597\ 13512$, et on aura

$$\begin{array}{rlr}
\delta^3 Ax = & 52.8 \\
\delta^2 Ax = & 662\ 000.1 \\
\delta Ax = & 13\ 426\ 676.5 \\
x\delta Ax = & 7\ 867\ 647.8 \\
A = & 0.196\ 252\ 187\ 490.5 \\
\hline
\log F^1 c = & 0.196\ 260\ 055\ 138.3.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\frac{3-x}{4}\delta^4 A & 1.2 \\
\frac{2-x}{3}\delta^3 Ax & 24.9 \\
\frac{1-x}{2}\delta^2 Ax = & 137\ 043.5
\end{array}$$

Cette valeur s'accorde dans les douze premières décimales avec celle que nous avons trouvée directement, n° 667. De là on voit que l'interpolation, même pour des angles assez petits, donne des résultats suffisamment exacts.

En général, dès qu'on aura déterminé l'angle θ avec une précision suffisante, soit par la formule de l'art. 680, soit par celle de l'art. 681, l'interpolation de la Table des fonctions complètes ne souffrira de difficulté que vers la fin de la Table, lorsque l'angle du module est très près de l'angle droit. On peut y suppléer alors par les formules directes dont le calcul est d'autant plus facile que l'angle du module est moins différent de l'angle droit. Mais si on veut résoudre le cas dont il s'agit par des interpolations qui ne soient sujettes à aucune difficulté, on y parviendra par le moyen que nous allons exposer.

685. Il s'agit en général de trouver les logarithmes des fonctions $F^1 b$, $E^1 b$, lorsque b diffère peu de l'unité ou lorsque son complément c est le sinus d'un angle d'un petit nombre de degrés. Dans ce cas on trouvera aisément, par les interpolations, les fonctions complémentaires $F^1 c$, $E^1 c$, et c'est par le moyen de $F^1 c$ qu'il faut déterminer $F^1 b$ et $E^1 b$.

Pour cela j'observe d'abord que dans le cas dont nous nous occupons, on pourrait supposer $b^{oo} = 1$; mais nous nous contenterons de supposer $b^{ooo} = 1$, afin que la solution s'applique à un plus grand nombre de cas; alors les formules générales donnent (art. 654).

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^o b^{oo}}{b}\right)}, \quad F^1 c = \tfrac{1}{2}\pi K, \quad F^1 b = \frac{KM}{8}\log\frac{4}{c^{ooo}}.$$

Il faut donc chercher si l'on peut exprimer $F^1 b$ par les seules données b, c, $F^1 c$, sans avoir recours aux auxiliaires b^o, b^{oo}, c^{ooo}.

D'abord K est connu par la valeur $K = \frac{F^1 c}{\frac{1}{2}\pi}$. Soit ensuite $c^o = x, \ldots$ $c^{oo} = y$; des équations $bK^2 = b^o b^{oo}$, $cb^o = 2\sqrt{(bc^o)}$, $c^o b^{oo} = 2\sqrt{(b^o c^{oo})}$,

$c^{oo} = 2\sqrt{(b^{oo}c^{ooo})}$, on déduira

$$b^{o} = \frac{2\sqrt{bx}}{c},\quad b^{oo} = \frac{bK^2}{b^{o}} = \tfrac{1}{2}\, cK^2\sqrt{\left(\frac{b}{x}\right)},$$

$$c^{o}b^{oo} = \tfrac{1}{2}K^2 c\sqrt{bx} = 2\sqrt{b^{o}y}.$$

Cette dernière étant quarrée donne $K^4c^2bx = 16b^{o}y$; quarrant de nouveau et substituant la valeur de b^{o}, on aura $K^8c^4b^2x^2 = y^2.\frac{4bx}{c^2}$; donc $y^2 = \frac{K^8c^6}{4^5}\,bx$. Cette équation ne suffit pas pour déterminer x et y; mais on a d'ailleurs $b^{oo} = (1-y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{K^2c}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$; de là on tire

$$x = \frac{\frac{1}{4}\,bK^4c^2}{1-y^2} = \tfrac{1}{4}\,bK^4c^2\,(b^{oo})^{-2},$$

$$y = \frac{K^6c^4b}{2^6}(b^{oo})^{-1}.$$

Soit $K^2b = \alpha^4$, cette dernière équation donnera $\frac{4}{y} = \left(\frac{4}{cK\alpha}\right)^4 b^{oo}$; mais $\frac{4}{c^{ooo}} = \left(\frac{4}{c^{oo}}\right)^2 b^{oo} = \left(\frac{4}{y}\right)^2 b^{oo} = \left(\frac{4}{cK\alpha}\right)^8 (b^{oo})^3$; donc

$$F'b = MK\log\left[\frac{4}{cK\alpha}(b^{oo})^{\frac{3}{8}}\right].$$

Soit $\beta = \left(\frac{1}{b^{oo}}\right)^{\frac{3}{8}}$, et on aura enfin

$$F'b = MK\log\left(\frac{4}{cK\alpha\beta}\right)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} \alpha = \sqrt[4]{(K^2b)},\\ \log\beta = \frac{3}{8}\log\frac{1}{b^{oo}} = \frac{3}{4}M\left(\log\frac{1}{\alpha}\right)^2. \end{array}\right.$$

Ainsi on voit que dans le calcul de $\log F'b$, il n'entre que les quantités b, c, K, dont on a les logarithmes, de sorte qu'on évite ainsi l'interpolation directe pour $F'b$, laquelle est ramenée à l'interpolation de $F'c$ qui n'a point de difficulté.

686. Pour juger de l'exactitude de cette formule, nous prendrons .... $c = \sin 15°$, et nous donnerons à $\log K$ la valeur exacte jusqu'à quatorze décimales, qu'on trouve par le calcul direct, et que d'ailleurs la Table donne immédiatement. On aura donc les données

c...	9.41299 62305 6934
b...	9.98494 37781 0270
K...	0.00749 54886 8247.

Au moyen de ces données, le calcul de $h = \frac{1}{8}\log\frac{4}{c^{ooo}}$ se fera comme il suit :

$4\ldots$	0.60205 99913 2796
$c\ldots$	9.51299 62305 6934
$\frac{4}{c}\ldots$	1.18906 37607 5862
$K\ldots$	0.00749 54886 8247
$\frac{4}{cK}\ldots$	1.18156 82720 7615
$\alpha\ldots$	9.99998 36888 6691
$\frac{4}{cK\alpha}\ldots$	1.18158 45832 0924
$\mathfrak{C}\ldots$	4 5946
$h\ldots$	1.18158 45827 4978.

$\sqrt{b}\ldots$	9.99247 18890 5135
$K\ldots$	749 54886 8247
$\alpha^2\ldots$	9.99996 73777 3382
$\alpha\ldots$	9.99998 36888 6691

$$\log\frac{1}{\alpha} = 0.00001\ 63111\ 3309 = p$$

$$\log \mathfrak{C} = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{M}p^2$$

$p\ldots$	5.21248 413
$p^2\ldots$	0.42496 826
$\frac{3}{4}M\ldots$	0.23727 695
$l\mathfrak{C}\ldots$	0.66224 52

Cette valeur de h s'accorde exactement avec celle que donnerait... $\frac{1}{8}\log\frac{4}{c^{ooo}}$, calculée par la méthode directe, jusqu'à la quatorzième décimale. Ainsi en la substituant dans la formule $F^1b = KMh$, on aura de même une valeur de log F^1b exacte, jusqu'à la quatorzième décimale, et qui satisfera à l'équation $F^1b = \sqrt{3}.F^1c$, exprimant une propriété particulière de ces fonctions.

687. Si notre formule donne des résultats aussi exacts que la méthode directe lorsque l'angle du module est de 15°, à plus forte raison aura-t-elle cet avantage lorsque l'angle du module sera moindre; en général le degré d'approximation avec lequel F^1b sera déterminé, dépendra de celui avec lequel on connaît la quantité K; et comme K peut toujours, par l'interpolation des fonctions F^1c, être déterminé jusqu'à la douzième décimale, il s'ensuit que h et par conséquent lF^1b sera déterminé avec la même exactitude.

Connaissant F^1c, E^1c par l'interpolation directe, F^1b par le calcul précédent, il restera à déterminer E^1b, ce qu'on pourra toujours faire par l'équation des complémens $\frac{\pi}{2} = F^1cE^1b + F^1bE^1c - F^1bF^1c$. Ainsi on a les moyens de suppléer à l'interpolation qui ne peut se pratiquer que difficilement dans les dernières colonnes de la Table.

Il est remarquable que la valeur $h = \log\frac{4}{cK\alpha\mathfrak{C}}$ offre successivement les différentes opérations à faire suivant les différens cas indiqués dans l'art. 645.

Ainsi dans le cinquième cas, si c est tellement petit qu'on puisse négliger $1-b$ ou $\log b$, on aura simplement $h=\log\frac{4}{c}$; dans le quatrième cas, où $1-b^{\circ}$ seulement est négligeable, on aura $h=\log\frac{4}{cK}$; dans le troisième cas, où l'on ne peut négliger que $1-b^{\circ\circ}$, il faut un facteur de plus dans la valeur de h, et on a $h=\log\frac{4}{cK\alpha}$; enfin si on tombe dans le second cas, où $1-b^{\circ\circ\circ}$ seulement peut être négligé, il faudra encore ajouter le facteur $\mathcal{C}$, et on aura $h=\log\frac{4}{cK\alpha\mathcal{C}}$.

CHAPITRE III.

Méthodes générales pour former une Table des valeurs de l'intégrale $U=\int u d\varphi$.

688. Nous supposerons que u est une fonction donnée de la variable φ, et que cette fonction est telle qu'en faisant varier φ d'une quantité constante α, les différences successives de la fonction u diminuent continuellement et finissent par être entièrement négligeables. On peut toujours prendre α assez petit pour que cette supposition soit admissible, quelle que soit la fonction u, pourvu qu'elle reste toujours finie dans toute l'étendue des valeurs de φ que l'on considère; et la différence α pourra être fixée dans chaque cas particulier, suivant le degré d'approximation avec lequel on veut exprimer les fonctions U.

Nous désignerons par U, U′, U″, etc., les fonctions qui répondent aux variables croissantes φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+2\alpha$, etc.; et semblablement nous désignerons par U, U°, $U^{\circ\circ}$, etc., les fonctions qui répondent aux variables décroissantes φ, $\varphi-\alpha$, $\varphi-2\alpha$, etc. Cela posé, la Table qu'il s'agit de construire pour la fonction U et ses différences successives, pourra être représentée, dans l'une quelconque de ses parties, comme il suit :

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	III.	IV.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\varphi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^3 U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^4 U^{\circ\circ\circ}$
$\varphi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ}$	$\delta^3 U^{\circ\circ}$	$\delta^4 U^{\circ\circ}$
$\varphi - \alpha$	U°	δU°	$\delta^2 U^{\circ}$	$\delta^3 U^{\circ}$	$\delta^4 U^{\circ}$
φ	U	δU	$\delta^2 U$	$\delta^3 U$	$\delta^4 U$
$\varphi + \alpha$	U'	$\delta U'$	$\delta^2 U'$	$\delta^3 U'$	$\delta^4 U'$
$\varphi + 2\alpha$	U''	$\delta U''$	$\delta^2 U''$	$\delta^3 U''$	$\delta^4 U''$
$\varphi + 3\alpha$	U'''	$\delta U'''$	$\delta^2 U'''$	$\delta^3 U'''$	$\delta^4 U'''$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La première colonne contient les valeurs de φ, formant une progression arithmétique dont la différence est α; la seconde colonne est celle des valeurs correspondantes des fonctions U. On a placé sur la même ligne que φ et U, les différences successives δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc.; et par cette disposition, chaque ligne sert à former la ligne inférieure, au moyen de la loi connue $U' = U + \delta U$, $\delta U' = \delta U + \delta^2 U$, $\delta^2 U' = \delta^2 U + \delta^3 U$, etc.

Il s'agit maintenant de faire voir comment, étant donnée la fonction u, on peut calculer les différences successives qui servent à former la Table des valeurs de U. Pour cela nous ferons usage d'un algorithme qui a l'avantage de conduire rapidement aux résultats que nous voulons exposer, et qui a surtout celui d'en faire connaître la loi de la manière la plus simple et la plus générale. Cette notation, au reste, qui ne s'applique qu'aux sommes et aux différences, considérées dans leurs combinaisons linéaires seulement, est fondée sur les mêmes principes que celle qui a été indiquée par Lagrange dans les Mémoires de Berlin, ann. 1772, et qui a été depuis reproduite sous beaucoup d'autres formes par différens auteurs.

689. On a immédiatement, par la formule de Taylor,

$$U' = U + \alpha . \frac{dU}{d\varphi} + \frac{\alpha^2}{2} . \frac{ddU}{d\varphi^2} + \frac{\alpha^3}{2.3} . \frac{d^3U}{d\varphi^3} + \text{etc.};$$

et puisque les coefficiens de cette formule sont les mêmes que ceux de l'exponentielle

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2.3} x^3 + \text{etc.},$$

il s'ensuit qu'on peut mettre U' sous la forme

$$U' = Ue^{\alpha d},$$

pourvu qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de αd, on convienne que chaque terme $U\alpha^m d^m$ sera remplacé par $\alpha^m . \frac{d^m U}{d\varphi^m}$.

Dans cette hypothèse, on aura successivement

$$U' = Ue^{\alpha d}, \quad U'' = U'e^{\alpha d}, \quad U''' = U''e^{\alpha d}, \quad \text{etc.};$$

de là résultent les différences premières,

$$\begin{aligned} \delta U\ &= U\,(e^{\alpha d} - 1), \\ \delta U' &= U'(e^{\alpha d} - 1), \\ \delta U'' &= U''(e^{\alpha d} - 1), \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

celles-ci donnent les différences secondes,

$$\begin{aligned} \delta^2 U\ &= \delta U\,(e^{\alpha d} - 1) = U\,(e^{\alpha d} - 1)^2, \\ \delta^2 U' &= \delta U'(e^{\alpha d} - 1) = U'(e^{\alpha d} - 1)^2, \\ \delta^2 U'' &= \delta U''(e^{\alpha d} - 1) = U''(e^{\alpha d} - 1)^2, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

et en général on aura

$$\delta^n U = U\,(e^{\alpha d} - 1)^n.$$

Au moyen de cette formule, la différence finie d'un ordre quelconque de la fonction U peut s'exprimer par les coefficiens différentiels de cette même fonction. En effet si on suppose

$$(e^x - 1)^n = x^n\,(1 + A^{\mathrm{I}}x + A^{\mathrm{II}}x^2 + A^{\mathrm{III}}x^3 + \text{etc.}),$$

on aura en même temps

$$\delta^n U = \alpha^n . \frac{d^n U}{d\varphi^n} + A^{\mathrm{I}}\alpha^{n+1} . \frac{d^{n+1} U}{d\varphi^{n+1}} + A^{\mathrm{II}}\alpha^{n+2} . \frac{d^{n+2} U}{d\varphi^{n+2}} + \text{etc.}$$

690. Réciproquement on peut exprimer les coefficiens différentiels $\frac{dU}{d\varphi}$, $\frac{d^2U}{d\varphi^2}$, $\frac{d^3U}{d\varphi^3}$, etc., d'une fonction U, par le moyen des différences finies de cette fonction, prises en donnant à la variable φ l'accroissement constant α.

Pour cela je réduis l'équation symbolique $\delta U = U\,(e^{\alpha d} - 1)$ à la forme

$$\delta = e^{\alpha d} - 1;$$

j'en tire

$$\alpha d = \log\,(1 + \delta),$$

et $\alpha U d$ ou

$$\alpha . \frac{dU}{d\varphi} = U \log\,(1 + \delta).$$

Cette nouvelle équation suppose qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de δ, chaque terme $U\delta^m$ sera remplacé par la différence $\delta^m U$; on obtiendra ainsi

$$\alpha \frac{dU}{d\varphi} = \delta U - \tfrac{1}{2}\delta^2 U + \tfrac{1}{3}\delta^3 U - \tfrac{1}{4}\delta^4 U + \text{etc.}$$

C'est la formule connue qui sert à exprimer le coefficient différentiel d'une fonction par les différences successives de cette fonction. Ainsi α étant assez petit pour que la suite des différences δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., soit très convergente, on déterminera le coefficient $\frac{dU}{d\varphi}$ avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

691. Si dans l'équation symbolique $\alpha \frac{dU}{d\varphi} = U \log(1+\delta)$, on met $\frac{dU}{d\varphi}$ à la place de U, on aura

$$\alpha \frac{ddU}{d\varphi^2} = \frac{dU}{d\varphi}\, l(1+\delta),$$

d'où résulte

$$\alpha^2 \frac{ddU}{d\varphi^2} = U\, l^2(1+\delta).$$

On aurait de même $\alpha^3 \frac{d^3U}{d\varphi^3} = U\, l^3(1+\delta)$, et en général,

$$\alpha^n \frac{d^nU}{d\varphi^n} = U\, l^n(1+\delta);$$

de sorte qu'un coefficient différentiel quelconque $\frac{d^nU}{d\varphi^n}$ peut s'exprimer facilement par les différences finies de la fonction U, en supposant connu le développement de $l^n(1+x)$, qui désigne la puissance n de $l(1+x)$.

En effet si l'on a $l^n(1+x)$ ou

$$x^n(1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \text{etc.})^n = x^n(1 - N^{\text{I}}x + N^{\text{II}}x^2 - N^{\text{III}}x^3 + \text{etc.}),$$

on pourra en conclure

$$\alpha^n \frac{d^nU}{d\varphi^n} = \delta^n U - N^{\text{I}}\delta^{n+1}U + N^{\text{II}}\delta^{n+2}U - \text{etc.}$$

692. Supposons maintenant qu'on ait $U = \int u\,d\varphi$ ou $\frac{dU}{d\varphi} = u$, la valeur de αu exprimée par les différences successives δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., sera

$$\alpha u = \delta U - \tfrac{1}{2}\delta^2 U + \tfrac{1}{3}\delta^3 U - \text{etc.}$$

Dans le cas où l'on veut construire une Table des valeurs de U, la quantité u est connue pour chaque valeur de φ, et en faisant varier φ de

α, on connaîtra les différences successives de u. D'après ces différences, il sera possible de déterminer en général la valeur de δU.

En effet, soit $\alpha u = p$ et $\frac{x}{l(1+x)}$ ou

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\text{etc.}} = 1 + k'x + k''x^2 + k'''x^3 + \text{etc.},$$

l'équation précédente donnera

$$\delta U = p + k'\delta p + k''\delta^2 p + k'''\delta^3 p + \text{etc.}$$

Ainsi δu se déduit des quantités données p, δp, $\delta^2 p$, etc., par une suite dont la loi est connue.

Cette même suite donnerait les différences ultérieures $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., par les formules

$$\delta^2 U = \delta p + k'\delta^2 p + k''\delta^3 p + \text{etc.},$$
$$\delta^3 U = \delta^2 p + k'\delta^3 p + \text{etc.}$$

Mais ces suites, pour déterminer δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., peuvent être rendues plus convergentes par un moyen très simple.

693. Soit v ce que devient la fonction u, lorsque au lieu de φ on met $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$; on aura suivant la notation précédente,

$$v = u(1+\delta)^{\frac{1}{2}},$$

pourvu qu'après avoir fait le développement du second membre suivant les puissances de δ, on remplace chaque terme $u\delta^m$ par $\frac{\delta^m u}{d\varphi^m}$.

De là résulte $\alpha v = \alpha u\,(1+\delta)^{\frac{1}{2}}$, et parce que $\alpha u = Ul(1+\delta)$, on aura

$$\alpha v = U(1+\delta)^{\frac{1}{2}}\, l(1+\delta).$$

Mais en effectuant le développement jusqu'aux x^6, on a

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} l(1+x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{71}{1920}x^5 + \frac{31}{960}x^6 - \text{etc.};$$

donc

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{24}\delta^3 U + \frac{1}{24}\delta^4 U - \frac{71}{1920}\delta^5 U + \frac{31}{960}\delta^6 U - \text{etc.}$$

Conservons le premier terme δU de ce développement, mais substituons dans les termes suivans la valeur $U = U^\circ + \delta U^\circ$, nous aurons

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{24}\delta^3 U^\circ + \frac{3}{640}\delta^5 U^\circ - \frac{3}{640}\delta^6 U^\circ + \text{etc.}$$

Dans cette suite, conservons les deux premiers termes $\delta U - \frac{1}{24}\delta^3 U^\circ$, et substituons dans les suivans $U^{\circ\circ} + \delta U^{\circ\circ}$ à la place de U°, nous aurons de nouveau

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{24}\delta^3 U^\circ + \frac{3}{640}\delta^5 U^{\circ\circ} - \text{etc.}$$

Cette suite prend ainsi une forme très convergente, mais il reste à s'assurer de la loi que paraissent indiquer les premiers termes, et à déterminer d'une manière générale celle de leurs coefficiens. Il faut donc faire voir qu'au moyen des coefficiens n', n'', n''', etc., dont la loi sera déterminée, on aura généralement

$$\alpha v = \delta U - n'\delta^3 U^\circ + n''\delta^5 U^{\circ\circ} - n'''\delta^7 U^{\circ\circ\circ} + \text{etc.}$$

694. Reprenons pour cet effet l'équation symbolique $\alpha\frac{dU}{d\varphi} = Ul(1+\delta)$ ou $\alpha u = Ul(1+\delta)$, on en tire

$$\delta U = \frac{\alpha u\delta}{l(1+\delta)}, \quad \delta^2 U = \frac{\alpha u\delta^2}{l(1+\delta)}, \quad \delta^3 U = \frac{\alpha u\delta^3}{l(1+\delta)}, \quad \text{etc.}$$

Mais d'un autre côté on a

$$U^\circ = \frac{U}{1+\delta}, \quad U^{\circ\circ} = \frac{U}{(1+\delta)^2}, \quad U^{\circ\circ\circ} = \frac{U}{(1+\delta)^3}, \quad \text{etc.};$$

donc

$$\begin{aligned}
\delta U &= \frac{\alpha u\delta}{l(1+\delta)},\\
\delta^3 U^\circ &= \frac{\alpha u\delta^3}{(1+\delta)\,l(1+\delta)},\\
\delta^5 U^{\circ\circ} &= \frac{\alpha u\delta^5}{(1+\delta)^2\,l(1+\delta)}\\
\delta^7 U^{\circ\circ\circ} &= \frac{\alpha u\delta^7}{(1+\delta)^3\,l(1+\delta)},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

De là on voit que la suite $\delta U - n'\delta^3 U^\circ + n''\delta^5 U^{\circ\circ} - \text{etc.}$, est représentée par

$$\frac{\alpha u\delta}{l(1+\delta)} - n'.\frac{\alpha u\delta^3}{(1+\delta)\,l(1+\delta)} + n''.\frac{\alpha u\delta^5}{(1+\delta)^2\,l(1+\delta)} - n'''.\frac{\alpha u\delta^7}{(1+\delta)^3\,l(1+\delta)} + \text{etc.}$$

Si donc on veut que cette suite soit équivalente à αv qui est représenté par $\alpha u(1+\delta)^{\frac{1}{2}}$, il faudra qu'on ait l'équation identique

$$l(1+\delta) = \frac{\delta}{(1+\delta)^{\frac{1}{2}}} - n'.\frac{\delta^3}{(1+\delta)^{\frac{3}{2}}} + n''.\frac{\delta^5}{(1+\delta)^{\frac{5}{2}}} - n'''.\frac{\delta^7}{(1+\delta)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}$$

Soit $\frac{\delta^2}{1+\delta} = z^2$, le second membre devient $z - n'z^3 + n''z^5 -$ etc., et le premier se réduit à $2l\,[\frac{1}{2}z + \sqrt{(1+\frac{1}{4}z^2)}]$. Or on sait que

$$\log[x + \sqrt{(1+xx)}] = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

et qu'ainsi la quantité $2\log[\frac{1}{2}z + \sqrt{(1+\frac{1}{4}z^2)}]$ se développe en cette suite,

$$z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3.2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{5.2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7.2^6} + \text{etc.};$$

donc l'équation supposée a effectivement lieu en donnant aux coefficiens n', n'', n''', etc., les valeurs

$$n' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^2},\quad n'' = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^4},\quad n''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7.2^6},\quad \text{etc.},$$

donc on a en général,

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^3 U^{\circ}}{3.2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\delta^5 U^{\circ\circ}}{5.2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\delta^7 U^{\circ\circ\circ}}{7.2^6} + \text{etc.},$$

série qui procède suivant une loi évidente, et dans laquelle chaque coefficient est moindre que le quart du précédent.

695. Si on fait $\alpha v = P$, et qu'on désigne par P°, $P^{\circ\circ}$, etc., ce que devient la fonction P lorsqu'au lieu de φ on met $\varphi - \alpha$, $\varphi - 2\alpha$, etc., on déduira de l'équation précédente une valeur de δU de la forme

$$\delta U = P + m'\delta^2 P^{\circ} + m''\delta^4 P^{\circ\circ} + m'''\delta^6 P^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

et les coefficiens m', m'', m''', etc., se déduiront des coefficiens n', n'', n''', etc., au moyen du développement de la fraction

$$\frac{1}{1 - n'x + n''x^2 - n'''x^3 + \text{etc.}} = 1 + m'x + m''x^2 + m'''x^3 + \text{etc.},$$

de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} m' &= n' = \frac{1}{24},\\ m'' &= m'n' - n'' = -\frac{17}{5760},\\ m''' &= m''n' - m'n'' + n''' = \frac{367}{967680}.\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ainsi la valeur de δU s'exprime par la fonction P, au moyen de l'équation générale

$$\delta U = P + \frac{1}{24}\,\delta^2 P^{\circ} - \frac{17}{5760}\,\delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{367}{967680}\,\delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

laquelle pourrait être continuée, suivant la même loi, aussi loin qu'on voudra.

696. L'équation par laquelle la fonction $\alpha\nu$ se déduit de U, peut être représentée ainsi,

$$\alpha\nu = 2\mathrm{U}\ l\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right],$$

pourvu qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de δ, on change $\mathrm{U}\delta$, $\mathrm{U}\delta^3$, $\mathrm{U}\delta^5$, etc., respectivement, en $\delta\mathrm{U}$, $\delta^3\mathrm{U}^\circ$, $\delta^5\mathrm{U}^{\circ\circ}$, etc.

Au moyen de cette équation, on en peut former d'autres non moins remarquables.

Désignons par $\mathrm{U}(\varphi+\frac{1}{2}\alpha)$ ce que devient la fonction U ou $\mathrm{U}(\varphi)$, lorsqu'au lieu de φ on met $\varphi+\frac{1}{2}\alpha$; alors on aura $\nu = \frac{d\mathrm{U}(\varphi+\frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi}$, et l'équation précédente donne

$$\alpha\frac{d\mathrm{U}(\varphi+\frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi} = 2\mathrm{U}\ l\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right].$$

Dans celle-ci mettons encore $\varphi+\frac{1}{2}\alpha$ au lieu de φ, nous aurons

$$\alpha\frac{d\mathrm{U}(\varphi+\alpha)}{d\varphi} = 2\mathrm{U}(\varphi+\tfrac{1}{2}\alpha)\ l\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right];$$

différentiant de part et d'autre par rapport à φ, et observant que $\mathrm{U}(\varphi+\alpha)$ n'est autre chose que U', on aura

$$\alpha\frac{dd\mathrm{U}'}{d\varphi^2} = 2.\frac{d\mathrm{U}(\varphi+\frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi}\ l\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right],$$

ou en substituant dans le second membre la valeur de $\frac{d\mathrm{U}(\varphi+\frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi}$,

$$\alpha^2\frac{dd\mathrm{U}'}{d\varphi^2} = 4\mathrm{U}\ l^2\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right].$$

Mettant dans celle-ci $\varphi-\alpha$ au lieu de φ, on a enfin

$$\alpha^2\frac{dd\mathrm{U}}{d\varphi^2} \text{ ou } \alpha^2\frac{du}{d\varphi} = 4\mathrm{U}^\circ\ l^2\left[\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}\delta^2)}\right].$$

Supposons donc qu'on ait $4l^2\left[\frac{1}{2}\delta + \sqrt{(1+\frac{1}{4}\delta^2)}\right]$, ou

$$\left(\delta - \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^3}{3.2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\delta^5}{5.2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\delta^7}{7.2^6} + \text{etc.}\right)^2$$
$$= \delta^2 - \mathrm{N}'\delta^4 + \mathrm{N}''\delta^6 - \mathrm{N}'''\delta^8 + \text{etc.};$$

et la vraie valeur de $\alpha^2\frac{du}{d\varphi}$, déduite de notre équation symbolique, sera

$$\alpha^2 \frac{du}{d\varphi} = \delta^2 U^{\circ} - N' \delta^4 U^{\circ\circ} + N'' \delta^6 U^{\circ\circ\circ} - N''' \delta^8 U^{\circ\circ\circ\circ} + \text{etc.}$$

697. Réciproquement on tirera de cette équation la valeur de $\delta^2 U^{\circ}$ exprimée au moyen de la fonction donnée $\alpha^2 \frac{du}{d\varphi}$ que nous désignerons par Q; cette valeur sera de la forme

$$\delta^2 U^{\circ} = Q + M' \delta^2 Q^{\circ} + M'' \delta^4 Q^{\circ\circ} + M''' \delta^6 Q^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficiens M', M'', M''', etc., se déduisent des coefficiens N', N'', N''', etc., au moyen de l'équation

$$\frac{1}{1 - N'x + N''x^2 - N'''x^3 + \text{etc.}} = 1 + M'x + M''x^2 + M'''x^3 + \text{etc.}$$

On voit aussi que ces mêmes coefficiens pourraient se former par le quarré de la suite déjà connue, au moyen de l'équation

$$(1 + m'x + m''x^2 + m'''x^3 + \text{etc.})^2 = 1 + M'x + M''x^2 + M'''x^3 + \text{etc.}$$

On aura de cette manière,

$$M' = \frac{1}{12}, \quad M'' = -\frac{1}{240}, \quad M''' = \frac{31}{60480}, \quad \text{etc.};$$

ce qui donne enfin

$$\delta^2 U^{\circ} = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^{\circ} - \frac{1}{240} \delta^4 Q^{\circ\circ} + \frac{31}{60480} \delta^6 Q^{\circ\circ\circ} - \ldots$$

698. L'analyse précédente nous a conduits à deux formules très remarquables; l'une pour calculer la valeur de δU par le moyen de la quantité connue $P = \alpha v$, où v est ce que devient u, en mettant $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de φ; l'autre pour calculer la valeur de $\delta^2 U^{\circ}$ par le moyen de la quantité connue $Q = \alpha^2 \frac{du}{d\varphi}$.

La première formule est

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^{\circ} - \frac{17}{5760} \delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} \delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

et la loi générale de ses coefficiens est la même que celle de la suite

$$1 + \frac{1}{24} x - \frac{17}{5760} x^2 + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} x^3 - \text{etc.},$$

qui vient du développement de la fonction

$$T = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{7 \cdot 2^6} + \text{etc.}};$$

la seconde formule est

$$\delta^2 U^\circ = Q + \frac{1}{12}\,\delta^2 Q^\circ - \frac{1}{240}\,\delta^4 Q^{\circ\circ} + \frac{31}{60480}\,\delta^6 Q^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

et la loi générale de ses coefficiens est la même que celle de la suite

$$1 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{240}x^2 + \frac{31}{60480}x^3 - \text{etc.},$$

qui est le quarré de la suite précédente $1 + \frac{1}{24}x - \frac{17}{5760}x^2 + \text{etc.}$, ou qui vient du développement de la fonction T^2.

699. Les deux formules dont nous venons de parler fournissent deux méthodes différentes pour construire une Table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\varphi$, correspondantes aux valeurs de φ, formant la progression 0, α, 2α, 3α, etc.

Suivant la première formule, il faut calculer les valeurs successives de la fonction donnée $P = \alpha v$, v étant ce que devient u lorsqu'au lieu de φ on met $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$. Par cette substitution, P est toujours regardé comme une fonction donnée de φ, qu'il faudra calculer pour chaque valeur de φ comprise dans la Table. Ainsi pour les valeurs successives φ, $\varphi + \alpha$, $\varphi + 2\alpha$, etc., on aura les valeurs correspondantes P, P', P'', etc., et ces valeurs étant portées dans la Table, chacune sur la même ligne horizontale que la valeur de φ à laquelle elle correspond, on en déduira leurs différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes, dont on fera autant de colonnes séparées, comme on le voit dans le tableau suivant :

$\varphi - 2\alpha$	$P^{\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ}$	$\delta^3 P^{\circ\circ}$	$\delta^4 P^{\circ\circ}$
$\varphi - \alpha$	P°	δP°	$\delta^2 P^\circ$	$\delta^3 P^\circ$	$\delta^4 P^\circ$
φ	P	δP	$\delta^2 P$	$\delta^3 P$	$\delta^4 P$
$\varphi + \alpha$	P'	$\delta P'$	$\delta^2 P'$	$\delta^3 P'$	
$\varphi + 2\alpha$	P''	$\delta P''$	$\delta^2 P''$		
$\varphi + 3\alpha$	P'''	$\delta P'''$			
$\varphi + 4\alpha$	P^{iv}				

Chaque colonne se forme de la précédente par soustraction, et renferme un terme de moins, de sorte qu'il faut que la colonne des P ait été prolongée jusqu'aux P^{iv}, pour que la différence $\delta^4 P$ puisse être connue et placée sur la ligne des φ et P.

Lorsqu'on aura formé pour chaque valeur de la variable φ, les quantités P, δP, $\delta^2 P$, $\delta^3 P$, $\delta^4 P$, on en conclura pour la même variable φ, la valeur de la différence δU, laquelle sera

$$\delta U = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{\circ} - \frac{17}{5760}\delta^4 P^{\circ\circ} + \text{etc.}$$

700. Il faudra faire attention aux indices qui affectent les différens termes de cette formule, et en vertu desquels le $\delta^2 P^{\circ}$ doit être pris dans la ligne immédiatement au-dessus de celle où est P, le $\delta^4 P^{\circ\circ}$ une ligne encore au-dessus, et ainsi de suite.

En général, l'intervalle α doit être pris assez petit pour que la suite précédente soit très convergente et qu'on n'ait besoin que de ses deux premiers termes $P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{\circ}$; le troisième $-\frac{17}{5760}\delta^4 P^{\circ\circ}$ servira seulement à diriger l'approximation pour savoir précisément sur combien de décimales on doit compter, et il faudra par conséquent que ce terme soit moindre qu'une demi-unité du dernier ordre de décimales auquel on veut s'arrêter dans la valeur de δU.

Il pourra arriver cependant que dans quelques parties de la Table qu'on veut construire, le terme dont il s'agit soit d'une ou de plusieurs unités décimales du dernier ordre; alors il faudra en tenir compte, et juger de ce qu'on néglige par le terme suivant de la série qui est $+\frac{367}{945 \times 2^{10}}\delta^6 P^{\circ\circ\circ}$, ce qui obligerait de prolonger la colonne des différences jusqu'au sixième rang.

701. Ayant fixé d'avance le nombre des décimales avec lequel on veut exprimer les différences δU, on calculera $\frac{1}{24}\delta^2 P^{\circ}$ en se bornant au nombre de décimales fixé, et négligeant le reste de la division par 24; mais pour plus d'exactitude, il sera bon de prendre toujours l'entier le plus approché du quotient, et de tenir compte du reste dans l'opération suivante. Supposons, par exemple, que $\delta^2 P^{\circ}$ divisé par 24, donne le quotient q et le reste r; alors dans l'opération suivante, pour former $\delta U'$, on divisera $\delta^2 P + r$ par 24, ce qui donnera le quotient q' et le reste r', et ainsi de suite. Cette manière d'opérer, dont nous avons fait l'épreuve, donne des résultats plus exacts et empêche les erreurs de se multiplier.

Nous distinguerons cette première méthode par le nom de *Méthode des ordonnées moyennes*, parce que l'ordonnée v qui sert à former l'auxiliaire $P = \alpha v$, répond à la variable $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$, moyenne entre les deux valeurs consécutives φ et $\varphi + \alpha$; elle suppose que la quantité P est calculée pour chaque valeur de φ, avec une grande précision, et même avec une ou deux décimales de plus qu'on n'en veut avoir dans la valeur de U ; or la quantité P, peu différente de la différence première δU, est souvent d'une grandeur telle qu'il faudrait la calculer par des Tables de logarithmes à dix décimales, ce qui rendrait les opérations fort longues. Si l'on se propose, par exemple, de calculer les fonctions elliptiques E et F avec dix décimales, et pour des amplitudes croissantes de demi-degré en demi-degré, les différences δF, δE devront être calculées avec douze décimales, et elles contiendront le plus souvent dix chiffres significatifs, ce qui exigera l'emploi de logarithmes qui aient au moins dix décimales.

702. On pourra ordinairement obtenir des résultats aussi exacts et avec moins de peine, par le moyen de la fonction $Q = \alpha^2 \frac{du}{d\varphi}$ qui sert à déterminer les différences secondes $\delta^2 U$. C'est l'objet de la seconde méthode que nous avons à exposer.

Il faudra alors faire usage de la formule

$$\delta^2 U^\circ = Q + \frac{1}{12}\delta^2 Q^\circ - \frac{1}{240}\delta^4 Q^{\circ\circ} + \frac{31}{60480}\delta^6 Q^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

et on prendra α assez petit pour que la suite se réduise sensiblement aux deux premiers termes, ce qui aura lieu si le troisième $\frac{1}{240}\delta^4 Q^{\circ\circ}$ est partout moindre qu'une demi-unité du dernier ordre de décimales auquel on s'arrête dans le calcul des quantités $\delta^2 U$.

On voit qu'en attribuant une valeur déterminée à φ, et prenant la quantité Q sur la même ligne, il faudra prendre $\delta^2 Q^\circ$ sur la ligne supérieure pour former la somme $Q + \frac{1}{12}\delta^2 Q^\circ$; cette somme représentant $\delta^2 U^\circ$, devra être portée également sur la ligne supérieure qui répond à la variable $\varphi - \alpha$.

La colonne des $\delta^2 U$ étant ainsi formée, il restera à avoir la valeur de δU correspondante à $\varphi = 0$, et c'est ce qu'on obtiendra immédiatement par la première formule. Au moyen de cette valeur et de la colonne des différences secondes, on formera la colonne des différences premières δU, et de celle-ci on conclura de même par addition, les valeurs successives de U.

703. Cette seconde méthode sera en général d'une pratique plus facile que la première, parce que la fonction Q est beaucoup plus petite que P et n'a pas besoin d'être déterminée avec un aussi grand nombre de chif-

fres significatifs, ce qui permettra d'employer pour ces calculs des Tables de logarithmes moins étendues.

Cependant comme les erreurs des différences secondes s'accumulent suivant la progression des nombres triangulaires, dans les résultats qu'on en déduit pour les fonctions principales, il faudra en général exprimer les quantités Q avec une décimale de plus que les quantités P; il faudra aussi, dans le cours de l'opération, calculer directement à des intervalles déterminés, la différence première δU, afin de vérifier et de pouvoir corriger les résultats produits par les différences secondes.

Nous donnerons ci-après quelques autres préceptes pour tirer de ces méthodes le plus grand degré d'approximation qu'elles peuvent offrir. Nous n'ajouterons ici que le tableau de l'opération qu'il faut exécuter pour ajouter un terme à la colonne des U.

704. Voici, dans la première méthode, le tableau figuré de l'état où le calcul est resté, après avoir trouvé la valeur de la fonction U qui répond à la variable φ.

Variable.	Fonction.	Diff. I.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.
$\varphi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$P^{\circ\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ\circ}$
$\varphi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$P^{\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ}$
$\varphi - \alpha$	U°	δU°	P°	δP°	$\delta^2 P^{\circ}$
φ	U	δU	P	δP	
$\varphi + \alpha$	U'		P'		

Dans ce dernier état, les colonnes sont terminées, comme les barres l'indiquent, par les termes φ, U, δU°, P, δP°, $\delta^2 P^{\circ\circ}$. Pour aller plus loin, il faut calculer l'auxiliaire P' ou $\alpha v'$ qui répond à la variable $\varphi + \alpha$; connaissant P', on formera dans les colonnes suivantes les termes δP, $\delta^2 P^{\circ}$; d'où l'on tirera $\delta U = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{\circ}$, et ensuite $U' = U + \delta U$, ce qui ajoutera un terme à toutes les colonnes.

705. Nous avons supposé que le troisième terme $-\frac{17}{5760}\delta^4 P^{\circ\circ}$ est négligeable dans la valeur de δU; s'il fallait en tenir compte, la colonne des P et les colonnes suivantes devraient être avancées d'un terme de plus, pour qu'on pût connaître la différence $\delta^4 P^{\circ\circ\circ}$ qui entre dans la valeur de δU°. Voici donc quel serait alors le dernier état du calcul, après avoir déterminé δU° et U.

Variable.	Fonction.	Diff. I.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.	III.	IV.
$\varphi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$P^{\circ\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^3 P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^4 P^{\circ\circ\circ}$
$\varphi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$P^{\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ}$	$\delta^3 P^{\circ\circ}$	$\delta^4 P^{\circ\circ}$
$\varphi - \alpha$	U°	δU°	P°	δP°	$\delta^2 P^{\circ}$	$\delta^3 P^{\circ}$	
φ	U	δU	P	δP	$\delta^2 P$		
$\varphi + \alpha$	U'		P'	$\delta P'$			
$\varphi + 2\alpha$			P''				

Pour ajouter un terme au-dessous des barres qui marquent le dernier ét des choses, il faut commencer par calculer l'auxiliaire $P'' = \alpha v''$ qui ré pond à la variable $\varphi + 2\alpha$; connaissant P'', on formera les différenc $\delta P'$, $\delta^2 P$, $\delta^3 P^{\circ}$, $\delta^4 P^{\circ\circ}$, au moyen desquelles on connaîtra ....
$\delta U = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{\circ} - \frac{17}{5760}\delta^4 P^{\circ\circ}$, et ensuite $U' = U + \delta U$.

706. La marche de l'opération est à peu près semblable dans la second méthode. Supposons d'abord qu'on s'est assuré que les $\delta^4 Q$ sont négligea bles et qu'ainsi on a, avec une exactitude suffisante, $\delta^2 U^{\circ} = Q + \frac{1}{12}\delta^2 Q$ on pourra représenter comme il suit l'état des choses, lorsque le calcul été conduit jusqu'au terme $\delta^2 U^{\circ\circ}$ qui fait connaître δU° et ensuite U.

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.
$\varphi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ\circ}$
$\varphi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ}$
$\varphi - \alpha$	U°	δU°	$\delta^2 U^{\circ}$	Q°	δQ°	$\delta^2 Q^{\circ}$
φ	U	δU		Q	δQ	
$\varphi + \alpha$	U'			Q'		

Pour aller plus loin, il faut calculer l'auxiliaire Q' égale à ce que de vient la fonction $\alpha^2 \frac{du}{d\varphi}$ en y substituant $\varphi + \alpha$ au lieu de φ; connaissar Q', on connaîtra δQ, $\delta^2 Q^{\circ}$ et $\delta^2 U^{\circ}$; enfin au moyen de $\delta^2 U^{\circ}$, on con naîtra δU et U', ce qui ajoutera un nouveau terme à toutes les colonne

707. S'il fallait avoir égard aux quatrièmes différences, on ajouterait u terme de plus à la colonne des quantités Q et aux colonnes suivante Voici alors quel serait le dernier état des choses, lorsqu'on est parvenu à de terminer U au moyen de la valeur $\delta^2 U^{\circ\circ} = Q^{\circ} + \frac{1}{12}\delta^2 Q^{\circ\circ} - \frac{1}{240}\delta^4 Q^{\circ\circ\circ}$.

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.	III.	IV.
$\varphi - 3\alpha$	U^{ooo}	δU^{ooo}	$\delta^2 U^{ooo}$	Q^{ooo}	δQ^{ooo}	$\delta^2 Q^{ooo}$	$\delta^3 Q^{ooo}$	$\delta^4 Q^{ooo}$
$\varphi - 2\alpha$	U^{oo}	δU^{oo}	$\delta^2 U^{oo}$	Q^{oo}	δQ^{oo}	$\delta^2 Q^{oo}$	$\delta^3 Q^{oo}$	
$\varphi - \alpha$	U^{o}	δU^{o}		Q^{o}	δQ^{o}	$\delta^2 Q^{o}$		
φ	U			Q	δQ			
$\varphi + \alpha$				Q'				

Pour aller plus loin, on calculera l'auxiliaire Q'' qui répond à la variable $\varphi + 2\alpha$; on en déduira les différences successives $\delta Q'$, $\delta^2 Q$, $\delta^3 Q^o$, $\delta^4 Q^{oo}$, au moyen desquelles on connaîtra $\delta^2 U^o = Q + \frac{1}{12}\delta^2 Q^o - \frac{1}{240}\delta^4 Q^{oo}$, ensuite δU et U', ce qui ajoutera un terme à toutes les colonnes.

Dans cette méthode, on ne néglige que les différences $\delta^6 Q$, lesquelles sont de l'ordre α^8, puisque Q est de l'ordre α^2; on pourra donc fixer *a priori* le nombre de décimales qu'on devra admettre dans l'expression des fonctions U; mais nous avons déjà fait observer que les erreurs sur les différences secondes se multiplient comme les nombres triangulaires; ainsi il faudra se procurer, à des intervalles déterminés, des valeurs exactes de la fonction principale U ou de sa différence première δU, afin de connaître et de corriger les petites erreurs qui auraient pu s'accumuler par le progrès des opérations.

708. Les deux méthodes que nous venons d'exposer sont en général très propres à remplir l'objet qui était proposé de construire une Table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\varphi$; elles ont l'une et l'autre des avantages et des inconvéniens qu'il faudra balancer lorsqu'il s'agira de les appliquer à un objet déterminé. Nous remarquerons ici que la seconde de ces méthodes peut avoir une application particulière et fort utile, s'il s'agit en effet de construire une Table des valeurs de la fonction U, d'après la seule connaissance du coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2U}{d\varphi^2} = u$, en sorte qu'on ait $U = \iint u d\varphi^2$; le problème se résoudra immédiatement par la formule $\delta^2 U^o = Q + \frac{1}{12}\delta^2 Q^o - \frac{1}{240}\delta^4 Q^{oo} + \frac{31}{60480}\delta^6 Q^{ooo} -$ etc., où l'on a $Q = \alpha^2 u$.

L'usage de cette formule suppose que l'on connaît à l'origine de l'intégrale les valeurs de U et de δU; ces deux données suffiront pour calculer la série entière des valeurs de U; et si l'on a besoin dans cet intervalle, de l'un des coefficiens différentiels $\frac{dU}{d\varphi}$, on le calculera par la formule ordinaire

$$\alpha \frac{dU}{d\varphi} = \delta U - \frac{1}{2}\delta^2 U + \frac{1}{3}\delta^3 U - \frac{1}{4}\delta^4 U + \text{etc.}$$

709. Si l'on proposait ultérieurement de former une Table des valeurs de la fonction U, en connaissant seulement le coefficient différentiel du 3ᵉ ordre $\frac{d^3U}{d\varphi^3} = u$, en sorte qu'on eût $U = \int^3 u d\varphi^3$, u étant une simple fonction de φ, la solution se déduirait aisément de la même analyse que nous avons suivie dans l'art. 696. Soit pour cet effet v ce que devient la fonction donnée u, lorsqu'on y met $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$; au lieu de φ, on trouvera

$$\alpha^3 v = \delta^3 U^{\circ} - k'\delta^5 U^{\circ\circ} + k''\delta^7 U^{\circ\circ\circ} - k'''\delta^9 U^{\circ\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

les coefficiens k', k'', k''', etc., étant les mêmes qu'on déduirait de l'équation identique

$$\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3.2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5.2^4} - \text{etc.}\right)^3 = x^3 - k'x^5 + k''x^7 - \text{etc.}$$

Soit donc $\alpha^3 v = R$; et de l'équation précédente on déduira

$$\delta^3 U^{\circ} = R + \frac{1}{8}\delta^2 R^{\circ} - \frac{7}{1920}\delta^4 R^{\circ\circ} + \frac{457}{945.2^{10}}\delta^6 R^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

la loi des coefficiens étant la même que donnerait le développement de $\left(1 + \frac{1}{24}x - \frac{17}{5760}x^2 + \frac{367}{945.2^{10}}x^3 - \text{etc.}\right)^3$.

Au moyen de la formule précédente, il suffit de connaître à l'origine de l'intégrale les valeurs de U, δU, $\delta^2 U$, ou ce qui revient au même, les trois premiers termes de la série U, U′, U″, et on formera la série entière des valeurs de l'intégrale $U = \int^3 u d\varphi^3$.

710. Il résulte encore de la même analyse qu'étant donné le coefficient différentiel du quatrième ordre $\frac{d^4U}{d\varphi^4} = u$, si l'on fait $\alpha^4 u = S$, on aura la formule

$$\delta^4 U^{\circ\circ} = S + \frac{1}{6}\delta^2 S^{\circ} - \frac{1}{720}\delta^4 S^{\circ\circ} + \frac{421}{4725.2^{10}}\delta^6 S^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

au moyen de laquelle on pourra calculer la série entière des valeurs de l'intégrale $U = \int^4 u d\varphi^4$, pourvu qu'on connaisse les quatre premiers termes de cette série U, U′, U″, U‴, ou ce qui revient au même, les quatre quantités U, δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$.

On a vu dans les art. 704 et suivans comment les calculs doivent être disposés pour former graduellement la série des auxiliaires et celle des fonctions. Pour éviter à cet égard tout embarras, voici comment on mettra en usage la dernière formule

$$\delta^4 U^{oo} = S + \tfrac{1}{6}\,\delta^2 S^o - \text{etc.}$$

La valeur de S étant donnée en fonction de φ, on pourra calculer préalablement, avec telle étendue qu'on voudra, la suite des quantités S, tant dans le sens des variables croissantes φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+2\alpha$, etc., à partir de la première valeur de φ, que dans le sens contraire $\varphi-\alpha$, $\varphi-2\alpha$, etc., s'il est nécessaire. Avec ces valeurs et leurs différences successives, prolongées jusqu'à ce qu'elles puissent être négligées, on formera autant de lignes qu'on voudra, telles que les suivantes :

$\varphi-\alpha$	S^o, δS^o, $\delta^2 S^o$, $\delta^3 S^o$, $\delta^4 S^o$, etc.
φ	S, δS, $\delta^2 S$, $\delta^3 S$, $\delta^4 S$, etc.
$\varphi+\alpha$	S', $\delta S'$, $\delta^2 S'$, $\delta^3 S'$, $\delta^4 S'$, etc.
$\varphi+2\alpha$	S'', $\delta S''$, $\delta^2 S''$, $\delta^3 S''$, $\delta^4 S''$, etc.

Cela posé, puisqu'on a en général

$$\delta^4 U = S'' + \frac{1}{6}\,\delta^2 S' - \frac{1}{720}\,\delta^4 S + \frac{421}{4725 \cdot 2^{10}}\,\delta^6 S^o - \text{etc.}$$

(valeur qui se réduira le plus souvent aux trois premiers termes); on voit que pour chaque valeur de φ, la Table des quantités S donnera immédiatement la valeur de $\delta^4 U$, laquelle jointe aux valeurs connues de U, δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, servira à former dans la ligne inférieure les termes U', $\delta U'$, $\delta^2 U'$, $\delta^3 U'$.

Calculant de même la valeur suivante de $\delta^4 U$, qui est $\delta^4 U'$, on formera une nouvelle ligne U'', $\delta U''$, $\delta^2 U''$, $\delta^3 U''$, et ainsi jusqu'à la limite de la Table qu'on veut construire.

On voit que pour être en état de calculer le terme $\delta^4 U$ qui sert à trouver U^{IV}, il suffira d'avoir avancé la série des S jusqu'au terme S^{IV} qui sert à trouver $\delta^4 S$, en supposant du moins que la valeur de $\delta^4 U$ soit exprimée d'une manière suffisamment exacte par les trois premiers termes de la formule. Ainsi, dans les cas les plus ordinaires, la série des S ne devra pas être prolongée au-delà de la valeur de φ, où doit se terminer la Table; dans ces mêmes cas où l'on n'a point égard au quatrième terme de la formule contenant $\delta^6 S^o$, le calcul des quantités S ne devra être fait qu'à compter de la première valeur de φ, puisque les quantités précédentes S^{o}, S^{oo}, etc., ne seraient d'aucun usage.

711. Il ne sera pas inutile de réunir ici, sous un même point de vue, les différentes formules que nous avons trouvées, pour former une Table des valeurs de l'intégrale U, lorsqu'on suppose connu, en fonction de la seule variable φ, l'un des coefficiens différentiels $\frac{dU}{d\varphi}$, $\frac{ddU}{d\varphi^2}$, $\frac{d^3U}{d\varphi^3}$, $\frac{d^4U}{d\varphi^4}$; voici ces formules où nous avons constamment désigné par P l'auxiliaire qui doit être employée dans chaque cas.

Soit 1°. l'intégrale $U = \int u d\varphi$; on fera $P = \alpha v$, v étant ce que devient la fonction donnée u, en mettant $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$ à la place de φ, et on aura la formule

$$\delta U = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{o} - \frac{17}{5760}\delta^4 P^{oo} + \frac{367}{945.2^{10}}\delta^6 P^{ooo} - \text{etc.}$$

Soit 2°. l'intégrale $U = \iint u d\varphi^2$; on fera $P = \alpha^2 u$, et l'on aura la formule

$$\delta^2 U^{o} = P + \frac{1}{12}\delta^2 P^{o} - \frac{1}{240}\delta^4 P^{oo} + \frac{31}{60480}\delta^6 P^{ooo} - \text{etc.}$$

Soit 3°. l'intégrale $U = \int^3 u d\varphi^3$, on fera $P = \alpha^3 v$, v étant ce que devient u, en mettant $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de φ, et on aura

$$\delta^3 U^{o} = P + \frac{1}{8}\delta^2 P^{o} - \frac{7}{1920}\delta^4 P^{oo} + \frac{457}{945.2^{10}}\delta^6 P^{ooo} - \text{etc.}$$

Soit 4°. l'intégrale $U = \int^4 u d\varphi^4$, on fera $P = \alpha^4 u$, et l'on aura

$$\delta^4 U^{oo} = P + \frac{1}{6}\delta^2 P^{o} - \frac{1}{720}\delta^4 P^{oo} + \frac{421}{4725.2^{10}}\delta^6 P^{ooo} - \text{etc.}$$

Il serait facile de prolonger à volonté la suite de ces formules, en observant la loi qu'elles suivent et qu'on démontre généralement par l'analyse du n° 696. Ainsi pour l'intégrale $U = \int^5 u d\varphi^5$, on ferait l'auxiliaire $P = \alpha^5 v$, et on aurait la formule

$$\delta^5 U^{oo} = P + \frac{5}{24}\delta^2 P^{o} - \frac{5}{384}\delta^4 P^{oo} + \text{etc.};$$

pour l'intégrale $U = \int^6 u d\varphi^6$, on ferait $P = \alpha^6 u$, et l'on aurait la formule

$$\delta^6 U^{ooo} = P + \frac{1}{4}\delta^2 P^{o} - \frac{23}{1440}\delta^4 P^{oo} + \text{etc.},$$

ainsi des autres.

Quant à la loi des coefficiens, elle est la même que celle qui résulterait du développement de la puissance

$$\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3.2^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{5.2^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{7.2^6}+\text{etc.}\right)^{-n},$$

n désignant l'ordre de l'intégrale proposée $U=\int^n u d\varphi^n$.

712. Il serait à désirer qu'on pût calculer par des procédés semblables et avec des suites aussi convergentes, les valeurs successives d'une fonction U donnée par une équation différentielle du premier ordre $\frac{dU}{d\varphi}=\ldots\ldots$ fonct. (U, φ), ou même par une équation différentielle d'un ordre plus élevé. Ce problème est de la même nature que ceux qui concernent les intégrales simples ou multiples ; mais sa résolution offre beaucoup plus de difficultés, et jusqu'à présent nous ne voyons d'autre moyen d'y parvenir que la formule de Taylor

$$\delta U=\alpha\frac{dU}{d\varphi}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{ddU}{d\varphi^2}+\frac{\alpha^3}{2.3}\cdot\frac{d^3U}{d\varphi^3}+\frac{\alpha^4}{2.3.4}\cdot\frac{d^4U}{d\varphi^4}+\text{etc.},$$

qui sert à calculer la différence finie d'une fonction par le moyen des coefficiens différentiels successifs de cette fonction.

Si l'équation est du premier ordre, le premier coefficient $\frac{dU}{d\varphi}$ sera donné en fonction de U et de φ, et les suivans $\frac{ddU}{d\varphi}$, $\frac{d^3U}{d\varphi^3}$, etc., s'en déduiront par la différentiation. On pourra donc, d'une valeur donnée de U correspondante à $\varphi=e$, déduire la valeur suivante $U'=U+\delta U$, correspondante à $\varphi=e+\alpha$, et ainsi successivement.

713. Si l'équation est différentielle du second ordre, alors faisant.... $\frac{dU}{d\varphi}=u$, le coefficient $\frac{ddU}{d\varphi^2}$ sera une fonction donnée de u et de φ ; on en déduira par la différentiation les valeurs des coefficiens suivans $\frac{d^3U}{d\varphi^3}$, $\frac{d^4U}{d\varphi^4}$, etc., exprimées semblablement en fonctions de u et de φ.

Connaissant donc les premières valeurs de U et de u qui répondent par exemple à $\varphi=e$, on trouvera les valeurs suivantes de U et de u qui répondent à $\varphi=e+\alpha$, au moyen des formules

$$\delta U=\alpha u+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{ddU}{d\varphi^2}+\frac{\alpha^3}{2.3}\cdot\frac{d^3U}{d\varphi^3}+\text{etc.},$$

$$\delta u=\alpha\cdot\frac{ddU}{d\varphi^2}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^3U}{d\varphi^3}+\frac{\alpha^3}{2.3}\cdot\frac{d^4U}{d\varphi^4}+\text{etc.},$$

d'où l'on déduira $U'=U+\delta U$, $u'=u+\delta u$. Par ces nouvelles valeurs de U et de u qui répondent à $\varphi=e+\alpha$, on trouvera semblablement les valeurs suivantes qui répondent à $\varphi=e+2\alpha$, et ainsi successivement jusqu'à la fin de la Table. Mais ces calculs qu'on doit faire ainsi pas à pas pour que le résultat en soit plus exact, sont très longs et très difficultueux.

Il serait d'autant plus utile de perfectionner ces méthodes en rendant les suites plus convergentes, que la réduction en Tables est la seule ressource qui reste pour évaluer les fonctions déterminées par des équations différentielles qu'on ne peut intégrer exactement; et peut-être n'y a-t-il pas d'autre moyen de résoudre les grandes difficultés que présente la théorie des perturbations des planètes, lorsque le développement en série ne peut pas avoir lieu, ou lorsqu'il offrirait un trop grand nombre de termes qui ne pourraient être négligés.

CHAPITRE IV.

Application des méthodes précédentes à la construction de la Table II.

714. Pour expliquer plus clairement l'usage de nos formules, nous les appliquerons au calcul de la Table des fonctions E pour le module $c =$ sin $45°$, qui se présente le plus fréquemment dans les applications. Nous supposerons en même temps qu'on fait $\alpha =$ à un demi-degré $= \frac{\pi}{360}$, c'est-à-dire que la Table des fonctions E ou des intégrales $\int \Delta d\varphi$ doit être construite pour toutes les valeurs de φ, de demi-degré en demi-degré, depuis $0°$ jusqu'à $90°$.

Des deux méthodes que nous avons données pour construire une semblable Table, nous choisirons celle qui sert à calculer les différences secondes de la fonction E par le moyen d'une auxiliaire..............
$Q = \alpha^2 \frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{1}{2} c^2\alpha^2 . \frac{\sin 2\varphi}{\Delta}$, d'où l'on déduit

$$\delta^2 E^\circ = Q + \tfrac{1}{12}\delta^2 Q^\circ.$$

Cette valeur suppose que le terme suivant de la série, contenant $\delta^4 Q^{\circ\circ}$, est négligeable ; or, c'est ce qui a lieu dans le cas présent, et ce qui aura toujours lieu à l'égard de la fonction E, à moins que les quantités c et $\sin\varphi$ ne soient toutes deux très rapprochées de l'unité.

715. Pour calculer les valeurs successives de Q, soit $\mathcal{C} = \frac{1}{4} c^2 \alpha^2$, et soit λ un angle déterminé par la valeur $\sin\lambda = c \sin\varphi$, on aura $\Delta = \cos\lambda$, et en omettant le signe de Q,

$$Q = \frac{\mathcal{C} \sin 2\varphi}{\cos\lambda};$$

dans l'exemple proposé, on aura $\mathcal{C} = \frac{1}{4}\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{720}\right)^2$, et

$$\log \mathcal{C} = 5.27963\ 47486.$$

Nous nous proposons de calculer jusqu'à douze décimales les valeurs de E ; alors les quantités Q auront huit chiffres significatifs au plus, de sorte qu'elles pourront être calculées par les Tables de logarithmes à dix décimales, qu'on réduira à huit, et même quelquefois par les Tables à sept décimales seulement. L'opération principale, pour avoir $\log Q$, est de déduire $\log\cos\lambda$ de la valeur connue de $\log\sin\lambda$; il suffira le plus souvent, pour cet objet, de tenir compte des premières différences données par les Tables, dans l'hypothèse de huit décimales seulement. Soit A la différence qui répond à $l\sin a$, et B la différence qui répond à $l\cos a$, a étant l'angle de la Table, immédiatement plus petit que λ ; si l'on fait $l\sin\lambda = l\sin a + r$, on aura $l\cos\lambda = l\cos a - \frac{Br}{A}$.

Cette formule sera suffisante presque dans tous les cas, et le calcul n'en sera pas bien compliqué, parce que les différences B et A, ainsi que r, peuvent être prises en bornant les logarithmes à huit décimales.

Cependant si on voulait calculer $l\cos\lambda$ de manière que le résultat fût exact jusqu'à la dixième ou la douzième décimale, voici le moyen qu'on pourrait employer.

Soit a l'angle de la Table qui approche le plus de l'angle λ, et supposons qu'on ait à la fois

$$l\sin\lambda = l\sin a \pm r, \quad l\cos\lambda = l\cos a \mp R;$$

il s'agit de trouver la différence R par le moyen de la différence donnée r ; pour cela on aura la formule

$$R = r\,\text{tang}^2 a\left(1 \pm \frac{Mr}{\cos^2 a}\right),$$

ou

$$\log R = \log(r\,\text{tang}^2 a) \pm (r + r\,\text{tang}^2 a).$$

716. Les règles précédentes pour calculer $\log Q$, s'appliquent à toutes les valeurs de φ dans l'exemple proposé, parce qu'on aura toujours..... $\tang a < 1$; mais si c et $\sin \varphi$ étaient tous deux très proches de l'unité, $\tang a$ pourrait devenir très grand, et il faudrait employer un autre moyen pour calculer la valeur de Δ qui fait connaître celle de l'auxiliaire Q.

Alors Δ devra être mis sous la forme $\Delta = \sqrt{(b^2 + c^2 \cos^2 \varphi)}$, et si on prend μ tel qu'on ait

$$\tang \mu = \frac{c \cos \varphi}{b} = \tang \theta \cos \varphi,$$

il en résultera $\Delta = \frac{b}{\cos \mu}$, et de là $Q = \gamma \sin 2\varphi \cos \mu$, en faisant..... $\gamma = \frac{\frac{1}{2} c^2 a^2}{b}$; dans l'exemple proposé, on aura

$$\log \gamma = 5.43014\ 97464.$$

Il s'agit donc, pour avoir Q, de déduire $\log \cos \mu$ de la valeur connue de $\log \tang \mu$; c'est ce qu'on peut faire, comme ci-dessus, avec une exactitude presque toujours suffisante, par le moyen des différences premières qui répondent à $\log \cos \mu$ et $\log \tang \mu$. Si on veut obtenir une plus grande précision, soit a l'angle de la Table le plus approché de μ; si l'on fait à la fois

$$l \tang \mu = l \tang a \pm r, \quad l \cos \mu = l \cos a \mp R,$$

on déduira la différence R de la différence connue r, par la formule

$$R = r \sin^2 a (1 \pm Mr \cos^2 a),$$

ou

$$\log R = \log (r \sin^2 a) \pm r \mp r \sin^2 a.$$

Cette manière de calculer $l \cos \mu$ qui fait connaître Δ et Q, n'est sujette à aucune exception ; elle peut être employée dans toute l'étendue des Tables qu'on veut construire, quels que soient les angles θ et φ ; en effet, on voit que l'angle μ qui est θ lorsque $\varphi = 0$, diminue continuellement à mesure que φ augmente, et finit par être nul lorsque $\varphi = 90°$.

717. Par la formule $Q = \gamma \sin 2\varphi \cos \mu$, on voit que l'auxiliaire Q est nulle aux deux limites de la Table, savoir, lorsque $\varphi = 0$ et lorsque $\varphi = 90°$; il y a donc entre ces deux points une valeur de Q qui est un *maximum;* ce *maximum* se détermine par l'équation $\tang \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$ (c'est le point remarquable où l'on a $F\varphi = \frac{1}{2} F^1$); alors $Q = \frac{\gamma \cos \theta}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta}$. Dans le cas de $\theta = 45°$ que nous avons pris pour exemple, on trouve le *maxi-*

mum $Q = 0.00002\ 23050\ 94$, il répond à l'amplitude $\varphi = 49^\circ\ 56'$ à peu près.

Pour la fonction F on a l'auxiliaire $Q = \gamma' \sin 2\varphi \cos^3\mu$, en faisant pour abréger $\gamma' = \frac{\gamma}{b^2}$; elle s'évanouit encore aux limites $\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$, et son *maximum* a lieu lorsque $\tang^2\varphi = \tang^2\theta + \sqrt{(1 + \tang^2\theta + \tang^4\theta)}$. Dans le cas de $\theta = 45^\circ$, on a $\tang^2\varphi = 1 + \sqrt{3}$, ou à peu près $\varphi = 58^\circ 50'$, ce qui donne le *maximum* $Q = 0.00003\ 34082\ 54$.

718. Voici deux exemples du calcul de l'auxiliaire Q relative à la fonction E, que nous résoudrons chacun par les deux méthodes que nous avons exposées.

Soit 1°. $\varphi = 33^\circ\ 30'$; suivant la première méthode, on fera le calcul comme il suit, en supposant toujours $c = \sin 45^\circ$.

c...	9.84948 50022		$l \sin\lambda = l \sin a - r$
$\sin\varphi$...	9.74188 94971	$\cos a$...	9.96411 53965
$\sin\lambda$...	9.59137 44993	R +	12845
$\sin a$...	9.59138 16478	$\cos\lambda$...	9.96411 66810
$r =$	71485	$\mathcal{C}$...	5.27963 47486
r...	4.85421 49	$\frac{\mathcal{C}}{\cos\lambda}$...	5.31551 80676
$\tang^2 a$...	9.25453 25	$\sin 2\varphi$...	9.96402 60827
$l(r \tang^2 a) =$	4.10874 74	$\log Q =$	5.27954 41503
r... $-$	71.5	$Q =$	0.00001 90346 18
$r \tang^2 a$... $-$	12.8		
$\log R =$	4.10873 90		

Par les formules de la seconde méthode, on procédera ainsi :

$\tang\mu$...	9.92110 65899	$\cos a$...	9.88536 35668
$\tang a$...	9.92111 81813	R +	47544
$r = -$	.1 15914	$\cos\mu$...	9.88536 83212
		γ...	5.43014 97464
r...	5.06413 6	$\sin 2\varphi$...	9.96402 60827
$\sin^2 a$...	9.61296 4	$\log Q =$	5.27954 41503
$l(r \sin^2 a) =$	4.67710 0	$Q =$	0.00001 90346 18
$r - r\sin^2 a$...	7		
$\log R =$	4.67709 3		

Supposons 2°, $\varphi = 70°$; le calcul fait par la première méthode donnera les résultats suivans :

$c\ldots$	9.84948 50022		$l \sin\lambda = l \sin a - r$
$\sin\varphi\ldots$	9.97298 58164	$\cos a\ldots$	9.87350 37413
$\sin\lambda\ldots$	9.82247 08186	$\mathrm{R}\ldots$	35274
$\sin a\ldots$	9.82247 52805	$\cos\lambda\ldots$	9.87350 72687
$r =$	44619	$\beta\ldots$	5.27963 47486
			5.40612 74799
$r\ldots$	4.649520	$\sin 2\varphi\ldots$	9.80806 74967
$\operatorname{tang}^2 a\ldots$	9.897943	$\log \mathrm{Q} =$	5.21419 49766
$l(r \operatorname{tang}^2 a) =$	4.547463	$\mathrm{Q} =$	0.00001 63755 15
$r\ldots$ —	4.5		
$r \operatorname{tang}^2 a\ldots$ —	3.5		
$\log \mathrm{R} =$	4.547455		

Par la seconde méthode on trouvera ce qui suit :

			$l \operatorname{tang}\mu = l \operatorname{tang} a + r$
$\operatorname{tang}\mu\ldots$	9.53405 16846	$\cos a\ldots$	9.97598 07553
$\operatorname{tang} a\ldots$	9.53402 28281	$\mathrm{R}\ldots$	30219
$r =$	2 88565	$\cos\mu\ldots$	9.97597 77334
		$\gamma\ldots$	5.43014 97464
$r\ldots$	5.46024 36	$\sin 2\varphi\ldots$	9.80806 74967
$\sin^2 a\ldots$	9.02000 72	$\log \mathrm{Q} =$	5.21419 49765
$l(r \sin^2 a) =$	4.48025 08	$\mathrm{Q} =$	0.00001 63755 15
$r - r \sin^2 a\ldots$	2 59		
$\log \mathrm{R} =$	4.48027 67		

On voit que ces deux méthodes s'accordent parfaitement. Les calculs ont été faits avec la même précision que si on voulait avoir la valeur de Q exacte jusqu'à la quatorzième décimale; on pourra donc les faire avec deux décimales de moins, lorsqu'on ne voudra avoir que douze décimales exactes.

719. Il est facile, par les moyens indiqués, de former la colonne des auxiliaires Q et celles de leurs différences premières et secondes, lesquelles serviront à former la colonne des différences secondes $\delta^2\mathrm{E}$, d'après la formule

$$\delta^2 E^\circ = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ.$$

Mais pour avoir les différences premières δE, et ensuite les fonctions E elles-mêmes, il faut connaître le premier terme δEo qui répond à $\varphi = o$; et ce premier terme est la même chose que $E\alpha$, puisqu'on a $Eo = o$.

Or la quantité $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}$ étant développée en série, on en tire $\int \Delta d\varphi$ ou

$$E(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2} c^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1.1}{2.4} c^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi - \text{etc.}$$

Soit $\sin \varphi = x$, on aura

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi = \int x^2 dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \int x^4 dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{etc.}$$

Ces suites sont très convergentes lorsque x est très petit; si on fait donc $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{360}$, on aura les valeurs suivantes, exactes jusqu'à la quinzième décimale :

$$E(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} c^2 (3.34541\ 42464) - \frac{1}{8} c^4 (\overline{9}.00525\ 11),$$
$$F(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} c^2 (3.34541\ 42464) + \frac{3}{8} c^4 (\overline{9}.00525\ 11).$$

Les nombres en parenthèses désignent les logarithmes des coefficiens, et la caractéristique $\overline{9}$, qu'on voit dans le troisième terme, indique une fraction décimale dont le premier chiffre significatif est au onzième rang. On a d'ailleurs

$$\alpha = 0.00872\ 66462\ 59971\ 65.$$

720. Connaissant ainsi $E\alpha$ qui est la même chose que δEo, on pourra, comme nous l'avons dit, construire la Table dans son entier au moyen de la formule $\delta^2 E^\circ = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ$. Mais pour empêcher, autant qu'il est possible, les erreurs dues au terme $\frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ$ de s'accumuler, nous avons tenu compte des restes que donne la division de $\delta^2 Q^\circ$ par 12.

Pour cela nous avons joint à la colonne des secondes différences $\delta^2 Q$, une autre colonne contenant deux nombres que nous désignons par q et r, et dont voici l'usage. Soit r° le terme qui précède r, et supposons qu'en divisant $\delta^2 Q + r^\circ$ par 12, le quotient soit q et le reste r, on fera constamment $\delta^2 E = Q' + q$, ou dans la ligne précédente, $\delta^2 E^\circ = Q + q^\circ$.

721. Nous joignons ici la série entière des calculs faits d'après ces principes, pour obtenir, dans le cas de $c = \sin 45^\circ$, les valeurs de la fonction E, correspondantes à tous les degrés et demi-degrés de l'amplitude φ.

On peut observer que pour les mêmes valeurs de c et de φ, l'auxiliaire qui est Q pour la fonction E, devient $\frac{Q}{\Delta^2}$ pour la fonction F; d'ailleurs Δ est toujours donné par l'opération même qui sert à trouver Q, puisqu'on a dans la première méthode $\Delta = \cos\lambda$, et dans la seconde $\Delta = \frac{b}{\cos\mu}$. Ainsi, en construisant la Table des fonctions E pour un module donné, on peut construire simultanément la Table des fonctions F qui se rapporte au même module.

Comme le mode de procéder est le même dans l'une et l'autre Table, nous n'avons pas cru devoir joindre ici la Table particulière qui concerne la fonction F, d'autant que cette Table et celle des fonctions E, ont besoin d'une dernière rectification qui leur donne toute l'exactitude dont elles sont susceptibles.

φ.	E.	δE.	δ^2E.	Q.	δQ.	δ^2Q.	q, r.
0°00′	0.00000 00000 00	872 65908 79	3322 70	0000 00	3322 75	62	5 + 2
0.30	0.00872 65908 79	872 62586 09	6644 77	3322 75	3322 13	128	11 — 2
1.00	0.01745 28494 88	872 55941 32	9965 57	6644 88	3320 95	189	16 — 5
1.30	0.02617 84436 20	872 45975 75	13284 48	9965 73	3318 96	253	21 — 4
2.00	0.03490 30411 95	872 32691 27	16600 86	13284 69	3316 43	316	26 0
2.30	0.04362 63103 22	872 16090 41	19914 07	16601 12	3313 27	380	32 — 4
3.00	0.05234 79193 63	871 96176 34	23223 49	19914 39	3309 47	444	37 — 4
3.30	0.06106 73369 97	871 72952 85	26528 47	23223 86	3305 03	507	42 — 1
4.00	0.06978 48322 82	871 46424 38	29828 38	26528 89	3299 96	569	47 + 4
4.30	0.07849 94747 20	871 16596 00	33122 59	29828 85	3294 27	633	53 + 1
5.00	0.08721 11343 20	870 83473 41	36410 48	33123 12	3287 94	698	58 + 3
5.30	0.09591 94816 61	870 47062 93	39691 38	36411 06	3280 96	760	64 — 5
6.00	0.10462 41879 54	870 07371 55	42964 70	39692 02	3273 36	825	68 + 4
6.30	0.11332 49251 09	869 64406 85	46229 75	42965 38	3265 11	888	74 + 4
7.00	0.12202 13657 94	869 18177 10	49485 92	46230 49	3256 23	952	80 — 4
7.30	0.13071 31835 04	868 68691 18	52732 59	49486 72	3246 71	1015	84 + 3
8.00	0.13940 00526 22	868 15958 59	55969 09	52733 43	3236 56	1081	90 + 4
8.30	0.14808 16484 81	867 59989 50	59194 78	55969 99	3225 75	1143	96 — 5
9.00	0.15675 76474 31	867 00794 72	62409 06	59195 74	3214 32	1208	100 + 3
9.30	0.16542 77269 03	866 38385 66	65611 24	62410 06	3202 24	1273	106 + 4
10.00	0.17409 15654 69	865 72774 42	65800 69	65612 30	3189 51	1336	112 — 4
10.30	0.18274 88429 11	865 03973 73	71976 80	68801 81	3176 15	1401	116 + 5
11.00	0.19139 92402 84	864 31996 93	75138 87	71977 96	3162 14	1466	123 — 5
11.30	0.20004 24399 77	863 56858 06	78286 31	75140 10	3147 48	1531	127 + 2
12.00	0.20867 81257 83	862 78571 75	81418 42	78287 58	3132 17	1595	133 + 1
12.30	0.21730 59829 58	861 97153 33	84534 59	81419 75	3116 22	1660	138 + 5
13.00	0.22592 56982 91	861 12618 74	87634 15	84535 97	3099 62	1725	144 + 2
13.30	0.23453 69601 65	860 24984 59	90716 47	87635 59	3082 37	1791	149 + 5
14.00	0.24313 94586 24	859 34268 12	93780 87	90717 96	3064 46	1856	155 + 1
14.30	0.25173 28854 36	858 40487 25	96826 72	93782 42	3045 90	1921	160 + 2
15.00	0.26031 69341 61	857 43660 53	99853 35	96828 32	3026 69	1988	166 — 2
15.30	0.26889 13002 14	856 43807 18	1 02860 11	99855 01	3006 81	2052	171 — 2
16.00	0.27745 56809 32	855 40947 07	1 05846 34	1 02861 82	2986 29	2120	177 — 6
16.30	0.28600 97756 39	854 35100 73	1 08811 38	1 05848 11	2965 09	2185	182 — 5
17.00	0.29455 32857 12	853 26289 35	1 11754 57	1 08813 20	2943 24	2251	187 + 2
17.30	0.30308 59146 47	852 14534 78	1 14675 24	1 11756 44	2920 73	2318	193 + 4
18.00	0.31160 73681 25	850 99859 54	1 17572 73	1 14677 17	2897 55	2385	199 + 1
8.30	0.32011 73540 79	849 82286 81	1 20446 38	1 17574 72	2873 70	2451	204 + 4
.00	0.32861 55827 60	848 61840 43	1 23295 51	1 20448 42	2849 19	2518	210 + 2
.30	0.33710 17668 03	847 38544 92	1 26119 46	1 23297 61	2824 01	2587	216 — 3
.00	0.34557 56212 95	846 12425 46	1 28917 55	1 26121 62	2798 14	2653	221 — 2
.30	0.35403 68638 41	844 83507 91	1 31689 10	1 28919 76	2771 61	2720	227 — 6
21.00	0.36248 52146 32	843 51818 31	1 34433 46	1 31691 37	2744 41	2789	232 — 1
.30	0.37092 03965 13	842 17385 35	1 37149 92	1 34435 78	2716 52	2857	238 0
.00	0.37934 21350 48	840 80235 43	1 39837 81	1 37152 30	2687 95	2924	244 — 4
.30	0.38775 01585 91	839 40397 62	1 42496 47	1 39840 25	2658 71	2994	249 + 2

φ.	E.	δE.	δ²E.	Q.	δQ.	δ²Q.	q,
22° 30′	0.38775 01585 91	839 40397 62	1 42496 47	1 39840 25	2658 71	2994	249 +
23.00	0.39614 41983 53	837 97901 15	1 45125 18	1 42498 96	2628 77	3061	255 +
23.30	0.40452 39884 68	836 52775 97	1 47723 28	1 45127 73	2598 16	3131	261 +
24.00	0.41288 92660 65	835 05052 69	1 50290 07	1 47725 89	2566 85	3199	267 −
24.30	0.42123 97713 34	833 54762 62	1 52824 88	1 50292 74	2534 86	3269	272 +
25.00	0.42957 52475 96	832 01937 74	1 55326 99	1 52827 60	2502 17	3339	278 +
25.30	0.43789 54413 70	830 46610 75	1 57795 71	1 55329 77	2468 78	3407	284 +
26.00	0.44620 01024 45	828 88815 04	1 60230 36	1 57798 55	2434 71	3478	299 +
26.30	0.45448 89839 49	827 28584 68	1 62630 23	1 60233 26	2390 93	3548	296 −
27.00	0.46276 18424 17	825 65954 45	1 64994 63	1 62633 19	2364 45	3618	301 +
27.30	0.47101 84378 62	824 00959 82	1 67322 83	1 64997 64	2328 27	3688	308 −
28.00	0.47925 85338 44	822 33636 99	1 69614 17	1 67325 91	2291 39	3759	313 −
28.30	0.48748 18975 43	820 64022 82	1 71867 97	1 69617 30	2253 80	3831	319 +
29.00	0.49568 82998 25	818 92154 91	1 74083 34	1 71871 10	2215 49	3900	325 +
29.30	0.50387 75153 16	817 18071 57	1 76259 77	1 74086 59	2176 49	3972	331 +
30.00	0.51204 93224 73	815 41811 80	1 78396 48	1 76263 08	2136 77	4044	337 +
30.30	0.52020 35036 53	813 63415 32	1 80492 75	1 78399 85	2096 33	4115	343 +
31.00	0.52833 98451 85	811 82922 57	1 82547 87	1 80496 18	2055 18	4187	349 +
31.30	0.53645 81374 42	810 00374 70	1 84561 12	1 82551 36	2013 31	4259	355 −
32.00	0.54455 81749 12	808 15813 58	1 86531 78	1 84564 67	1970 72	4331	361 −
32.30	0.55263 97562 70	806 29281 80	1 88459 13	1 86535 39	1927 41	4403	367 −
33.00	0.56070 26844 50	804 40822 67	1 90342 45	1 88462 80	1883 38	4476	373 −
33.30	0.56874 67667 17	802 50480 22	1 92181 01	1 90346 18	1838 62	4548	379 −
34.00	0.57677 18147 39	800 58299 21	1 93974 09	1 92184 80	1793 14	4620	385 −
34.30	0.58477 76446 60	798 64325 12	1 95720 97	1 93977 94	1746 94	4694	391 −
35.00	0.59276 40771 72	796 68604 15	1 97420 91	1 95724 88	1700 00	4766	397 +
35.30	0.60073 09375 87	794 71183 24	1 99073 19	1 97424 88	1652 34	4839	403 +
36.00	0.60867 80559 11	792 72110 05	2 00677 07	1 99077 22	1603 95	4912	410 −
36.30	0.61660 62669 16	790 71432 98	2 02231 85	2 00681 17	1554 83	4984	415 +
37.00	0.62451 24102 14	788 69201 13	2 03736 77	2 02236 00	1504 99	5059	422 −
37.30	0.63239 93303 27	786 65464 36	2 05191 12	2 03740 99	1454 40	5131	427 +
38.00	0.64026 58767 63	784 60273 24	2 06594 14	2 05195 39	1403 09	5204	434 −
38.30	0.64811 19040 87	782 53679 10	2 07945 13	2 06598 48	1351 05	5277	440 −
39.00	0.65593 72719 97	780 45733 97	2 09243 36	2 07949 53	1298 28	5350	445 +
39.30	0.66374 18453 94	778 36490 61	2 10488 07	2 09247 81	1244 78	5422	452 +
40.00	0.67152 54944 55	776 26002 54	2 11678 57	2 10492 59	1190 56	5496	458 +
40.30	0.67928 80947 09	774 14323 97	2 12814 11	2 11683 15	1135 60	5567	464 +
41.00	0.68702 95271 06	772 01509 86	2 13893 98	2 12818 75	1079 93	5641	470 +
41.30	0.69474 96780 92	769 87615 88	2 14917 44	2 13898 68	1023 52	5712	476 +
42.00	0.70244 84396 80	767 72698 44	2 15883 78	2 14922 20	966 40	5785	482 +
42.30	0.71012 57095 24	765 56814 66	2 16792 27	2 15888 60	908 55	5855	488 +
43.00	0.71778 13909 90	763 40022 39	2 17642 21	2 16797 15	850 00	5927	494 +
43.30	0.72541 53932 29	761 22380 18	2 18432 88	2 17647 15	790 73	5999	500 +
44.00	0.73302 76312 47	759 03947 30	2 19163 56	2 18437 88	730 74	6067	506 −
44.30	0.74061 80259 77	756 84783 74	2 19833 58	2 19168 62	670 07	6140	511 +
45.00	0.74818 65043 51	754 64950 16	2 20442 18	2 19838 69	608 67	6207	518 −

φ.	E.	δE.	δ²E.	Q.	δQ.	δ²Q.	q	r.
45° 00′	0.74818 65043 51	754 64950 16	2 20442 18	2 19838 69	608 67	6207	518	— 5
45.30	0.75573 29993 67	752 44507 98	2 20988 73	2 20447 36	546 60	6278	523	— 3
46.00	0.76325 74501 65	750 23519 25	2 21472 49	2 20993 96	483 82	6345	529	— 6
46.30	0.77075 98020 90	748 02046 76	2 21892 81	2 21477 78	420 37	6413	534	— 1
47.00	0.77824 00067 66	745 80153 95	2 22248 99	2 21898 15	356 24	6481	540	+ 0
47.30	0.78569 80221 61	743 57904 96	2 22540 37	2 22254 39	291 43	6545	545	+ 5
48.00	0.79313 38126 57	741 35364 59	2 22766 28	2 22545 82	225 98	6613	552	— 6
48.30	0.80054 73491 16	739 12598 31	2 22926 09	2 22771 80	159 85	6675	556	— 3
49.00	0.80793 86089 47	736 89672 22	2 23019 14	2 22931 65	93 10	6741	561	+ 6
49.30	0.81530 75761 69	734 66653 08	2 23044 77	2 23024 75	+ 25 69	6800	567	+ 2
50.00	0.82265 42414 77	732 43608 31	2 23002 41	2 23050 44	— 42 31	6864	572	+ 2
50.30	0.82997 86023 08	730 20605 90	2 22891 41	2 23008 13	110 95	6924	577	+ 2
51.00	0.83728 06628 98	727 97714 49	2 22711 17	2 22897 18	180 19	6981	582	— 1
51.30	0.84456 04343 47	725 75003 32	2 22461 12	2 22716 99	250 00	7039	587	— 6
52.00	0.85181 79346 79	723 52542 20	2 22140 69	2 22466 99	320 39	7095	591	— 3
52.30	0.85905 31888 99	721 30401 51	2 21749 30	2 22146 60	391 34	7150	596	— 5
53.00	0.86626 62290 50	719 08652 21	2 21286 42	2 21755 26	462 84	7201	600	— 4
53.30	0.87345 70942 71	716 87365 79	2 20751 53	2 21292 42	534 85	7254	604	+ 2
54.00	0.88062 58308 50	714 66614 26	2 20144 09	2 20757 57	607 39	7301	609	— 5
54.30	0.88777 24922 76	712 46470 17	2 19463 66	2 20150 18	680 40	7350	612	+ 1
55.00	0.89489 71392 93	710 27006 51	2 18709 72	2 19469 78	753 90	7393	616	+ 2
55.30	0.90199 98399 44	708 08296 79	2 17881 85	2 18715 88	827 83	7437	620	— 1
56.00	0.90908 06696 23	705 90414 94	2 16979 62	2 17888 05	902 20	7477	623	0
56.30	0.91613 97111 17	703 73435 32	2 16002 62	2 16985 85	976 97	7516	626	+ 4
57.00	0.92317 70546 49	701 57432 70	2 14950 45	2 16008 88	1052 13	7551	630	— 5
57.30	0.93019 27979 19	699 42482 25	2 13822 79	2 14956 75	1127 64	7584	632	— 5
58.00	0.93718 70461 44	697 28659 46	2 12619 29	2 13829 11	1203 48	7613	634	0
58.30	0.94415 99120 90	695 16040 17	2 11339 65	2 12625 63	1279 61	7643	637	— 1
59.00	0.95111 15161 07	693 04700 52	2 09983 59	2 11346 02	1356 04	7665	639	— 4
59.30	0.95804 19861 59	690 94716 93	2 08550 89	2 09989 98	1432 69	7687	640	+ 3
60.00	0.96495 14578 52	688 86166 04	2 07041 31	2 08557 29	1509 56	7705	642	+ 4
60.30	0.97184 00744 56	686 79124 73	2 05454 68	2 07047 73	1586 61	7719	644	— 5
61.00	0.97870 79869 29	684 73670 05	2 03790 88	2 05461 12	1663 80	7730	644	— 3
61.30	0 98555 53539 34	682 69879 17	2 02049 78	2 03797 32	1741 10	7737	644	+ 6
62.00	0.99238 23418 51	680 67829 39	2 00231 30	2 02056 22	1818 47	7740	645	+ 6
62.30	0.99918 91247 90	678 67598 09	1 98335 42	2 00237 75	1895 87	7741	646	— 5
63.00	1.00597 58845 99	676 69262 67	1 96362 16	2 98341 88	1973 28	7736	644	+ 3
63.30	1.01274 28108 66	674 72900 51	1 94311 52	1 96368 60	2050 64	7727	644	+ 2
64.00	1.01949 01009 17	672 78588 99	1 92183 62	1 94317 96	2127 91	7712	643	— 2
64.30	1.02621 79598 16	670 86405 37	1 89978 61	1 92190 05	2205 03	7696	641	+ 2
65.00	1.03292 66003 53	668 96426 76	1 87696 63	1 89985 02	2281 99	7674	640	— 4
65.30	1.03961 62430 29	667 08730 13	1 85337 93	1 87703 03	2358 73	7646	637	— 2
66.00	1.04628 71160 42	665 23392 20	1 82902 77	1 85344 30	2435 19	7614	634	+ 4
66.30	1.05293 94552 62	663 40489 43	1 80391 46	1 82909 11	2511 33	7577	632	— 3
00	1.05957 35042 05	661 60097 97	1 77804 40	1 80397 78	2587 10	7536	628	— 3
30	1.06618 95140 02	659 82293 57	1 75141 98	1 77810 68	2662 46	7487	624	— 4

φ.	E.	δE.	δ²E.	Q.	δQ.	δ²Q.	q,
67°30′	1.06618 95140 02	659 82293 57	1 75141 98	1 77810 68	2662 46	7487	624 —
68.00	1.07278 77433 59	658 07151 59	1 72404 70	1 75148 22	2737 33	7436	619 +
68.30	1.07936 64585 18	656 34746 89	1 69593 05	1 72410 89	2811 69	7377	615 +
69.00	1.08593 19332 07	654 65153 84	1 66707 65	1 69599 20	2885 46	7313	609 +
69.30	1.09247 84485 91	652 98446 19	1 63749 11	1 66713 74	2958 59	7243	604 +
70.00	1.09900 82932 10	651 34697 08	1 60718 15	1 63755 15	3031 02	7170	598 —
70.30	1.10552 17629 18	649 73978 93	1 57615 51	1 60724 13	3102 72	7087	590 +
71.00	1.11201 91608 11	648 16363 42	1 54441 99	1 57621 41	3173 59	7000	583 +
71.30	1.11850 07971 53	646 61921 43	1 51198 47	1 54447 82	3243 59	6909	576 +
72.00	1.12496 69892 96	645 10722 96	1 47885 87	1 51204 23	3312 68	6809	568 —
72.30	1.13141 80615 92	643 62837 09	1 44505 20	1 47891 55	3380 77	6704	558 +
73.00	1.13785 43453 01	642 18331 89	1 41057 47	1 44510 78	3447 81	6593	550 —
73.30	1.14427 61784 90	640 77274 42	1 37543 84	1 41062 97	3513 74	6475	539 +
74.00	1.15068 39059 32	639 39730 58	1 33965 44	1 37549 23	3578 49	6353	530 —
74.30	1.15707 78789 90	638 05765 14	1 30323 54	1 33970 74	3642 02	6223	518 +
75.00	1.16345 84555 04	636 75441 60	1 26619 40	1 30328 72	3704 25	6086	507 +
75.30	1.16982 59996 64	635 48822 20	1 22854 40	1 26624 47	3765 11	5946	496
76.00	1.17618 08818 84	634 25967 80	1 19029 96	1 22859 36	3824 57	5798	483 +
76.30	1.18252 34786 64	633 06937 84	1 15147 54	1 19034 79	3882 55	5643	470 +
77.00	1.18885 41724 48	631 91790 30	1 11208 69	1 15152 24	3938 98	5483	457 +
77.30	1.19517 33514 78	630 80581 61	1 07215 01	1 11213 26	3993 81	5318	444 —
78.00	1.20148 14096 39	629 73366 60	1 03168 18	1 07219 45	4046 99	5145	428 +
78.30	1.20777 87462 99	628 70198 42	99069 88	1 03172 46	4098 44	4969	414 +
79.00	1.21406 57661 41	627 71128 54	94921 90	99074 02	4148 13	4786	399 +
79.30	1.22034 28789 95	626 76206 64	90726 07	94925 89	4195 99	4597	383 +
80.00	1.22661 04996 59	625 85480 57	86484 27	90729 90	4241 96	4403	367 +
80.30	1.23286 90477 16	624 98996 30	82198 44	86487 94	4285 99	4204	351 —
81.00	1.23911 89473 46	624 16797 86	77870 59	82201 95	4328 03	4001	333 —
81.30	1.24536 06271 32	623 38927 27	73502 72	77873 92	4368 04	3791	316 —
82.00	1.25159 45198 59	622 65424 55	69096 95	73505 88	4405 95	3579	298 +
82.30	1.25782 10623 14	621 96327 60	64655 39	69099 93	4441 74	3360	280 +
83.00	1.26404 06950 74	621 31672 21	60180 23	64658 19	4475 34	3139	262 —
83.30	1.27025 38622 95	620 71491 98	55673 70	60182 85	4506 73	2913	242 +
84.00	1.27646 10114 93	620 15818 28	51138 02	55676 12	4535 86	2684	224 +
84.30	1.28266 25933 21	619 64680 26	46575 52	51140 26	4562 70	2450	204 +
85.00	1.28885 90613 47	619 18104 74	41988 51	46577 56	4587 20	2215	185 —
85.30	1.29505 08718 21	618 76116 23	37379 36	41990 36	4609 35	1976	165 —
86.00	1.30123 84834 44	618 38736 87	32750 46	37381 01	4629 11	1735	144 +
86.30	1.30742 23571 31	618 05986 41	28104 20	32751 90	4646 46	1491	124 +
87.00	1.31360 29557 72	617 77882 21	23443 03	28105 44	4661 37	1245	104 +
87.30	1.31978 07439 93	617 54439 18	18769 42	23444 07	4673 82	999	83 +
88.00	1.32595 61879 11	617 35669 76	14085 81	18770 25	4683 81	750	63 —
88.30	1.33212 97548 87	617 21583 95	9394 71	14086 44	4691 31	500	42 —
89.00	1.33830 19132 82	617 12189 24	4698 62	9395 13	4696 31	251	20 +
89.30	1.34447 31322 06	617 07490 62		4698 82	4698 82		
90.00	1.35064 38812 68			0000 00			

722. Nous avons déjà dit que, pour remédier à l'accumulation des erreurs qui peut résulter de la méthode précédente, il était nécessaire de calculer par les formules rigoureuses, les valeurs de la fonction qui correspondent à quelques-unes des valeurs de la variable φ. On aurait pû, pour cet objet, se borner aux quatre valeurs qui terminent les quatre parties de la Table, savoir, $\varphi = 22^\circ \frac{1}{2}$, $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 67^\circ \frac{1}{2}$, $\varphi = 90^\circ$, mais nous y en avons joint trois autres, et voici les erreurs en plus qui se sont trouvées dans les résultats de notre Table.

Variable φ.......	$22^\circ \frac{1}{2}$,	26,	45,	$49\frac{1}{2}$,	$67\frac{1}{2}$,	$70\frac{1}{2}$,	90.
Erreur sur $E(\varphi)$...	$+62$,	$+93$,	$+173$,	$+185$,	$+222$,	$+227$,	$+220$.

Il s'agit maintenant de corriger les erreurs de tous les termes de la Table, d'après les erreurs connues de ces sept termes; et le principe auquel il faut s'attacher dans cette opération délicate, est d'altérer le moins qu'il est possible les différences premières de la fonction, parce que ces différences, telles qu'elles sont portées dans la Table, sont nécessairement très approchées des différences exactes.

On pourrait aisément construire des formules algébriques qui embrasseraient une certaine étendue de termes, dans l'interpolation des erreurs; mais l'usage de ces formules serait pénible et souvent peu exact. Il nous a paru plus simple de faire l'interpolation à vue, en s'écartant le moins qu'il est possible de l'ordre linéaire indiqué successivement par les côtés du polygone dont les angles sont les extrémités des ordonnées qui représentent les erreurs connues. L'inégalité dans la distribution des erreurs sur un même côté, n'aura pour objet que de rendre moins inégales les différences en passant d'un côté à l'autre; et les anomalies à cet égard ne pourront jamais être bien considérables, parce que la méthode suivie pour la construction de la Table, est de nature à ne permettre aux erreurs de se multiplier que par des degrés presqu'insensibles.

723. C'est par ces procédés qu'on a rectifié la Table des fonctions E, et en y joignant celle des fonctions F, composée et rectifiée semblablement, on a formé la Table II ci-après, qui servira à trouver jusqu'à douze décimales, les valeurs des fonctions F et E pour toute valeur de l'amplitude φ, lorsque l'angle du module est de 45°. Elle servirait aussi à faire l'opération inverse, c'est-à-dire à trouver l'amplitude, lorsque l'une des fonctions est donnée.

On voit assez par les opérations dont nous avons donné le détail, qu'on ne peut répondre de l'exactitude de la douzième décimale, et que même la onzième pourrait, dans quelques cas, être en erreur d'une ou de deux unités; mais au moins on pourra toujours compter sur l'exactitude de la dixième décimale, et l'emploi des deux autres dans les calculs d'interpolation, garantira les résultats de toute erreur sur la dixième décimale. Si on n'a besoin que de sept décimales exactes dans le résultat, il suffira d'en admettre huit dans les calculs d'interpolation, ce qui les simplifiera beaucoup.

CHAPITRE V.

Examen de quelques questions sur les meilleurs moyens de former un système complet de Tables elliptiques.

724. Maintenant, pour avoir un système complet de Tables elliptiques, il ne s'agit que de construire par les mêmes méthodes, des Tables particulières analogues à la Table II, qui répondront à tous les angles du module de demi-degré en demi-degré. On aurait ainsi une suite de Tables contenant les valeurs des fonctions F et E pour chaque demi-degré de l'amplitude et de l'angle du module, calculées jusqu'à douze décimales.

Dans le recueil dont nous parlons, la première Table particulière, celle qui répond à l'angle du module $\theta = 0$, n'exige aucun calcul, puisqu'ayant alors $F = E = \varphi$, il ne s'agira que de mettre à côté de chaque amplitude φ, la longueur absolue de l'arc; il ne sera pas même nécessaire d'y joindre les différences premières, puisqu'elles sont constantes.

La dernière des Tables particulières est celle qui répond au module $c = 1$ ou à l'angle du module égal à 90°; elle se construira d'une manière très facile au moyen des Tables connues, puisqu'alors on a $E(\varphi) = \sin\varphi$ et $F(\varphi) = \log \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$. Les Tables III et IV ci-après sont destinées à représenter ces fonctions.

725. La Table III offre les sinus naturels et leurs logarithmes pour chaque quart de degré du quadrant, savoir, les sinus naturels exprimés avec quinze décimales, et leurs logarithmes avec quatorze seulement. Ils sont

tirés les uns et les autres de la *Trigon. Britan.* de Briggs, publiée après la mort de cet auteur, par Gellibrand, seul ouvrage où l'on trouve un aussi grand nombre de décimales; car le *Thesaurus Mathematicus* de Pitiscus, ne donne les sinus naturels qu'avec quatorze décimales. Nous avons cru que cette Table serait utile, ne fût-ce que pour mettre le lecteur à portée de vérifier par lui-même, et sans le secours d'un livre qui devient chaque jour plus rare, les calculs que nous avons développés dans différens endroits de cet ouvrage, et surtout ceux qui se rapportent à la Table des fonctions complètes.

La Table IV donne les logarithmes hyperboliques de tang $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, pour toutes les valeurs de φ, de demi-degré en demi-degré; ces logarithmes sont en même temps les valeurs de la fonction $F\varphi$, lorsque le module est égal à l'unité, ou lorsque l'angle du module est de 90°.

Connaissant, par la Table III, les logarithmes vulgaires de tang. $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, il a suffi de multiplier ceux-ci par le module $M = 2.3025$, etc., pour avoir les logarithmes contenus dans la Table IV.

Enfin nous avons cru faire plaisir aux calculateurs en ajoutant à ce petit recueil, la Table V extraite des grandes Tables du cadastre, où l'on trouvera les logarithmes à dix-neuf décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et pour tous les nombres premiers de 1500 à 10000.

726. La Table IV, dans laquelle nous avons inséré les différences successives de la fonction, autant que le format a pu le permettre, fait voir que ces différences décroissent d'une manière très lente, lorsque l'amplitude φ approche de 90°. Alors l'interpolation de la Table devient très difficile, ou ne donne qu'une approximation insuffisante; mais il est inutile de s'occuper de cette interpolation dans le cas de la Table IV, parce qu'on a d'ailleurs assez de moyens de déterminer avec toute la précision nécessaire le log. hyperbolique de tang $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, quelque soit φ.

L'interpolation présentera de semblables difficultés, mais à un moindre degré, dans les Tables particulières dressées pour des modules dont les angles diffèrent peu de l'angle droit; il y aura alors une partie plus ou moins étendue de chaque Table, celle qui répond aux plus grandes valeurs de φ, dans laquelle les interpolations exigeront un calcul plus long; mais cet inconvénient ne se fera guère sentir qu'à compter de l'angle du module $\theta = 70°$, et seulement pour des valeurs de φ non moindres que 70 ou 75°. On remarquera au reste que les simples Tables de logarithmes des nombres et des sinus, sont sujettes à un pareil inconvénient, vers leur commencement, et que celles des logarithmes des tangentes le sont au commencement et à la fin, lorsque l'angle approche de 90°.

Il serait superflu de parler ici de la double interpolation que l'on aurait à faire selon les diverses valeurs des angles θ et φ, lorsque le système de Tables dont nous avons parlé sera exécuté, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on aura une Table à double entrée contenant les valeurs des fonctions E et F, pour toutes les valeurs des angles θ et φ, de demi-degré en demi-degré. Mais il y a d'autres questions qui concernent la construction de la Table elle-même, et qui méritent d'être discutées.

727. On peut d'abord observer que l'interpolation est en général plus facile à l'égard des fonctions E qu'à l'égard des fonctions F; et si on se rappelle que toute fonction F peut s'exprimer exactement par la fonction E et une autre fonction de même nature, on en conclura qu'à la rigueur on pourrait se contenter de construire la Table des fonctions E, laquelle présentera toujours plus de facilités et moins de cas d'exception, dans les calculs d'interpolation. Cette observation réduirait presqu'à moitié le calcul des Tables elliptiques, et ce calcul deviendrait surtout d'une exécution assez facile, si on ne voulait avoir les fonctions E qu'avec sept décimales exactes.

Mais, d'un autre côté, les fonctions F étant plus simples analytiquement que les fonctions E, il y a quelque inconvénient à déduire la fonction la plus simple F ou F (c, φ) de deux fonctions plus composées E (c, φ), E (c^0, φ^0). Cet inconvénient n'est pas simplement idéal, il se fait sentir encore par la complication qu'il entraîne dans les calculs, puisque la détermination de la fonction E (c^0, φ^0) suppose qu'on a calculé de nouveaux élémens c^0, φ^0, qu'on peut bien déduire trigonométriquement des élémens donnés c, φ, mais qui rendent le calcul plus long et plus difficultueux.

728. Il faut observer de plus que quand on détermine la fonction F, soit au moyen des deux fonctions E (c, φ), E (c^0, φ^0), soit au moyen des deux fonctions E (c, φ), E (c', φ'), ce qui se fait par l'une ou l'autre des formules

$$bF\,(c, \varphi) = \tfrac{1}{2}(1 + b)\,E(c^0, \varphi^0) - E\,(c, \varphi) + \tfrac{1}{2}(1 - b)\sin\varphi^0,$$
$$\tfrac{1}{2}b^2F(c, \varphi) = E\,(c, \varphi) - (1 + c)\,E\,(c', \varphi') + c\sin\varphi;$$

les erreurs sur les fonctions E se trouvent notablement augmentées dans l'expression de F, à cause de la petitesse du diviseur b dans une formule, ou $\frac{1}{2}b^2$ dans l'autre; de sorte qu'on ne pourra se flatter d'obtenir la fonction F avec la même précision que les Tables donnent les fonctions E.

Enfin, dès qu'une fois on aura déduit des données c, φ, les nouveaux élémens c°, φ° ou c', φ', il n'en coûtera guère davantage pour continuer les suites c, c', c'', etc., et φ, φ', φ'', etc., jusqu'au troisième terme environ, comme cela est nécessaire pour obtenir directement une valeur aussi approchée qu'on voudra de la fonction $F(c, \varphi)$, en la déduisant des formules,

$$F(c, \varphi) = K \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi'), \quad K = \sqrt{\left(\frac{c'c''c'''}{c}\right)},$$

où Φ' désigne la limite des angles φ, φ', φ'', etc.; et dans ce cas, on n'aura aucun besoin de la Table des fonctions E.

729. Il résulte de cette discussion que, quoique la fonction F puisse s'exprimer rigoureusement par deux des fonctions E; cependant cette propriété ne fournit pas des moyens de calcul assez simples pour être employée utilement dans les approximations. Il en est de même de l'usage qu'on voudrait faire de la formule $F = E - c\,\frac{dE}{dc}$, ou $F = E - \operatorname{tang}\theta\,\frac{dE}{d\theta}$, en faisant $c = \sin\theta$.

Car, pour faire l'application de cette formule, il faudrait d'abord être en possession d'une Table complète des fonctions E, calculée pour toutes les valeurs de θ et de φ, de demi-degré en demi-degré; de plus en appelant α la longueur d'un demi-degré, ou faisant $\alpha = \frac{\pi}{360}$, le coefficient différentiel $\frac{dE}{d\theta}$ devrait être tiré de la formule

$$\alpha\,\frac{dE}{d\theta} = \delta E - \tfrac{1}{2}\delta^2 E + \tfrac{1}{3}\delta^3 E - \tfrac{1}{4}\delta^4 E + \text{etc.},$$

où les différences successives δE, $\delta^2 E$, $\delta^3 E$, etc., sont relatives à la variable θ seule. Mais on voit qu'à cause de la petitesse de α, la valeur de $\frac{dE}{d\theta}$ ne serait déterminée en général qu'avec deux décimales de moins que la fonction E, et la précision diminuerait encore à mesure que $\operatorname{tang}\theta$ augmenterait; ainsi ce moyen d'approximation que nous avions proposé autrefois, ne saurait être adopté.

730. Ayant écarté plusieurs des moyens qui se présentent naturellement pour construire des Tables propres à faire trouver aisément, dans tous les cas, les valeurs des fonctions elliptiques E et F, l'idée peut venir encore de remplacer une de ces fonctions par une autre qui serait plus facile à réduire en Tables. Telle est, par exemple, la fonction $G = \int \frac{d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta}$,

dont la valeur complète, lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, sera $\frac{1}{4}\pi$ ou 1, selon qu'on fait $c = 0$ ou $c = 1$; de sorte que dans les cas intermédiaires cette fonction éprouvera peu de variations, et sera très propre à être réduite en Tables.

Et puisque la fonction F peut être déduite des fonctions E et G, au moyen de l'équation

$$F = \frac{E - c^2G}{b^2} = \frac{E - G}{b^2} + G,$$

il semble au premier coup d'œil que la fonction G pourrait être substituée avec avantage à la fonction F, au moins dans la partie des Tables de celle-ci qui se prête difficilement aux interpolations, c'est-à-dire lorsque les angles θ et φ sont tous deux plus grands que 70 ou 75°.

Mais, en examinant la chose avec plus d'attention, on reconnaît que la difficulté n'est qu'éludée, et qu'on n'obtiendra pas une plus grande approximation par ce moyen, parce que si on a, par exemple, $b^2 = \frac{1}{100}$, l'erreur de E — G se trouvera centuplée dans la valeur de F. Il vaudrait donc tout autant, à mesure que θ et φ augmentent au-delà d'une certaine limite, diminuer le nombre des décimales qui entrent dans l'expression de F, afin que l'interpolation fût toujours également praticable, mais donnât pour résultat un moindre nombre de chiffres décimaux.

731. Pour donner un exemple de l'usage de nos méthodes, lorsque l'angle du module est peu éloigné de 90°, nous joignons ici une Table des fonctions E et F, construite d'après ces méthodes pour le module $c = \sin 89°$. Cette Table, calculée par la même méthode que la Table II, n'est pas pourvue d'un aussi grand degré de précision, et on ne peut guère compter sur l'exactitude de la dixième décimale; mais elle pourra être utile, surtout en fournissant des exemples qui serviront à apprécier diverses formules que nous donnerons ci-après pour les cas où le module est très peu différent de l'unité.

$c = \sin 89°$.

φ.	E.	δE.	F.	δF.
0° 00′	0.00000 00000	872 65355	0.00000 00000	872 67570
0.30	0.00872 65355	872 58711	0.00872 67570	872 74214
1.00	0.01745 24066	872 45424	0.01745 41784	872 87506
1.30	0.02617 69490	872 25495	0.02618 29290	873 07449
2.00	0.03489 94985	871 98926	0.03491 36739	873 34051
2.30	0.04361 93911	871 65719	0.04364 70790	873 67323
3.00	0.05233 59630	871 25876	0.05238 38113	874 07278
3.30	0.06104 85506	870 79399	0.06112 45391	874 53931
4.00	0.06975 64905	870 26294	0.06986 99322	875 07298
4.30	0.07845 91199	869 66562	0.07862 06620	875 67402
5.00	0.08715 57761	869 00210	0.08737 74022	876 34264
5.30	0.09584 57971	868 27242	0.09614 08286	877 07911
6.00	0.10452 85213	867 47664	0.10491 16197	877 88372
6.30	0.11320 32877	866 61481	0.11369 04569	878 75676
7.00	0.12186 94358	865 68701	0.12247 80245	879 69857
7.30	0.13052 63059	864 69331	0.13127 50102	880 70951
8.00	0.13917 32390	863 63378	0.14008 21053	881 79002
8.30	0.14780 95768	862 50851	0.14890 00055	882 94047
9.00	0.15643 46619	861 31757	0.15772 94102	884 16132
9.30	0.16504 78376	860 06106	0.16657 10234	885 45306
10.00	0.17364 84482	858 73906	0.17542 55540	886 81620
10.30	0.18223 58388	857 35170	0.18429 37160	888 25125
11.00	0.19080 93558	855 89906	0.19317 62285	889 75882
11.30	0.19936 83464	854 38127	0.20207 38167	891 33948
12.00	0.20791 21591	852 79843	0.21098 72115	892 99388
12.30	0.21644 01434	851 15068	0.21991 71503	894 72265
13.00	0.22495 16502	849 43813	0.22886 43768	896 52653
13.30	0.23344 60315	847 66091	0.23782 96421	898 40622
14.00	0.24192 26406	845 81916	0.24681 37043	900 36251
14.30	0.25038 08322	843 91302	0.25581 73294	902 39618
15.00	0.25881 99624	841 94263	0.26484 12912	904 50807
15.30	0.26723 93887	839 90816	0.27388 63719	906 69905
16.00	0.27563 84703	837 80973	0.28295 33624	908 97007
16.30	0.28401 65676	835 64753	0.29204 30631	911 32202
17.00	0.29237 30429	833 42171	0.30115 62833	913 75590
17.30	0.30070 72600	831 13246	0.31029 38423	916 27278
18.00	0.30901 85846	828 77992	0.31945 65701	918 87369
18.30	0.31730 63838	826 36430	0.32864 53070	921 55979
19.00	0.32557 00268	823 88579	0.33786 09049	924 33218
19.30	0.33380 88847	821 34453	0.34710 42267	927 19212
20.00	0.34202 23300	818 74076	0.35637 61479	930 14082
20.30	0.35020 97376	816 07467	0.36567 75561	933 17961
21.00	0.35837 04843	813 34645	0.37500 93522	936 30985
21.30	0.36650 39488	810 55631	0.38437 24507	939 53289
22.00	0.37460 95119	807 70449	0.39376 77796	942 85024
22.30	0.38268 65568	804 79117	0.40319 62820	946 26337

$c = \sin 89^\circ$.

φ.	E.	δE.	F.	δF.
67° 30′	0.92398 47497	330 73274	1.61453 37629	2302 68190
68.00	0.92729 20771	323 68061	1.63756 05819	2352 85574
68.30	0.93052 88832	316 60422	1.66108 91393	2405 44915
69.00	0.93369 49254	309 50415	1.68514 36308	2460 63601
69.30	0.93678 99669	302 38096	1.70974 99909	2518 60725
70.00	0.93981 37765	295 25523	1.73493 60634	2579 57303
70.30	0.94276 61288	288 06754	1.76073 17937	2643 76526
71.00	0.94564 68042	280 87848	1.78716 94463	2711 44038
71.30	0.94845 55890	273 66864	1.81428 38501	2782 88278
72.00	0.95119 22754	266 43860	1.84211 26779	2858 40869
72.30	0.95385 66614	259 18899	1.87069 67648	2938 37069
73.00	0.95644 85513	251 92041	1.90008 04717	3023 16314
73.30	0.95896 77554	244 63350	1.93031 21031	3113 22858
74.00	0.96141 40904	237 32888	1.96144 43889	3209 06516
74.30	0.96378 73792	230 00718	1.99353 50405	3311 23577
75.00	0.96608 74510	222 66908	2.02664 73982	3420 37885
75.30	0.99831 41418	215 31525	2.06085 11867	3537 22160
76.00	0.97046 72943	207 94636	2.09622 34027	3662 59553
76.30	0.97254 67579	200 56314	2.13284 93580	3797 45621
77.00	0.97455 23893	193 16631	2.17082 39201	3942 90699
77.30	0.97648 40524	185 75665	2.21025 29900	4100 22856
78.00	0.97834 16189	178 33495	2.25125 52756	4270 91650
78.30	0.98012 49684	170 90205	2.29396 44406	4456 72749
79 00	0.98183 39889	163 45881	2.33853 17155	4659 73850
79.30	0.98346 85770	156 00623	2.38512 91005	4882 42409
80.00	0.98502 86393	148 54533	2.43395 33414	5130 68336
80.30	0.98651 40926	141 07723	2.48526 01750	5396 39364
81.00	0.98792 48649	133 60320	2.53922 41114	5701 52840
81.30	0.98926 08969	126 12467	2.59623 93954	6039 79315
82.00	0.99052 21436	118 64327	2.65663 73269	6420 89541
82.30	0.99170 85763	111 16093	2.72084 62810	6853 40807
83.00	0.99282 01856	103 67999	2.78938 03617	7348 32271
83.30	0.99385 69855	96 20334	2.86286 35888	7919 96350
84.00	0.99481 90189	88 73459	2.94206 32238	8587 32820
84.30	0 99570 63648	81 27854	3.02793 65058	9376 11725
85.00	0.99651 91502	73 84167	3.12169 76783	10321 89670
85.30	0.99725 75669	66 43310	3.22491 66453	11472 71955
86.00	0.99792 18979	59 06623	3.33964 38408	12912 11482
86.30	0.99851 25602	51 76169	3.46876 49890	14736 71952
87.00	0.99903 01771	44 55317	3.61613 21842	17129 72923
87.30	0.99947 57088	37 49945	3.78742 94765	20366 68374
88.00	0.99985 07033	30 71019	3.99109 63139	24893 29037
88.30	1.00015 78052	24 41794	4.24002 92176	31343 99016
89.00	1.00040 19846	19 11666	4.55346 91192	40020 07521
89.30	1.00059 31512	15 84265	4.95366 98713	48123 99583
90.00	1.00075 15777		5.43490 98296	

CHAPITRE VI.

Méthode trigonométrique pour construire, d'après un module déterminé, la Table des fonctions F *et* E.

732. On peut construire cette Table par une méthode qui n'exige que des calculs trigonométriques très simples ; voici en quoi consiste cette méthode :

Supposons qu'après avoir pris un module c à volonté, on veuille trouver l'amplitude φ qui réponde à une fonction F égale à $\frac{1}{200}$ de la fonction complète F^1 ; cette amplitude se déterminera par la méthode de l'art. 71, si l'on a $c^2 < \frac{1}{2}$, ou si c^2 étant $> \frac{1}{2}$, n'est pas trop rapproché de l'unité ; et par la méthode de l'art. 75, si $1 - c^2$ est très petit.

Soit dans l'un et l'autre cas, α ou α_1 la valeur de l'amplitude qui donne $F(\alpha) = \frac{1}{200} F^1$, nous appellerons successivement α_2, α_3, α_4, les amplitudes qui donnent $F(\alpha_2) = 2F\alpha$, $F(\alpha_3) = 3F\alpha$, $F(\alpha_4) = 4F\alpha$, etc., jusqu'à $F(\alpha_{200}) = 200F(\alpha) = F^1$.

Cela posé, la Table que nous voulons construire contiendra, dans la première colonne, les nombres 1, 2, 3....200, qui représentent les fonctions F croissant par intervalles égaux, depuis la fonction $F(\alpha) = \frac{1}{200} F^1$ jusqu'à la fonction complète F^1 ; dans la seconde colonne seront les valeurs correspondantes de l'amplitude, savoir, α_1, α_2, α_3 jusqu'à α_{200} ou $\frac{1}{2}\pi$. Cette Table sera en quelque sorte l'inverse de celle que nous avons construite par la première méthode, et dans laquelle les amplitudes croissent par intervalles égaux ; mais la théorie des fonctions F fournit des formules très élégantes pour construire la Table dans ce nouveau système.

733. Désignons par φ un terme quelconque α_n de la suite α_1, α_2, α_3, etc., en sorte qu'on ait $F\varphi = nF\alpha$; nous ferons par analogie $F(\varphi') = (n+1) F\alpha$, $F\varphi'' = (n+2) F\alpha$, et dans le sens inverse, $F(\varphi^{\circ}) = (n-1) F\alpha$, ... $F\varphi^{\circ\circ} = (n-2) F\alpha$, etc. Cela posé, soit $\Delta(\alpha)$ ou $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \alpha)} = a$, l'équation générale de l'art. 22, deviendra

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi' + \tfrac{1}{2}\varphi^\circ\right) = a \operatorname{tang}\varphi.$$

Mais on a $\varphi' - 2\varphi + \varphi^\circ = \delta^2\varphi^\circ$; cette équation peut donc se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang}\left(\varphi + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ\right) = a \operatorname{tang}\varphi;$$

on déduit de là,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = \frac{(a-1)\operatorname{tang}\varphi}{1 + a\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Soit $a = \frac{1-k}{1+k}$ ou $k = \frac{1-a}{1+a}$, cette équation deviendra

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = -\frac{k\sin 2\varphi}{1 + k\cos 2\varphi},$$

et on en déduit ultérieurement,

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = -k\sin\left(2\varphi + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ\right).$$

Cette équation fait voir que $\frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ$ est toujours négatif; faisant donc $\frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = -\omega$, on aura

$$\sin\omega = k\sin(2\varphi - \omega).$$

Or k est une quantité très petite du second ordre par rapport à α, puisqu'on a $c\sin\alpha = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, et qu'ainsi k se déduit de $c\sin\alpha$, suivant la même loi que le module c° se déduit du module c. On voit donc que ω restera toujours une quantité très petite du second ordre; son *maximum* aura lieu à peu près lorsqu'on a $\varphi = 45^\circ$, et ce *maximum* sera à peu près $= k\ldots = (\frac{1}{2}c\sin\alpha)^2 = \frac{1}{4}c^2\alpha\sin\alpha$; dans les points extrêmes, lorsque $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, la quantité ω sera nulle.

L'équation $\sin\omega = k\sin(2\varphi - \omega)$ est facile à résoudre dans les différens cas, avec toute l'approximation nécessaire; on peut d'abord négliger ω dans le second membre, ce qui donnera $\sin\omega = k\sin 2\varphi$, ou simplement $\omega = k\sin 2\varphi$; ensuite pour avoir une plus grande approximation, on substituera cette valeur dans le second membre. Soit alors $k\sin(2\varphi - \omega) = p$, on aura $\sin\omega = p$; donc si on appelle R″ le nombre de secondes contenues dans le rayon, afin que $R''\omega$ exprime le nombre de secondes de l'arc ω, on aura

$$R''\omega = R''p\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{p^4}{5} + \text{etc.}\right).$$

On déduit aussi immédiatement de la formule $\operatorname{tang}(\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ) = a\operatorname{tang}\varphi$, une autre valeur de $\frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ$ ou ω, savoir :

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = k\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}k^2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}k^3\sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Mais cette expression est en général moins convergente que la précédente, et elle paraît moins facile à calculer, parce qu'elle exige de plus qu'on cherche dans les Tables les logarithmes de sin 4φ, sin 6φ, etc.

Les valeurs qu'on devra donner à φ seront successivement α_1, α_2, α_3, etc. On calculera les valeurs correspondantes de 2ω, qui seront en même temps celle de $\delta^2\varphi$; et comme la première valeur de $\delta\varphi$, celle qui répond à $\varphi = 0$, est égale à α, on pourra former en entier la colonne des valeurs de φ.

Mais pour vérifier les calculs et empêcher les erreurs de s'accumuler, il sera bon d'avoir une formule qui fasse connaître directement une différence première quelconque $\delta\varphi$.

Or on a vu (art. 18) que si l'on fait tang $\psi = \Delta(\alpha)$ tang φ et tang $\mu = \Delta(\varphi)$ tang α, on aura $\varphi' = \psi + \mu$; mais d'un autre côté, $\psi = \varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ$ et $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$; donc $\mu = \delta\varphi - \frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = \delta\varphi + \omega$; donc on a pour déterminer directement $\delta\varphi$, l'équation

$$\text{tang}\,(\delta\varphi + \omega) = \Delta(\varphi)\,\text{tang}\,\alpha.$$

On voit en même temps, par cette équation, que comme ω est toujours positif, et $\Delta(\varphi)$ toujours moindre que l'unité, on aura par ces deux raisons, $\delta\varphi < \alpha$. Ainsi toutes les quantités qui entrent, tant dans la colonne des différences secondes $\delta^2\varphi$, que dans celle des différences premières $\delta\varphi$, seront plus petites que des limites données, et ne peuvent par conséquent éprouver que de petites anomalies.

On obtiendra enfin une vérification complète de tous les calculs, lorsque le dernier terme de la colonne des φ, savoir α_{200}, se trouvera égal à $90°$. On peut se procurer d'autres vérifications dans cet intervalle, en calculant la valeur de φ qui donne Fφ égale à la moitié ou à une autre partie exprimée exactement en 200$^{\text{ièmes}}$ de la fonction complète F^1.

734. Une fois qu'on a déterminé la constante α par les méthodes directes, on voit que la Table entière relative à la fonction F, peut être calculée par une seule formule trigonométrique simple et rigoureuse, savoir, $\sin\omega = k\sin(2\varphi - \omega)$. En effet, cette formule seule servira à former la colonne entière des différences secondes; et comme on connaît d'avance le premier terme des différences premières $\delta\varphi$, lequel est égal à α, on formera de suite la colonne entière des différences premières $\delta\varphi$, et de là celle des amplitudes φ, puisque le premier terme $= 0$.

Le problème est donc résolu complètement par la seule équation mentionnée; mais pour se procurer de loin à loin des vérifications, on a une seconde formule trigonométrique, savoir,

$$\operatorname{tang}(\delta\varphi + \omega) = \Delta(\varphi) \operatorname{tang}\alpha,$$

laquelle servira à calculer directement la différence première $\delta\varphi$. Elle montre immédiatement qu'une valeur approchée de $\delta\varphi$ est $\delta\varphi = \alpha\Delta(\varphi) - \omega$.

Il faut maintenant examiner, 1°. comment on interpolera la Table des fonctions F, calculée pour une valeur determinée du module; 2°. comment on interpolera le système des Tables particulières, calculées pour les différens angles du module, de demi-degré en demi-degré.

735. Dans le premier cas, si l'on cherche une valeur de φ qui réponde à une valeur donnée de F, il faudra d'abord exprimer F en parties 200ièmes de F^1. Soit donc $F = \frac{n+x}{200} F^1$, n étant un entier et x une fraction.

Soit A la valeur de φ qui répond au nombre n de la première colonne, et soient δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ les différences successives placées sur la même ligne que A, la valeur de l'amplitude φ sera, suivant les formules ordinaires,

$$\varphi = A + x\delta A + \frac{x.x-1}{2}\delta^2 A + \frac{x.x-1.x-2}{2.3}\delta^3 A + \text{etc.}$$

Si au contraire on demande la valeur de F qui réponde à une valeur donnée de φ, on verra d'abord au premier coup d'œil quel est le nombre de la Table qui doit être pris pour A; le nombre correspondant n se trouvera dans la première colonne, vis-à-vis de A; ainsi, pour avoir la valeur de $F = \frac{n+x}{200} F^1$, il ne s'agira que de déduire x de l'équation précédente où l'on connaît φ, A, δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$: or cette résolution n'offre aucune difficulté; car on a

$$x = \frac{\varphi - A}{\delta A + \frac{x-1}{2}\delta^2 A + \frac{x-1.x-2}{2.3}\delta^3 A};$$

la première valeur approchée de x est donc $\frac{\varphi - A}{\delta A}$; on s'en servira pour substituer dans le dénominateur et obtenir une seconde valeur plus approchée de x; cette seconde en donnera semblablement une troisième, et ainsi de suite.

736. Venons maintenant à la seconde question. Nous supposons qu'il existe une suite de Tables construites pour tous les angles θ du module, de demi-degré en demi-degré, dans chacune desquelles on trouve l'angle φ

qui répond à toute fonction $F(\theta, \varphi)$, exprimée par $\frac{n}{200} F^1(\theta)$, n étant un nombre entier.

Cela posé, soient donnés la fonction F et l'angle μ du module auquel elle appartient; il faudra préalablement, d'après cet angle, calculer la fonction complète $F^1(\mu)$; alors connaissant F, on connaîtra le nombre $n+x$ (composé de l'entier n et de la fraction x), tel qu'on ait $F = \frac{n+x}{200} F^1\mu$.

Soit maintenant $\mu = 6 + y$, 6 étant un nombre entier de demi-degrés, et y étant < 1. Dans la Table où $\theta = 6$, on prendra par interpolation l'amplitude φ qui répond à $n+x$; on prendra de même, par interpolation, les amplitudes φ', φ'', φ''', etc., qui répondent à $n+x$, dans les Tables qui ont pour angle du module $6+1$, $6+2$, $6+3$, etc.; cela posé, l'amplitude qui répond à la fonction donnée F dont l'angle du module est μ, sera exprimée par la valeur

$$\varphi + y(\varphi' - \varphi) + \frac{y \cdot y-1}{2}(\varphi'' - 2\varphi' + \varphi) + \frac{y \cdot y-1 \cdot y-2}{2 \cdot 3}(\varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi) + \text{etc.}$$

L'opération inverse se ferait d'une manière semblable, mais il est superflu de s'en occuper ici.

737. Il faut faire voir maintenant comment on pourra former une Table analogue pour les fonctions E : cette Table est d'une exécution moins facile; cependant il se présente encore, pour la construire, des formules assez élégantes et qui méritent d'être remarquées.

Soient, comme ci-dessus, φ°, φ, φ' trois amplitudes successives telles qu'on ait $F(\varphi^\circ) + F(\alpha) = F(\varphi)$, $F(\varphi) + F(\alpha) = F(\varphi')$, on aura, suivant l'art. 34, les deux équations

$$E(\varphi^\circ) + E(\alpha) - E(\varphi) = c^2 \sin\alpha \sin\varphi^\circ \sin\varphi,$$
$$E(\varphi) + E(\alpha) - E(\varphi') = c^2 \sin\alpha \sin\varphi \sin\varphi';$$

d'où l'on tire

$$E(\varphi') - 2E(\varphi) + E(\varphi^\circ) = -c^2 \sin\alpha \sin\varphi (\sin\varphi' - \sin\varphi^\circ),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta^2 E(\varphi^\circ) = -c^2 \sin\alpha \sin\varphi (\sin\varphi' - \sin\varphi^\circ).$$

Mais on a $\sin\varphi' - \sin\varphi^\circ = 2\sin\frac{\varphi' - \varphi^\circ}{2} \cos\frac{\varphi' + \varphi^\circ}{2}$; d'ailleurs $\frac{\varphi' - \varphi^\circ}{2} = \frac{\delta\varphi^\circ + \delta\varphi}{2}$ $= \delta\varphi - \frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ$, et $\frac{\varphi' + \varphi^\circ}{2} = \varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ$; donc

$$\delta^2 E(\varphi^\circ) = -2c^2 \sin\alpha \cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ) \sin(\delta\varphi - \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ) \sin\varphi,$$

ou en faisant comme ci-dessus $\frac{1}{2}\delta^2\varphi^\circ = -\omega$,

$$\delta^2 E(\varphi^\circ) = -2c^2 \sin\alpha \cos(\varphi-\omega) \sin(\delta\varphi+\omega) \sin\varphi.$$

J'observe maintenant qu'on a $2\sin\varphi\cos(\varphi-\omega) = \sin(2\varphi-\omega) + \sin\omega$; mais $\sin\omega = k\sin(2\varphi-\omega)$; donc $2\sin\varphi\cos(\varphi-\omega) = (1+k)\sin(2\varphi-\omega)$; donc

$$\delta^2 E(\varphi^\circ) = -c^2(1+k)\sin\alpha\sin(2\varphi-\omega)\sin(\delta\varphi+\omega),$$

ou enfin

$$\delta^2 E(\varphi^\circ) = -2c\sqrt{k}.\sin(2\varphi-\omega)\sin(\delta\varphi+\omega).$$

Cette formule est rigoureuse, et elle est réduite à un état de simplicité qui la rend très propre au calcul logarithmique.

738. Ainsi en même tems qu'on calculera pour la Table des fonctions F, la quantité ω qui donne $\delta^2\varphi^\circ$, et ensuite $\delta\varphi$, par la valeur $\delta\varphi = \delta\varphi^\circ + \delta^2\varphi^\circ$, on aura tous les élémens nécessaires pour calculer $\delta^2 E\varphi^\circ$: on formera donc par cette seule formule, la colonne entière des différences secondes de la fonction E.

On voit que la différence seconde $\delta^2 E\varphi^\circ$ s'évanouit aux deux limites de la Table, lorsque $\varphi = 0$, et lorsque $\varphi = 90^\circ$; son *maximum* répond à une amplitude toujours plus petite que 45°.

D'un autre côté, la fonction $E\alpha$ est facile à déduire des mêmes élémens qui servent à déterminer α de manière qu'on ait $F\alpha = \frac{1}{100}F^1$, et cette fonction $E\alpha$ est en même temps la valeur de $\delta E0$, puisque $E0 = 0$, et qu'ainsi la différence $E\alpha - E0$ ou $\delta E0 = E\alpha$. Puis donc qu'on connaît le premier terme de la colonne des différences premières, et tous les termes de la colonne des différences secondes, on pourra immédiatement former la colonne entière des différences premières, et ensuite celle des fonctions $E\varphi$, dont le dernier terme devra être égal à la fonction complète E^1.

739. La méthode que nous venons d'expliquer pour former la Table des fonctions E est d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer. Et quand on considère aussi combien est facile la construction de la Table des fonctions F, puisqu'elle ne dépend que d'une seule formule trigonométrique rigoureusement exacte, on serait tenté de croire que cette manière de former des Tables des fonctions F et E, doit être adoptée de préférence à celle que nous avons exposée dans les chapitres précédens. Peut-être que l'exécution dévoilerait encore de nouveaux motifs de préférence; c'est ce que nous laissons à décider à ceux qui voudront entreprendre le long et utile travail de la construction de ces Tables.

Nous devons encore observer qu'il sera facile de vérifier aussi souvent qu'on voudra le calcul des fonctions E; car ayant $E\varphi - E\varphi^{\circ} = \delta E\varphi^{\circ}$, on tire des équations précédentes,

$$\delta E\varphi^{\circ} = E\alpha - c^2 \sin\alpha \sin\varphi^{\circ} \sin\varphi.$$

C'est l'expression d'un terme quelconque de la colonne des différences premières; et on voit que ces différences diminuent continuellement depuis la première égale à $E\alpha$, jusqu'à la dernière qui est à peu près $E\alpha - c^2 \sin\alpha$ ou $b^2\alpha$.

740. Pour donner un exemple des Tables construites suivant la méthode précédente, soit le module $c = \sin 45^{\circ}$, on trouvera par les formules de l'art. 71, la valeur de α qui satisfait à l'équation $F(\alpha) = \frac{1}{200} F1$, et les quantités qui en dépendent, comme il suit :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 31' 52'' 138076, \\
l \sin\alpha &= 7.96708\ 78960\ 70, \\
lk &= 5.03109\ 51356\ 95, \\
l(2c\sqrt{k}) &= 7.66606\ 25656\ 80, \\
E\alpha &= 0.00927\ 02406\ 00.
\end{aligned}$$

D'après ces données, on a calculé le commencement de la Table particulière pour le module $\sin 45^{\circ}$, comme on le voit ci-joint. La première colonne intitulée n, représente une valeur donnée de $F = \frac{nF^1}{200}$, et les colonnes suivantes donnent les valeurs correspondantes de l'amplitude φ et de la fonction E. Il est clair que pour toute valeur de F, comprise dans les limites de cette portion de Table, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{10} F^1$, on trouvera par interpolation les valeurs correspondantes de φ et de E, et les résultats devront s'accorder avec ceux que donne la Table II.

741. Il est bon d'observer que par la dernière méthode que nous venons d'exposer, on n'évite pas entièrement les difficultés que présente l'interpolation dans certains cas où c est très près de l'unité. On divise seulement la Table en un certain nombre de parties inégales, où l'interpolation peut se pratiquer avec à peu près le même degré de justesse; mais dans ce cas, les premières divisions comprennent un plus grand nombre de degrés de l'amplitude, ce qui exige qu'on ait recours, pour l'interpolation, à un plus grand nombre de différences; si on a, par exemple, le module $c = \sin 89^{\circ}$, la valeur de α qui donne $F\alpha = \frac{1}{200} F^1$ sera $\alpha = 1^{\circ} 33' 24'' 03669\ 3842$ cette valeur serait encore plus grande pour le module $c = \sin 89^{\circ} \frac{1}{2}$. Ainsi l'interpolation présenterait encore plus de difficultés dès le commencement

de la Table; inconvénient auquel ne sont pas sujettes les Tables construites d'après les méthodes du chap. III.

n.	φ.	$\delta\varphi$.	$\delta^2\varphi$.	$\delta^3\varphi$.	E.	δE.	δ^2E.	δ^3E.	δ^4E
0	0° 00′ 00″ 000000	31′ 52″ 138076	0″ 082157	82125	0.00000 00000 0	927 02406 0	7965 9	7961 8	82
1	0.31.52.138076	31.52.055919	0.164282	82062	0.00927 02406 0	926 94440 1	15927 7	7953 6	122
2	1. 3.44.193995	31.51.891637	0.246344	81967	0.01853 96846 1	926 78512 4	23881 3	7941 4	166
3	1.35.36.085658	31.51.645293	0.328311	81839	0.02780 75358 5	926 54631 1	31822 7	7924 8	202
4	2. 7.27.730925	31.51.316982	0.410150	81682	0.03707 29989 6	926 22808 4	39747 5	7904 6	247
5	2.39.19.047907	31.50.906832	0.491832	81491	0.04633 52798 0	925 83060 9	47652 1	7879 9	285
6	3.11. 9.954739	31.50.415000	0.573323	81271	0.05559 35858 9	925 35408 8	55532 0	7851 4	323
7	3.43. 0.369739	31.49.841677	0.654394	81018	0.06484 71267 7	924 79876 8	63383 4	7819 1	368
8	4.14.50.211416	31.49.187083	0.735612	80735	0.07409 51144 5	924 16493 4	71202 5	7782 3	401
9	4.46 39.398499	31.48.451471	0.816347	80421	0.08333 67637 9	923 45290 9	78984 8	7742 2	443
10	5.18.27.849970	31.47.635124	0.896768	80077	0.09257 12928 8	922 66306 1	86727 0	7697 9	482
11	5.50.15.485094	31.46.738356	0.976845	79702	0.10179 79234 9	921 79579 1	94424 9	7649 7	517
12	6.22. 2.223450	31.45.761511	1.056547	79298	0.11101 58814 0	920 85154 2	1 02074 6	7598 0	555
13	6.53.47.984961	31.44.704964	1.135845	78863	0.12022 43968 2	919 83079 6	1 09672 6	7542 5	597
14	7.25.32.689925	31.43.569119	1.214708	78400	0.12942 27047 8	918 73407 0	1 17215 1	7482 8	627
15	7.57.16.259044	31.42.354411	1.293108	77906	0.13861 00454 8	917 56191 9	1 24697 9	7420 1	661
16	8.28.58.613455	31.41.061303	1.371014	77386	0.14778 56646 7	916 31494 0	1 32118 0	7354 0	703
17	9. 0.39.674758	31.39 690289	1.448400	76835	0.15694 88140 7	914 99376 0	1 39472 0	7283 7	
18	9.32.19.365047	31.38.241889	1.525235		0.16609 87516 7	913 59904 0	1 46755 7		
19	10. 3.57.606936	31.36.716654			0.17523 47420 7	912 13148 3			
20	10.35.34.323590				0.18435 60569 0				

CHAPITRE VII.

Formules pour trouver les valeurs très approchées des Fonctions $E\varphi$, $F\varphi$, *lorsque l'amplitude* φ *n'excède pas une certaine limite.*

742. **L**ORSQUE l'angle φ est peu considérable, on a à très peu près, $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} = \cos c\varphi$; faisant donc $\Delta = \cos c\varphi$, on aura $E\varphi = \ldots.$ $\int d\varphi \cos c\varphi = \frac{1}{c}\sin c\varphi$, et $F\varphi = \int \frac{d\varphi}{\cos c\varphi} = \frac{1}{2c}\log\frac{1+\sin c\varphi}{1-\sin c\varphi} = \frac{1}{c}\log\tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}c\varphi)$. Ces valeurs sont exactes dans les cas extrêmes, lorsque $c=0$ et $c=1$; elles seront d'autant plus approchées dans les autres cas, que l'angle φ sera plus petit.

Pour savoir quel est le degré d'approximation de ces valeurs, on développera en série la quantité Δ, ce qui donne

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \varphi - \frac{1.1}{2.4} c^4 \sin^4 \varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6} c^6 \sin^6 \varphi - \text{etc.},$$

et en y substituant la valeur

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

on aura l'expression suivante, exacte aux quantités près de l'ordre $c^2\varphi^8$,

$$\Delta = 1 - \tfrac{1}{2} c^2(\varphi^2 - \tfrac{1}{3}\varphi^4 + \tfrac{2}{45}\varphi^6) - \tfrac{1}{8} c^4(\varphi^4 - \tfrac{2}{3}\varphi^6) - \tfrac{1}{16} c^6\varphi^6;$$

de là résulte $\int \Delta d\varphi$, ou

$$E = \varphi - \frac{c^2}{2}\left(\frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{15} - \frac{2\varphi^7}{315}\right) - \frac{c^4}{8}\left(\frac{\varphi^5}{5} - \frac{2\varphi^7}{21}\right) - \frac{c^6}{16} \cdot \frac{\varphi^7}{7}.$$

Désignons cette valeur par $E = \frac{1}{c} \sin c\varphi + Q$, nous aurons par le développement du premier terme,

$$E = Q + \varphi - \frac{1}{6} c^2\varphi^3 + \frac{1}{120} c^4\varphi^5 - \frac{1}{5040} c^6\varphi^7,$$

et par conséquent,

$$Q = \frac{b^2c^2}{30}\varphi^5 - \frac{b^2c^2}{1260}\varphi^7(4 - 11c^2);$$

on a donc la valeur très approchée,

$$(a) \qquad E\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{b^2c^2}{30}\varphi^5 - \frac{b^2c^2}{1260}\varphi^7(4 - 11c^2).$$

On trouverait par un calcul semblable,

$$(b) \qquad F\varphi = \frac{1}{c} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} c\varphi) - \frac{b^2c^2}{30}\varphi^5 + \frac{b^2c^2}{1260}\varphi^7(4 - 41c^2).$$

Ajoutant ces deux formules, on en tire une troisième non moins remarquable, savoir,

$$E\varphi + F\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{1}{c} \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} c\varphi) - \frac{b^2c^4}{42}\varphi^7.$$

743. La formule (a), réduite à son premier terme $\frac{1}{c} \sin c\varphi$, donnera sept décimales exactes si l'on a $\varphi < 6°$; elle en donnerait dix ou plus si on avait $\varphi < 1° \frac{1}{2}$.

En prenant les deux premiers termes, la formule $E\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{b^2c^2}{30}\varphi^5$ donnera sept décimales exactes, si on a $\varphi < 16° 4$, et dix décimales ou plus, si l'on a $\varphi < 6° 12$.

L'approximation sera à peu près semblable sur la valeur de $F\varphi$, selon qu'on la borne au premier ou aux deux premiers termes.

Si on tient compte de tous les termes de la formule (a), il n'y aura de négligée dans la valeur de $E\varphi$, qu'une partie dont le terme le plus grand est de l'ordre $\frac{b^2c^4}{1500}\varphi^9$, et ne pourra jamais excéder $\frac{1}{6000}\varphi^9$. L'erreur due à ce terme ne sera pas d'une unité décimale du dixième ordre, si on a $\varphi < 15°$, et elle ne sera pas d'une unité décimale du septième ordre, si on a $\varphi < 32°45$. Le même degré d'exactitude n'aura pas lieu dans la formule (b); et pour avoir sept décimales exactes, il ne faudra guère passer la limite $\varphi = 20°$.

744. *Exemple I.* Soit $c = \sin 45°$ et $\varphi = 10°$, la Table II donne les valeurs suivantes :

$$E\varphi = 0.17409\ 15655,$$
$$F\varphi = 0.17497\ 63019;$$

il faut les comparer à celles que donnent nos formules; et d'abord pour avoir la valeur de E, on calculera les deux premiers termes de la formule (a) comme il suit :

$$c\varphi = 7°4'\,15''\,84412 \qquad \varphi = \frac{\pi}{18}\ldots\ldots\ 9.24187\ 73\ 6$$

$$\begin{array}{llll}
\sin c\varphi\ldots\ldots & 9.09025\ 93615 & \varphi^5\ldots\ldots & 6.20938\ 68 \\
\frac{1}{c}\ldots\ldots & 0.15051\ 49978 & \frac{b^2c^4}{30}\ldots & -\ 2.07918\ 12 \\
\hline
\frac{1}{c}\sin c\varphi\ldots & 9.24077\ 43593 & (1)\ldots\ldots & 4.13020\ 56
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\sin c\varphi &= 0.17409\ 02140 \\
(1) &= \underline{\qquad\qquad 13496} \\
E\varphi &= 0.17409\ 15636.
\end{aligned}$$

On voit que les deux premiers termes donnent la valeur de $E\varphi$ avec huit décimales exactes, l'erreur n'étant que de dix-neuf unités décimales du dixième ordre. Il en sera de même pour la valeur de $F\varphi$ dont voici le calcul :

$$45° + \tfrac{1}{2}c\varphi = 48°32'7''\ 92206,$$
$$l\,\mathrm{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}c\varphi) = 0.05373\ 43422.$$

Ce log-tang. étant un logarithme vulgaire, il faudra le multiplier par M pour le changer en logarithme hyperbolique, comme la formule le suppose. Ainsi en appelant h le nombre précédent, on aura les logarithmes suivans, pour déterminer le premier terme B de la formule (b),

h....	8.73025 19367		
M...	0.36221 56887	B =	0.17497 76676
$\frac{1}{c}$....	0.15051 49978	$\frac{1}{30}b^2c^2\varphi^5$...	13496
B....	9.24298 26232	Fφ =	0.17497 63180.

On voit que les sept premières décimales de la valeur de Fφ sont exactes, et que l'erreur ne commence qu'à la huitième, où elle n'est pas de deux unités.

745. Pour obtenir une plus grande approximation, il faut tenir compte du troisième terme contenant φ^7. Or, puisqu'on a $c^2 = \frac{1}{2}$, la correction qu'il faut appliquer à Eφ, est égale à la correction précédente (1) multipliée par $\frac{\varphi^2}{28}$, de sorte qu'en appelant (2) cette seconde correction qui est additive, on aura $(2) = (1).\frac{\varphi^2}{28}$; de même la seconde correction de Fφ sera $-(1).\frac{11\varphi^2}{28}$.

(1)....	4.13020 56		0.17497 63180
$\frac{11\varphi^2}{28}$...	8.07798 94	(2)... —	161 5
(2)....	2.20819 50	Fφ =	0.17497 63018 5.

La correction (2) pour Eφ sera onze fois moindre que celle de Fφ; elle est donc de quinze unités décimales du dixième ordre, ce qui donne la valeur corrigée de Eφ, comme il suit :

	0.17409 15636
(2)...	+ 15
Eφ =	0.17409 15651.

On voit par conséquent que la valeur de Fφ s'accorde exactement avec celle de la Table II, et que la valeur de Eφ ne diffère de celle de la Table que de quatre unités décimales du dixième ordre; mais l'amplitude n'est que de 10°.

746. *Exemple II.* Soit $c = \sin 45°$ et $\varphi = 20°$, on trouve dans la Table II,

$$E\varphi = 0.34557\ 56213,$$
$$F\varphi = 0.35261\ 98854;$$

il faut comparer ces valeurs à celles que donneront nos formules. En voici le calcul :

$c\varphi =$	$14° 8' 31''68824$		
$\sin c\varphi$...	9.38797 35865	φ.....	9.54290 73633
$\frac{1}{c}$...	0.15051 49978	φ^5.....	7.71453 68165
A....	9.53848 85843	$\frac{b^2c^2}{30}$...—	2.07918 12460
A =	0.34553 224691	(1)....	5.63535 557
(1)...	+ 4 318725		
$E\varphi =$	0.34557 543416.		

Ainsi l'erreur de la formule, en prenant les deux premiers termes seulement, n'est que de deux unités décimales du septième ordre. Voyons à quoi elle se réduira en ajoutant le troisième terme, ou la correction $(2) = (1) \cdot \frac{\varphi^2}{28}$.

(1)....	5.63535 557		0.34557 54341 6
$\frac{\varphi^2}{28}$....	7.63865 67	(2) =	+ 1879 4
(2)....	3.27401 2	$E\varphi =$	0.34557 56221.

On voit que la valeur de $E\varphi$ n'est en erreur que de huit unités décimales du dixième ordre.

En calculant de même la valeur de $F\varphi$, on trouvera,

par les deux premiers termes.... $F\varphi = 0.35262\ 20054$,
et par les trois termes......... $F\varphi = 0.35261\ 99381$;

l'erreur du dernier résultat est de cinq unités décimales du huitième ordre.

747. *Exemple III.* Soit $c = \sin 45°$ et $\varphi = 30°$, on trouvera

par deux termes de la formule	$E\varphi =$ 0.51204 61509,	$F\varphi =$ 0.53566 01252
par la Table II........	0.51204 93225,	0.53562 27328
Différence.....	— 31716,	+ 3 73924
par trois termes de la formule	$E\varphi =$ 0.51204 93619,	$F\varphi =$ 0.53562 48033
par la Table II........	0.51204 93225,	0.53562 27328
Différence.....	+ 394,	+ 20705.

Par ces derniers résultats, on voit que l'erreur de la formule n'est que de quatre unités décimales du huitième ordre sur $E\varphi$; mais elle est de deux unités du sixième sur $F\varphi$.

Ainsi, à mesure que φ augmente, l'erreur croît dans une plus grande proportion sur la fonction F que sur la fonction E; on ne peut guère aller que jusqu'à 20° pour obtenir F avec sept décimales exactes, tandis qu'on peut aller jusqu'à 30° au moins, pour avoir E avec un pareil degré d'exactitude.

Au reste le cas de $c^2 = \frac{1}{2}$, tenant presque le milieu entre les cas extrêmes $c = 0$, $c = 1$, où les deux formules sont rigoureusement exactes, il y a lieu de croire que les erreurs de ces formules sont alors assez voisines de leur *maximum*, et que dans d'autres cas, les erreurs pourront être moindres; c'est ce que les exemples suivans vont faire voir pour une valeur de c très peu différente de l'unité.

748. *Exemple IV.* Soit $c = \sin 89°$; voici le résultat de nos formules, comparé à ceux de la Table de l'article 731, dans les trois hypothèses $\varphi = 10°$, $\varphi = 20°$, $\varphi = 30°$.

$\varphi = 10°$	$c\varphi = 9°\,59'\,54''\,517026$	$45° + \frac{1}{2}c\varphi = 49°\,59'\,57''\,258513$
1er terme...	0.17364 84467 4	0.17542 55557 6
2me.......	+ 16 4	− 16 4
	E = 0.17364 84484	F = 0.17542 55541
Par la Table.	0.17364 84482	0.17542 55540
Diff.....	+2	+ 1

Dans ce premier cas, l'erreur n'est que de une ou de deux unités sur la dixième décimale, ce qui laisse incertain si l'erreur est du côté de la formule ou du côté de la Table. Il n'y a pas lieu, comme on voit, d'appliquer le troisième terme de la formule.

$\varphi = 20°$	$c\varphi = 19°\,59'\,49''\,03405$	$45° + \frac{1}{2}c\varphi = 54°\,59'\,54''\,517025$
1er terme...	0.34202 22762	0.35637 62023
2me.......	+ 526	− 526
	0.34202 23288	0.35637 61497
3me.......	+ 11	− 56
	E = 0.34202 23299	F = 0.35637 61441
Par la Table.	0.34202 23300	0.35637 61479
Diff.....	− 1	− 38

On voit que la différence est insensible sur $E\varphi$, et qu'elle est à peine de quatre unités décimales du neuvième ordre sur $F\varphi$.

$\varphi = 30°$	$c\varphi = 29°59'43''55108$	$45° + \frac{1}{2}c\varphi = 59°59'51''77554$
1er terme...	0.50000 70891 6	0.54929 77237 4
2me.......	+ 3994 4	− 3994 4
	0.50000 74886	0.54929 73243
3me.......	+ 182	− 964
	E = 0.50000 75068	F = 0.54929 72279
Par la Table.	0.50000 75089	0.54929 72081
Diff.....	− 21	+ 198

On voit que dans ce troisième cas, l'erreur de la formule n'est que de deux unités décimales du neuvième ordre sur E, et de deux du huitième sur F, ce qui est une approximation très satisfaisante.

749. *Exemple V.* Soit encore $c = \sin 60°$ et $\varphi = 30°$, et supposons qu'on demande la valeur approchée de $F\varphi$; la formule est alors

$$F\varphi = \frac{1}{c}\, l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}c\varphi) - \frac{\varphi^5}{160}\left(1 + \frac{107}{168}\varphi^2\right).$$

En voici le calcul :

$$c\varphi = 25°58'50''7436, \quad 45° + \tfrac{1}{2}c\varphi = 57°59'25''3718,$$
$$l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}c\varphi) = 0.20404\ 85486.$$

Soit ce logarithme $= h$, le premier terme P de la formule sera $\frac{Mh}{c}$.....

h.....	9.30973 35101
M.....	0.36221 56887
$1 : c$.....	0.06246 93683
P.....	9.73441 85671
Ier terme....	0.54252 35153
IIme........	− 24 59649
	0.54227 75504
IIIme	− 4 29482
Donc valeur app. $F\varphi$ =	0.54223 46022
Valeur exacte...	0.54222 91100
Erreur de la formule..	+ 549.

On voit que, dans ce cas, l'erreur est de cinq unités décimales du sixième ordre.

750. Il résulte de tous ces exemples, que la formule (a) peut être employée avec sûreté pour donner la valeur $E\varphi$, tant que φ n'excédera pas $30°$; car, à cette limite, elle donnera encore sept décimales exactes. Il n'en est pas tout-à-fait de même de la formule (b), où il convient de ne pas prendre φ plus grand que $20°$, si on veut avoir au moins sept décimales exactes dans la valeur de $F\varphi$. La formule devient cependant plus exacte et permet de porter φ jusqu'à $30°$, lorsqu'on a $c < \sin 35°$, ou $c > \sin 75°$.

Avec ces restrictions, les formules (a) et (b) sont d'un usage extrêmement commode, et peuvent remplacer avec avantage les Tables elliptiques même les plus étendues, dans une partie considérable de ces Tables. En effet les calculs qu'exigent ces formules, sont en général plus simples que les interpolations d'une Table à double entrée, dans les cas où l'on voudrait avoir égard à toutes les différences influentes; mais il faut avouer que la Table à double entrée méritera à son tour la préférence, si l'on n'a pas besoin d'une si grande exactitude dans les résultats, et qu'on se contente de ceux qui peuvent être obtenus par les premières différences seulement, ou tout au plus par le concours des premières et des secondes différences.

CHAPITRE VIII.

Méthodes diverses pour calculer les valeurs approchées des fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, *lorsque l'amplitude* φ *excède la limite supposée dans le Chap. précédent.*

751. Lorsque l'angle φ est trop grand pour qu'on puisse déterminer les fonctions E et F avec une exactitude suffisante par la méthode du chapitre précédent, on pourra diminuer progressivement l'angle φ par la bissection des fonctions F, selon les formules données, art. 21.

Pour cet effet, soient φ', φ'', φ''', etc., les amplitudes qui résultent des bissections continuelles de la fonction $F\varphi$, en sorte qu'on ait

$$F\varphi' = \tfrac{1}{2} F\varphi, \quad F\varphi'' = \tfrac{1}{2} F\varphi', \quad F\varphi''' = \tfrac{1}{2} F\varphi'', \quad \text{etc.},$$

on aura en même temps,

$$\begin{aligned} 2E\varphi' - E\varphi &= c^2 \sin^2 \varphi' \sin \varphi, \\ 2E\varphi'' - E\varphi' &= c^2 \sin^2 \varphi'' \sin \varphi', \\ 2E\varphi''' - E\varphi'' &= c^2 \sin^2 \varphi''' \sin \varphi'', \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

et l'amplitude φ' se déduira de φ par les formules

$$c \sin \varphi = \sin \omega, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \omega};$$

on déduira semblablement φ'' de φ', φ''' de φ'', etc.

En formant ainsi la suite décroissante φ', φ'', φ''', etc., on parviendra bientôt à un terme $\varphi^n < 15^\circ$, et alors on déterminera aisément, par les formules du chapitre précédent, les valeurs des fonctions $E\varphi^n$, $F\varphi^n$, approchées jusqu'à huit décimales ou plus, desquelles on déduira les valeurs de $E\varphi$ et $F\varphi$, exprimées avec un degré peu différent d'approximation. Ces calculs ont l'avantage de ne point supposer connues les fonctions complètes; ils peuvent même servir à déterminer ces fonctions, puisque si on part de l'amplitude φ donnée par l'équation $\tang \varphi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, on aura..... $F\varphi = \frac{1}{2} F^1$, $E\varphi = \frac{1}{2} E^1 + \frac{1}{2}(1 - b)$; d'où il suit qu'ayant déterminé $F\varphi$ et $E\varphi$, on connaîtra les fonctions complètes F^1, E^1.

752. Une seconde méthode qui pourra dans certains cas être préférable à la méthode de bissection, consiste à calculer les amplitudes φ_2, φ_3, φ_4, etc., qui répondent aux fonctions multiples $F\varphi_2 = 2F\varphi$, $F\varphi_3 = 3F\varphi$, $F\varphi_4 = 4F\varphi$, etc. On les détermine par les formules

$$\begin{aligned} \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \varphi_2 &= \Delta \,\text{tang}\, \varphi, \\ \text{tang}\, (\tfrac{1}{2} \varphi_3 + \tfrac{1}{2} \varphi) &= \Delta \,\text{tang}\, \varphi_2, \\ \text{tang}\, (\tfrac{1}{2} \varphi_4 + \tfrac{1}{2} \varphi_2) &= \Delta \,\text{tang}\, \varphi_3, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dans lesquelles Δ est une quantité constante, telle qu'en faisant $c \sin \varphi = \sin \omega$, on a $\Delta = \cos \omega$.

Au moyen de ces formules, on prolongera la suite φ, φ_2, φ_3, etc., jusqu'à un terme $\varphi_n = 2k . \frac{1}{2} \pi \pm \psi$, qui approche d'un multiple pair de $\frac{1}{2} \pi$, de manière que la différence ψ, positive ou négative, soit assez petite pour qu'on puisse calculer facilement, par les formules du chapitre précédent, les valeurs approchées des fonctions $E\psi$, $F\psi$. De là il faudra déduire les valeurs des fonctions proposées $E\varphi$, $F\varphi$, au moyen des équations

$$\begin{array}{ll} F\varphi_n = 2kF^1 \pm F\psi & E\varphi_n = 2kE^1 \pm E\psi, \\ F\varphi_2 = 2F\varphi, & 2E\varphi - E\varphi_2 = c^2 \sin^2\varphi \sin\varphi_2, \\ F\varphi_3 = 3F\varphi, & E\varphi + E\varphi_2 - E\varphi_3 = c^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 \sin\varphi_3, \\ F\varphi_4 = 4F\varphi, & E\varphi_2 + E\varphi_3 - E\varphi_4 = c^2 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

753. Cette méthode, ainsi que celle de bissection, est fondée sur des formules trigonométriques très simples; cependant elles peuvent devenir d'un usage difficile dans certains cas, surtout dans ceux où c et $\sin\varphi$ sont à la fois peu différens de l'unité. En effet, les opérations nécessaires pour changer l'angle proposé φ en un plus petit, auquel la méthode du chapitre précédent soit applicable, peuvent, dans les cas dont il s'agit, être plus longues que celles qui servent à former la série des modules et celle des amplitudes, suivant la méthode générale des approximations, et alors celle-ci deviendrait préférable, tant par sa brièveté que par un degré d'exactitude indéfini.

C'est dans les différens cas particuliers qu'on pourra se décider sur le choix à faire entre ces méthodes, suivant le degré d'approximation qu'on veut obtenir; nous observerons seulement que l'on peut toujours supposer l'angle proposé φ plus petit que l'angle qui a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{b}}$. Car soient φ et ψ deux angles tels qu'on ait $\tang\varphi \tang\psi = \frac{1}{b}$, l'un de ces angles aura sa tangente $< \sqrt{\frac{1}{b}}$. D'ailleurs comme on a

$$F\varphi + F\psi = F^1,$$
$$E\varphi + E\psi = E^1 + c^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

il est visible qu'au moyen des deux fonctions qui se rapportent au plus petit des deux angles φ et ψ, on déterminera sans difficulté les fonctions qui se rapportent au plus grand.

754. *Exemple I.* Soit $c = \sin 45°$, $\varphi = 60°$, le calcul par la méthode de bissection se fera comme il suit :

$$\sin\omega = c\sin\varphi = \sqrt{(0.375)}.$$

$\sin\omega$....	9.78701 56339	$\omega = 37^\circ 45' 40'' 47807$
$\cos\frac{1}{2}\omega$.....	9.97598 05831	$\frac{1}{2}\omega = 18.52.50.23903\ 5$
$\sin\frac{1}{2}\varphi$.....	9.69897 00043	
$\sin\varphi'$....	9.72298 94212	$\varphi' = 31^\circ 53' 58'' 55322$
		$\frac{1}{2}\varphi' = 15.56.59.27661$
$\sin\varphi'$....	9.72298 94212	
c....	9.84948 50022	
$\sin\omega'$....	9.57247 44234	$\omega' = 21^\circ 56' 29'' 04240$
		$\frac{1}{2}\omega' = 10.58.14.52120$
$\sin\frac{1}{2}\varphi'$....	9.43900 88575	
$\cos\frac{1}{2}\omega'$....	9.99198 96871	
$\sin\varphi''$....	9.44701 91704	$\varphi'' = 16^\circ 15' 17'' 50460.$

L'angle φ'' étant suffisamment petit, il est inutile de pousser plus loin les calculs de la bissection, et en appliquant à l'angle φ'' la méthode du chapitre précédent, on trouvera les résultats suivans :

$$c\varphi'' = 11^\circ 29' 38'' 12432, \qquad 45^\circ + \tfrac{1}{2} c\varphi'' = 50^\circ 44' 49'' 06216.$$

$A =$	0.28180 18598	$B =$	0.28562 30721
1) +	1 53152	1) −	1 53152
2) +	440	2) −	4843
$E\varphi'' =$	0.28181 72190	$F\varphi'' =$	0.28560 72726.

Par la valeur de $F\varphi''$, on a immédiatement celle de $F\varphi = 4F\varphi''$, savoir,

	$F\varphi =$	1.14242 90904
Suivant la Table....	$F\varphi =$	1.14242 90578
Diff....		+ 326.

Ainsi l'erreur est d'environ trois unités décimales du huitième ordre.

Quant à la valeur de $E\varphi$, on la calculera comme il suit par les formules du n° 751,

$$\begin{array}{rl}
\sin^2\varphi'' \ldots & 8.89403\ 83408 \\
\sin\varphi' \ldots & 9.72298\ 94212 \\
c^2 \ldots & \underline{9.69897\ 00043} \\
\alpha' \ldots & 8.31599\ 77663 \\
 & \\
\alpha' = & 0.02070\ 13070 \\
2E\varphi'' = & \underline{0.56363\ 44380} \\
E\varphi' = & 0.54293\ 31310
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
c^2\sin^2\varphi' \ldots & 9.14494\ 88468 \\
\sin\varphi \ldots & \underline{9.93753\ 06317} \\
\alpha \ldots & 9.08247\ 94785 \\
 & \\
\alpha = & 0.12091\ 48046 \\
2E\varphi' = & \underline{1.08586\ 62620} \\
E\varphi = & 0.96495\ 14574 \\
\text{Par la Tab., } E\varphi = & \underline{0.96495\ 14560} \\
\text{Diff.....} & \qquad\qquad + 14.
\end{array}$$

Ainsi l'erreur sur $E\varphi$ n'est que de quatorze unités décimales du dixième ordre.

On aurait pu se borner à huit décimales dans tous ces calculs, et les résultats n'en auraient pas été moins exacts.

755. *Exemple II.* Soit encore $c^2 = \frac{1}{2}$, et l'angle φ tel qu'on ait... $\tang \varphi = \sqrt{6}$; cet angle pourrait être remplacé par celui de 30°, parce qu'on a $F\varphi + F(30^\circ) = F^1$; mais nous n'aurons point égard à cette propriété des fonctions complémentaires, laquelle ne nous servira que pour vérifier les résultats, et nous appliquerons directement au cas proposé la méthode qui précéde, par la multiplication des fonctions.

On aura d'abord $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)} = \sqrt{\frac{4}{7}}$, ce qui donnera les résultats suivans :

$$\begin{array}{rl}
\Delta \ldots. & 9.87848\ 09756\ 57 \\
\tang\varphi \ldots. & \underline{0.38907\ 56251\ 92} \\
\tang\frac{1}{2}\varphi_2 \ldots. & 0.26755\ 66008\ 49
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\varphi = & 67^\circ 47' 32'' 44438 \\
\frac{1}{2}\varphi_2 = & 61.37.41.57628 \\
\varphi_2 = & 123.15.23.15256.
\end{array}$$

Déterminant ensuite φ_3 par l'équation $\tang(\frac{1}{2}\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi) = \Delta \tang \varphi_2$, on trouvera

$$\varphi_3 = 194^\circ\ 5'\ 33''\ 85248.$$

Les calculs préliminaires se terminent ici à φ_3, parce que φ_3 excède 180° d'un angle plus petit que 15°. Soit cet angle $= \psi$, on aura $\varphi_3 = 180^\circ + \psi$, et

$$\psi = 14^\circ\ 5'\ 33''\ 85248.$$

On calculera donc les fonctions $E\psi$, $F\psi$, par la méthode du chapitre précédent, ce qui donnera

$$E\psi = 0.24473\ 40068, \quad F\psi = 0.24720\ 64817;$$

ensuite $E\varphi$ et $F\varphi$ se déduiront des équations

$$F\varphi = \tfrac{1}{3}(2F^1 + F\psi),$$
$$E\varphi = \tfrac{1}{3}(2E^1 + E\psi) + \tfrac{1}{3}c^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 (\sin\varphi + \sin\varphi_3),$$

dans lesquelles on mettra les valeurs de F^1 et E^1 tirées de la Table I; on aura ainsi pour résultat

$$E\varphi = 1.07004\ 95812, \quad F\varphi = 1.31845\ 19452.$$

Ces valeurs se vérifient au moyen des équations

$$F\varphi + F(30^\circ) = F^1,$$
$$E\varphi + E(30^\circ) = E^1 + c^2 \sin\varphi \sin 30^\circ = E^1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{6}{7}},$$

dans lesquelles substituant les valeurs données par la Table, on trouve

$$E\varphi = 1.07004\ 95798, \quad F\varphi = 1.31845\ 19441.$$

Ainsi l'erreur des résultats précédens n'est que de onze unités décimales du dixième ordre sur la fonction F, et de quatorze des mêmes unités sur la fonction E.

On peut remarquer que la méthode par bissection doit donner en général des résultats moins exacts que la méthode par multiplication. La raison en est que les fonctions $E\varphi$, $F\varphi$ se déduisent des fonctions auxiliaires par multiplication dans le premier cas, et par division dans le second. Il semble d'ailleurs que les calculs sont plus simples par la méthode de multiplication, parce que la quantité Δ est constante dans toutes les formules qui servent à déterminer φ_2, φ_3, etc.

756. *Exemple III.* Soit $c = \sin 60^\circ$ et $\tang\varphi = \sqrt{2}$; cette valeur de φ est telle qu'on a $F\varphi = \frac{1}{2}F^1$: ainsi on pourra vérifier immédiatement par la Table I, les résultats suivans que donne la méthode de bissection.

$\sin\varphi$...	9.91195 43705	$\varphi = 54^\circ 44' 8'' 197146$
c...	9.93753 06317	$\frac{1}{2}\varphi = 27.22.4.098573$
$\sin\omega$...	9.84948 50022	$\omega = 45^\circ$, $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{(\sin 15^\circ . \sqrt{\tfrac{2}{3}})}$
$\sin\frac{1}{2}\varphi$...	9.66247 53005	
$\cos\frac{1}{2}\omega$...	9.96561 53459	
$\sin\varphi'$...	9.69685 99546	$\varphi' = 29^\circ 50' 23'' 27549$
c...	9.93753 06317	$\frac{1}{2}\varphi' = 14.55.11.63775$
$\sin\omega'$...	9.63439 05863	$\omega' = 25^\circ 31' 32'' 07988$
		$\frac{1}{2}\omega' = 12.45.46.03994$
$\sin\frac{1}{2}\varphi'$...	9.41072 39499	
$\cos\frac{1}{2}\omega'$...	9.98913 51266	
$\sin\varphi''$...	9.42158 88273	$\varphi'' = 15^\circ 18' 25'' 18513.$

D'après cette valeur de φ'', on calculera les fonctions $E\varphi''$, $F\varphi''$ par la méthode du chapitre précédent, et on aura les résultats suivans :

$$c\varphi'' = 13^\circ 15' 22'' 49020, \quad 45^\circ + \tfrac{1}{2} c\varphi'' = 51^\circ 37' 41'' 24510.$$

$A =$	0.26478 03649 6	$B =$	0.26957 33608 6
1) +	85058 3	1) —	85058 3
2) +	614 3	2) —	3866 6
$E\varphi'' =$	0.26478 89322 2	$F\varphi'' =$	0.26956 44683 7
		$F\varphi = 4F\varphi'' =$	1.07825 78735
		Par la Table..	1.07825 78237
		Diff..	+ 498.

Calculant ensuite $E\varphi$ par les formules du n° 751, on trouvera

$$E\varphi = 0.85552\ 80106;$$

ce résultat se vérifie par l'équation $E\varphi = \frac{1}{2} E^1 + \frac{1}{2}(1 - b) = \frac{1}{2} E^1 + \frac{1}{4}$; et comme on a $E^1 = 1.21105\ 60275\ 6845$, il en résulte

$$E\varphi = 0.85552\ 80137\ 84225;$$

d'où l'on voit que l'erreur sur F est de cinq unités décimales du huitième ordre, mais que l'erreur sur E n'est que de trois unités décimales du neuvième ordre.

Ces erreurs paraissent plus grandes pour le module sin 60° que pour le module sin 45° ; mais il y a à cet égard un *maximum*, passé lequel les erreurs diminuent à mesure que le module augmente. C'est ce qu'on verra par l'exemple suivant.

757. ***Exemple IV.*** Soit $c = \sin 89^\circ, \varphi = 75^\circ$; on trouve par les méthodes directes,

$$E\varphi = 0.96608\ 74510\ 14,$$
$$F\varphi = 2.02664\ 73981\ 80.$$

En appliquant au même cas la méthode de bisection, on aura les résultats suivans :

$\sin\varphi'$...	9.88488 58911	$\varphi'' =$	$27^\circ 51' 43'' 67900$
$\sin\varphi''$...	9.66963 81849	$c\varphi'' =$	27.51.28.40226
$E\varphi'' =$	0.46735 16166 5	$F\varphi'' =$	0.50666 18602 5
$E\varphi' =$	0.76719 73904 3	$F\varphi' =$	1.01332 37205
$E\varphi =$	0.96608 74478	$F\varphi =$	2.02664 74410
Val. exacte....	510		3982
Erreur	— 32		+ 428.

L'erreur est donc de quatre unités décimales du huitième ordre sur F, et de trois unités du neuvième ordre sur E.

758. Nous joindrons ici le calcul du même exemple par les formules générales données art. 89.

D'après le module donné $c = \sin 89°$, on formera d'abord l'échelle des modules, et on en déduira la valeur de K, comme il suit :

c....	9.99993 38498 0922	b....	8.24185 53184 2289
c'....	9.99999 99987 4053	b'....	5.88171 67931 8966
$\frac{c'}{c}$....	0.00006 61489 3151	b''...	1.16137 35963 1083
K....	0.00003 30744 6565.		

Il faudra ensuite calculer φ' par l'équation $\sin(2\varphi - \varphi') = c \sin \varphi$, ce qui donnera

$$\varphi' = 74°59'\ 1''440615.$$

Enfin on calculera φ'' par l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi'') = c' \sin \varphi'$, ou plus simplement par l'équation $\tang(\varphi' - \varphi'') = b'' \tang \varphi''$, qui se réduit à $\varphi' - \varphi'' = b'' \tang \varphi''$; on en déduira

$$\varphi' - \varphi'' = \quad 0''00111\ 49$$
$$\varphi'' = 74°\ 59'\ 1''\ 43950.$$

Cela posé, la valeur de $F\varphi$ se calculera par les formules $h = \ldots\ldots$ log tang $(45° + \frac{1}{2}\varphi')$; $F = KMh$, et on trouvera par les Tables à dix décimales seulement,

$$F\varphi = 2.02264\ 73980.$$

759. Quant à la valeur de $E\varphi$, elle doit être déduite de la formule générale de l'art. 89, qu'on peut mettre sous cette forme :

$$\begin{aligned} E\varphi = L'F\varphi + c^2 \sin\varphi &+ 2c \sin\varphi' \left(b' + 2\sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) \\ &+ 4c^{\frac{1}{2}} \sin\varphi'' \left(b'' + 2\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2}\right) \\ &+ \frac{8\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} \sin\varphi''' \left(b''' + 2\sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi'''}{2}\right) \\ &+ \frac{16\sqrt{c}}{\sqrt{(c'c'')}} \sin\varphi^{\text{IV}} \left(b^{\text{IV}} + 2\sin^2 \frac{\varphi''' - \varphi^{\text{IV}}}{2}\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Dans l'exemple dont il s'agit, on pourra faire $L = \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K}$, et on trouvera les valeurs suivantes des cinq premiers termes auxquels se réduit cette formule,

1°. $c^2 \sin\varphi$	0.96563 16183 3
2°. $\mathrm{LF}\varphi$	0.00030 86564 6
3°. $2cb' \sin\varphi'$	14 70927 8
4°. $4c \sin\varphi' \sin^2\frac{\varphi-\varphi'}{2}$ ...	778 4
5°. $4c^{\frac{1}{2}} b'' \sin\varphi''$	56 0
Somme..... $\mathrm{E}\varphi =$	0.96608 74510 1.

On voit que, pour avoir la valeur de $\mathrm{E}\varphi$ exacte jusqu'à la dixième décimale, il a fallu calculer cinq termes de la formule générale; mais ces calculs peuvent être considérablement simplifiés par l'emploi d'une autre formule, ainsi qu'on le verra dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IX.

Réduction de la formule qui exprime la fonction $\mathrm{E}\varphi$, *dans la méthode des modules croissans.*

760. La valeur de $\mathrm{E}\varphi$ que nous avons donnée dans l'exemple précédent, d'après les formules de l'article 89, n'étant pas assez simple pour être employée dans les calculs courans de la seconde des fonctions elliptiques, nous avons cherché une autre formule par laquelle ces calculs fussent réduits au plus grand degré de simplicité dont ils sont susceptibles, et nous y sommes parvenus de la manière suivante :

Après avoir formé la série des modules croissans c, c', c''... et celle de leurs complémens b, b', b''... il faut calculer la suite des amplitudes décroissantes φ, φ', φ''... jusqu'à une limite qui est déterminée, ainsi que celle des modules, par le degré d'exactitude qu'on veut obtenir. Ces amplitudes se calculent directement par les formules $\sin(2\varphi'-\varphi) = c\sin\varphi$, $\sin(2\varphi''-\varphi') = c'\sin\varphi'$, etc.; mais, quand on est parvenu à celle où le module correspondant c est trop peu différent de l'unité, il convient de remplacer cette formule par l'équation correspondante de la suite $\tang(\varphi-\varphi') = b'\tang\varphi'$, tang $(\varphi' - \varphi'') = b''$ tang φ'', etc., d'où l'on tirera un résultat beaucoup plus exact.

Connaissant ainsi la limite Φ de la suite $\varphi, \varphi', \varphi''$, etc., que nous supposerons, par exemple, se confondre sensiblement avec le quatrième terme φ''', on aura la valeur de $F\varphi$ par l'équation $F\varphi = K \log \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\Phi)$, dans laquelle le logarithme est hyperbolique; prenant donc dans les tables le logarithme vulgaire $l \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\Phi) = H$, on aura $F\varphi = KMH$; quant à la valeur de K, elle est, comme on sait, $K = \sqrt{\left(\frac{1}{c} \cdot c'c''c'''\right)}$.

761. Cela posé, la valeur de $E\varphi$ pourra être ainsi réprésentée

$$E\varphi = L'F\varphi + Pc \sin \varphi,$$

et il s'agit de calculer les deux termes dont elle est composée.

Le premier se trouve facilement par la valeur déjà connue de la fonction $F\varphi$ et par le coefficient L' que nous avons déjà réduit à la forme la plus simple dans le calcul des fonctions complètes (art. 652); tout se réduit donc à chercher la valeur du second terme $Pc \sin \varphi$. C'est ce que nous obtiendrons par la première forme de la valeur de $\psi(\mu)$ donnée dans l'art. 89; ainsi nous aurons à réduire la formule

$$P \sin \varphi = \frac{2^\mu c^\mu \sin \varphi^\mu}{\sqrt{(cc'c'' \ldots c^{\mu-1})}} - \sin \varphi - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \varphi' - \frac{4}{\sqrt{cc'}} \sin \varphi'' \ldots - \frac{2^{\mu-1} \sin \varphi^{\mu-1}}{\sqrt{(cc'c''c^{\mu-2})}}.$$

Pour cet effet, soit $\varphi - \varphi' = \omega'$, $\varphi' - \varphi'' = \omega''$, $\varphi'' - \varphi''' = \omega'''$, etc., on aura les équations tang $\omega' = b'$ tang φ', tang $\omega'' = b''$ tang φ'', etc.; la première donne $\sin \varphi = \sin(\varphi' + \omega') = (1 + b') \sin \varphi' \cos \omega' = \frac{c'}{\sqrt{c}} \sin \varphi' \cos \omega'$, et on en déduit successivement

$$\sin \varphi' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \omega'}, \quad \sin \varphi'' = \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \omega''} = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \omega' \cos \omega''},$$
$$\sin \varphi''' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sqrt{c''}}{c'''} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''}, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans celle de $P \sin \varphi$, et faisant, pour abréger, $c' \cos \omega' = r'$, $c'' \cos \omega'' = r''$, etc., on aura

$$P = \frac{2^\mu c^\mu}{r'r''r''' \ldots r^\mu} - 1 - \frac{2}{r'} - \frac{4}{r'r''} \ldots\ldots - \frac{2^{\mu-1}}{r'r'' \ldots r^{\mu-1}}.$$

Cette formule peut donner tel degré d'approximation qu'on voudra, mais il convient d'examiner successivement les différens cas qui peuvent se rencontrer dans les applications.

762. Supposons qu'à cause de la diminution très rapide des angles ω', ω'', ω''', etc., la différence $1-\cos\omega'''$ soit négligeable, on aura en même temps avec une exactitude suffisante $c'''=1$, $\cos\omega'''=1$, ce qui donnera

$$P=\frac{4}{r'r''}-\frac{2}{r'}-1.$$

Dans la même hypothèse, on doit regarder comme négligeable la quantité $(1-r'')^2$, de sorte qu'on pourra faire $1-2r''+r''^2=0$, ou $\frac{2}{r''}-1=\frac{1}{r''^2}$, la valeur de P à deux termes seulement, savoir :

$$P=\frac{2}{r'r''^2}-1.$$

Supposons $\log r'r''^2=-t$, t sera presque toujours une quantité fort petite ; cette quantité étant donnée, on en tirera $r'r''^2=e^{-Mt}$, ensuite

$$P=2e^{Mt}-1=e^{2Mt}[1-(1-e^{-Mt})^2]\text{ ; donc}$$
$$\log P=2t-m(1-e^{-Mt})^2-\tfrac{1}{2}m(1-e^{-Mt})^4-\tfrac{1}{3}m(1-e^{-Mt})^6-\text{etc.};$$

et en développant jusqu'aux t^3 seulement,

$$\log P=2t-Mt^2+M^2t^3.$$

Cette formule sera très commode pour calculer le second terme $Pc\sin\varphi$ de la valeur de $E\varphi$, si toutefois les quantités de l'ordre t^4 peuvent être négligées.

763. Si l'on veut pousser l'approximation plus loin, et qu'on regarde seulement comme négligeable la quantité $1-\cos\omega^{\text{iv}}$, ainsi que $1-c^{\text{iv}}$, la valeur de P deviendra

$$P=\frac{8}{r'r''r'''}-\frac{4}{r'r''}-\frac{2}{r'}-1\text{ ;}$$

et parce que dans le même cas on peut regarder comme nulle la quantité $(1-r''')^2$, ce qui donne $\frac{2}{r'''}-1=\frac{1}{r'''^2}$, on aura plus simplement

$$P=\frac{4}{r'r''r'''^2}-\frac{2}{r'}-1.$$

Pour faciliter le calcul de cette formule, on pourra profiter de la réduction indiquée dans l'article précédent, en l'appliquant à la quantité $P'=\frac{2}{r''r'''^2}-1$; on aura ainsi

$$P=\frac{2P'}{r'}-1\text{ ;}$$

alors le terme $Pc \sin \varphi$ se réduit $\frac{2P'c \sin \varphi}{r'} - c \sin \varphi$; et parce que $r' = c' \cos \omega' = \frac{\sqrt{c} . \sin \varphi}{\sin \varphi'}$, on aura simplement $Pc \sin \varphi = 2\sqrt{c} . P' \sin \varphi' - c \sin \varphi$, ce qui dispensera de calculer $\cos \omega'$. De plus, comme $c \sin \varphi = \sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{2} \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2} \cos(\theta + \varphi)$, on voit que dans beaucoup de cas, cette quantité pourra se trouver immédiatement par la Table des sinus naturels.

Nous observerons, enfin, que la valeur de P peut aussi s'exprimer par cette série convergente :

$$P = 1 + \frac{2(1 - r')}{r'} + \frac{4(1 - r'')}{r'r''} + \frac{8(1 - r''')}{r'r''r'''} + \text{etc.},$$

au moyen de laquelle l'approximation peut être poussée aussi loin qu'on voudra. Les deux premiers termes se réduisent à $\frac{2}{r'} - 1$; quant aux suivans qui décroissent rapidement, ils sont faciles à calculer par les formules $\log r = - t$, $\log (1 - r) = \log (Mt) - \frac{1}{2} t + \frac{1}{24} Mt^2$.

Pour l'usage de ces nouvelles formules, il faut pouvoir calculer avec un degré suffisant de précision les log-cosinus des angles ω, ω', ω'', etc., qui décroissent très rapidement. Or on a pour cet objet les formules

$$\log \cos \omega = - N_1 \omega^2 - N_2 \omega^4 - N_3 \omega^6 - N_4 \omega^8 - \text{etc.},$$
$$\log \sin \omega = \log \omega - \frac{1}{3} N_1 \omega^2 - \frac{1}{15} N_2 \omega^4 - \frac{1}{63} N_3 \omega^6 - \frac{1}{255} N_4 \omega^8 - \text{etc.},$$

où les diviseurs 3, 15, 63, 255, etc., représentent $2^2 - 1$, $2^4 - 1$, $2^6 - 1$, $2^8 - 1$, etc.

Lorsque l'arc ω ne surpasse pas 5°, si on n'a pas besoin de plus de quatorze décimales, on aura avec une exactitude suffisante les valeurs logarithmiques des coefficiens, comme il suit :

N_1.... 9.33675 43156 37	N_3.... 7.98457 180
N_2.... 8.55860 30653	N_4.... 7.46683 3.

764. *Exemple I.* Supposons qu'on veuille calculer avec toute l'exactitude que comportent des Tables à quatorze décimales, les fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, pour le module $c = \sin 81°$ et l'amplitude $\varphi = 75°$.

Il faut d'abord tirer de la Table VI l'échelle des modules et log K, comme il suit :

c....	9.99461 99270 6508	b....	9.19433 24413 5701
c'....	9.99999 16689 5938	b'....	7.79196 83022 3974
c''....	9.99999 99999 8002	b''....	4.98188 49441 5219
K...	0.00268 58709 3716	b'''...	$\bar{9}$.36170 98969 9640.

On procédera ensuite au calcul de φ' par l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi$, et par les formules ordinaires pour l'usage des Tables.

c..........	9,99461 99270 6508	angle cherché.. $2\varphi' - \varphi = A$,
$\sin\varphi$.......	9,98494 37781 0267	angle approché. $a = 72° 56$,
$\sin(2\varphi' - \varphi)$	9,97956 37051 6775	$2a = 145.12$,
$\sin a$.......	9,97956 26352 3206	
	$r =$ 10699 3569	

$$l \sin A = l \sin a + r,$$

$$p = \frac{\frac{1}{2} M r}{\cos^2 a},$$

$$A = a + p \sin^2 a \left(1 + p + p^2 \cdot \frac{4 - 2\cos 2a}{3}\right),$$

r.........	4,02935 76746	a + (1) =	72°,56044 93263 4442
$\frac{1}{2}$M.......	0,06118 56930 4	(2).....	61 6186
séc²a......	1,04660 65030 3	(3).....	16
p.........	5,13714 98706 7	$2\varphi' - \varphi$ =	72,56044 93325 0644
sin $2a$.....	9,75728 93793 8	φ =	75
R°........	1,75812 26324 1	φ' =	73,78022 46662 5322
(1)........	6,65256 18824 6		
p.........	5,13714 987		
(2)........	1,78971 175		
p.........	5,13714 987		
$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos 2a$	0,27421 200		
(3)........	7,20107 36.		

La valeur de φ' réduite pour les Tables à dix décimales, savoir : .... $\varphi' = 73° 46' 48'', 8088$, servira à calculer par l'équation $\sin(2\varphi'' - \varphi') = c' \sin\varphi'$, une première valeur approchée de φ''; cette valeur....... $\varphi'' = 73° 46' 42'', 00876$, étant substituée dans le second membre de l'équation $\tang(\varphi' - \varphi'') = b'' \tang\varphi''$, on en déduira facilement une valeur beaucoup plus approchée de $\varphi' - \varphi''$; faisant pour cet effet $b'' \tang\varphi'' = p$; on aura $\varphi' - \varphi'' = R° p \left(1 - \frac{p^2}{3}\right)$; en voici le calcul :

b''......	4,98188 49441 5
tang φ''..	0,53620 11498 3
p.......	5,51808 60939 8
R°......	1,75812 26324 1
(1).....	7,27620 87263 9
p^2......	1,03617 2188
$\frac{1}{3}$.......	9,52287 8745
(2).....	7,83525 966

(1)...... =	0°,00188 88989 5528
(2)......	— 68
$\varphi' - \varphi''$ =	0,00188 88989 546
φ'	73,78022 46662 532
φ'' =	73,77833 57672 986
$\varphi'' - \varphi'''$ =	45 293
φ''' =	73,77833 57627 693;

la différence $\varphi'' - \varphi'''$ a été calculée semblablement par l'équation $\varphi'' - \varphi''' = \mathrm{R}^\circ\, b'''\, \text{tang}\, \varphi'''$. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, et on peut prendre φ''' pour la limite Φ, ce qui donnera

$$45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi = 81^\circ{,}88916\ 78813\ 8465.$$

Soit $a = 81^\circ{,}89$, $x = 0^\circ{,}00083\ 21186\ 1535$, on calculera la valeur de $\mathrm{H} = l\,\text{tang}\,(a - x)$ par les formules

$$p = \frac{x}{\sin 2a},\quad l\,\text{tang}\,(a - x) = l\,\text{tang}\,a - r,$$
$$r = 2mp\left(1 + p\cos 2a + p^2 \cdot \frac{2 + 2\cos^2 2a}{3}\right);$$

on aura ensuite $\mathrm{F}\varphi = \mathrm{KMH}$; voici ce calcul :

R°x.......	6,92018 52377
R°........	1,75812 26324
x.........	5,16206 26053
sin $2a$.....	9,44611 18205
p.........	5,71595 07848
$2m$........	9,93881 43070
(1)........	5,65476 50918
p.........	5,71595 07848
cos $2a$.....	9,98236 00014
(2)........	1,35307 588
....	5,65476 51
p^2........	1,43190 16
$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos^2 2a$	0,10765 70
(3)........	7,19432 37

$a =$ 81°,89	(1).	0,00004 51611 60334
$2a =$ 163,78	(2).	— 22 54633
	(3).	+ 156
	r =	0,00004 51589 0586
	tang a	0,84618 77314 7040
	H =	0,84614 25725 6454

H...	9,92744 35465 6283
M...	0,36221 56886 9946
K...	0,00268 58709 3716
log φ =	0,29234 51061 9945.

Connaissant ainsi log $F\varphi$, nous allons procéder au calcul de $E\varphi = L'F\varphi + Pc \sin\varphi$. La première partie dépend du coefficient L' qui se calcule par les formules

$$L' = \tfrac{1}{2} b^2 K^{\frac{1}{2}} . (c'')^{\frac{1}{4}} (1 - r), \quad r = \tfrac{1}{4} . \frac{b'b''}{\sqrt{K}};$$

il en resulte

log L'......	=	8,08897 78160 8327
$lF\varphi$.......		0,29234 51061 9945
		8,38132 29222 8272
$L'F\varphi$.......	=	0,02406 15124 3297

Pour avoir la valeur de P, il faut reprendre les valeurs trouvées de ω', ω'', ω''', savoir :

$$\omega' = \varphi - \varphi' = 1^{\circ}21977\ 53337\ 468,$$
$$\omega'' = \varphi' - \varphi'' = 0{,}00188\ 88989\ 546,$$
$$\omega''' = \varphi'' - \varphi''' = 0{,}00000\ 00045\ 293,$$

et calculer les logarithmes de cos ω', cos ω'', cos ω''', par la formule du nº. 763; voici le calcul du premier :

ω'	8,32815 72144 14	ω'^4	3,31262 88	(1).... =	0,00009 84166 87719
ω'^2	6,65631 44288 28		8,55860 31	(2)....	74 34160
	9,33675 43156 37	(2)	1,87123 19	(3)....	898
(1)	5,99306 87444 65	ω'^6	9,96894	1 : cos ω'	0,00009 84241 2278
			7,98457	1 : c'...	0,00000 83310 4062
		(3)	7,95351	1 : r'...	0,00010 67551 6340.

Le calcul de cos ω'' se fera par un seul terme, comme il suit :

ω''......	5,51808 609	1 : cos ω''....	0,00000 00002 3602
ω''^2.....	1,03617 218	1 : c''.......	1998
	9,33675 432	1 : r''.......	0,00000 00002 5599
(1)......	0,37292 650		

A l'égard de ω''', la petitesse de cet angle permet de négliger entièrement $1 - \cos\omega'''$, ainsi que $1 - c'''$, ce qui donne $r''' = 1$. Ainsi la valeur de $Pc \sin\varphi$ se réduit, dans ce cas, aux deux seuls termes $\frac{2c \sin\varphi}{r'r''^2} - c \sin\varphi$. Voici le calcul du premier :

2........	0,30102 99956 6398	
$c\sin\varphi$....	9,97956 37051 6775	
$1:r'$.....	10 67551 6340	
$1:r''^2$....	5 1198	
Z........	0,28070 04565 0711	Z = 1,90853 64403 8184.

Le second terme $c\sin\varphi$, ou sin 81° sin 75°, est la même chose que $\frac{1}{2}$ sin 84° + $\frac{1}{2}$ sin 66°, dont la valeur se trouve immédiatement par la Table III, $= 0,95403\ 36765\ 0544$;
de ces deux termes résulte $Pc\sin\varphi = 0,95450\ 27638\ 7640$
d'ailleurs on a déjà trouvé $L'F\varphi = 0,02406\ 15124\ 3297$
donc la fonction cherchée $E\varphi = 0,97856\ 42763\ 0937$
d'ailleurs le log connu de $F\varphi$ donne $F\varphi = 1,96040\ 18613\ 8371$.

Dans cet exemple où le nombre $t = -\log r'r''^2$ est assez petit, on aurait pu abréger le calcul de la partie $Pc\sin\varphi$ par la formule de l'art. 762, comme il suit :

t....... =	0,00010 67556 7538	t......	6,02839 09724
		t^2......	2,05678 19448
$2t$...... =	0,00021 35113 5076	M.....	0,36221 56887
Mt^2........	— 262 4204	Mt^2....	2,41899 76335
M^2t^3.......	+ 645	M^2t^3...	8,80960 43.
P..........	0,00021 34851 1517		
$c\sin\varphi$.....	9,97956 37051 6775		
$Pc\sin\varphi$.....	9,97977 11092 8292		

On tire de là $Pc\sin\varphi = 0,95450\ 27638\ 7645$, résultat qui ne diffère du précédent que dans le quatorzième chiffre dont l'exactitude est toujours incertaine, tant par l'erreur des Tables que par celle des parties proportionnelles.

765. Nous remarquerons que, lorsque le logarithme t est aussi petit que dans l'exemple précédent, on peut calculer la partie $Pc\sin\varphi$ de la valeur de $E\varphi$, d'une manière encore plus simple que par la formule de l'article 762. Car faisant toujours $t = -\log(r'r''^2)$, ce qui donne $r'r''^2 = e^{-Mt}$, on aura $\frac{2}{r'r''^2} - 1 = 2e^{Mt} - 1$; soit cette quantité $= 1 + z$, afin qu'on ait... $Pc\sin\varphi = c\sin\varphi + cz\sin\varphi$; de la valeur $z = 2(e^{Mt} - 1)$............

$= 2e^{\frac{1}{2}Mt}\left(e^{\frac{1}{2}Mt} - e^{-\frac{1}{2}Mt}\right) = 2Mt\,.\,e^{\frac{1}{2}Mt}\left(1 + \frac{1}{24}M^2t^2 + \text{etc.}\right)$, on déduira

$$\log z = \log(2Mt) + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{24}Mt^2;$$

et par cette formule, on calculera facilement le petit terme $cz \sin\varphi$ qui doit être ajouté à $c \sin\varphi$; en voici l'application

$\log t$... =	6,02839 09724
$l2M$... =	0,66324 56843 6
$\frac{1}{2}t$.....	5 33778 4
$\frac{1}{24}Mt^2$..	10 9
$\log z$... =	6,69169 00356 9
$l(c \sin\varphi)$	9,97956 37051 7
(1)....	6,67125 37408 6

(1).... =	0,00046 90873 7106
$c \sin\varphi$..	0,95403 36765 0544
$Pc \sin\varphi$. =	0,95450 27638 7650.

Ce résultat s'accorde encore avec les précédens, aussi bien que cela peut être, en n'employant, pour le calcul des parties accessoires, que des logarithmes à dix décimales.

766. *Exemple II.* Soit proposé de trouver les fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, pour l'amplitude $\varphi = 45°$, et le module sin 48°, dont les élémens sont, d'après la Table VI,

c......	9,87107 34581 4351	b.....	9,82551 08951 7436
c'.....	9,99523 32536 9413	b'.....	9,16835 48482 6552
c''.....	9,99999 34601 5255	b''....	7,73940 33718 1465
c'''....	— 1231	b'''....	4,87675 32981 2387.
K.....	0,06207 66278 45585		

Voici d'abord le calcul de φ' et sin φ'.

c...........	9,87107 34581 4351	a=31° 70 $\frac{1}{2}r$.	4,66130 52942
$\sin\varphi$........	9,84948 50021 6801	$2a$=63.40 M.	0,36221 56887
$\sin(2\varphi'-\varphi)$..	9,72055 84603 1152	séc$^2 a$.	0,14033 36959 1
$\sin a$.........	9,72054 92910 3036	p....	5,16385 46788 1
r =	91692 8116	sin $2a$...	9,95141 24387 4
$l \sin A = l \sin a + r$		R''......	5,31442 51331 8
$a + (1) =$	31°42'2'', 68962 8207	(1).....	0,42969 22507 3
(2)+(3)	3 9224	p.......	5,16385 468
$2\varphi' - \varphi =$	31.42.2, 68966 7431	(2).....	5,59354 693
$\varphi' =$	38.21.1, 34483 37155	p......	5,16385 47
		$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos 2a$.	0,01486 78
		(3)....	0,77226 94.

Pour avoir l sin φ', on fera $a = 38°35 = 38°21'$, $x = 1''34483\ 37155$, $\varphi' = a + x$, et on appliquera la formule $l \sin(a+x) = l \sin a + mx \cot a \left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x}{\sin 2a} \cdot \frac{2}{3} x \cot a\right)$; en voici le calcul :

$R''x$...	0,12866 85884 8	sin a...	9,79271 63379 4647
R''....	5,31442 51331 8	(1).....	+ 35789 6760
x.....	4,81424 34553	(2).....	— 2398
m.....	9,63778 43113	sin φ'...	9,79271 99168 9009
cot a..	0,10173 00005 9	c'......	9,99523 32536 9414
(1)....	4,55375 77670 9	sin $(2\varphi''-\varphi')$	9,78795 31705 8423
x.....	4,81424 34553		
1 : sin $2a$	0,01180 7328		
(2)....	9,37980 855		

D'après cette valeur de l sin $(2\varphi''-\varphi')$, on trouve, en suivant toujours les mêmes procédés,

$$
\begin{aligned}
2\varphi''-\varphi' &= 37°\,51'\,25'',98409\ 3235 \\
\varphi' &= 38.21.\ \ 1,34483\ 3715 \\
&\ 76.12.27,32892\ 6950 \\
\varphi' &= 38.\ \ 6.13,66446\ 3475.
\end{aligned}
$$

On a ensuite pour déterminer φ''' l'équation $\sin(2\varphi'''-\varphi'') = c'' \sin\varphi''$; mais, à cause de la petitesse de l'angle $\varphi''-\varphi''' = \omega'''$, il est préférable de déterminer φ''' par l'équation $\text{tang}(\varphi''-\varphi''') = b''' \text{tang}\,\varphi'''$, ou simplement $\varphi''-\varphi''' = R''b''' \text{tang}\,\varphi'''$. Pour cela, on substituera d'abord dans le second membre la valeur approchée $\varphi''' = 38°6'10''$, ce qui donnera $\omega''' = 1'',2178$, et $\varphi''' = 38°6'12'',4466$. Au moyen de cette seconde valeur, qui a toute l'exactitude nécessaire pour les tables à dix décimales, on trouvera plus exactement $\varphi''-\varphi''' = R''b''' \text{tang}\,\varphi''' = 1'',21787\ 8424$. Enfin la différence $\varphi'''-\varphi^{\text{IV}} = \omega^{\text{IV}}$ se déduira de l'équation $\omega^{\text{IV}} = R''b^{\text{IV}} \text{tang}\,\varphi^{\text{IV}}$, ou simplement $\omega^{\text{IV}} = \omega''' . \frac{1}{4} b'''$; car on peut supposer dans le second membre $\text{tang}\,\varphi^{\text{IV}} = \text{tang}\,\varphi'''$, et $b^{\text{IV}} = \frac{1}{4}(b''')^2$. Voici ces derniers calculs d'où l'on déduit la valeur de φ^{IV}:

b'''.....	4,87675 32921 2	φ'' =	38° 6' 13'',66446 3475
tang φ'''.	9,89442 55112 5	ω''' =	1,21787 8424
R''.....	5,31442 51331 8	φ''' =	38.6.12,44658 5051
ω'''.....	0,08560 39365 5	ω^{IV} =	22924
$\frac{1}{4}b'''$....	4,27469 33	φ^{IV} =	38.6.12,44658 27586.
ω^{IV}.....	4,36029 72		

On peut considérer φ^{iv} comme étant la limite des angles décroissans φ, φ', φ'', etc.; ainsi on aura

$$H = \log \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{\text{iv}}) = l\,\text{tang}\,(64^\circ 3' 6'',22329\ 1379).$$

Pour calculer ce log-tangente, on fera $a = 64^\circ 05 = 64^\circ 3'$, $R''x = 6'',22329\ 1379$; et appliquant les formules

$$p = \frac{x}{\sin 2a},\ l\,\text{tang}\,(a+x) = l\,\text{tang}\,a + 2mp[1 - p\cos 2a + \tfrac{2}{3}p^2(1+\cos^2 2a)],$$

on trouvera $H = 0,31281\ 40842\ 60705$. Enfin la formule $F\varphi = KMH$ donnera les résultats suivans :

$$\begin{array}{ll} H\ldots\ldots & 9,49528\ 62986\ 6865 \\ M\ldots\ldots & 0,36221\ 56826\ 9946\ 3 \\ K\ldots\ldots & 0,06207\ 66278\ 4558\ 5 \\ \hline lF\varphi = & 9,91957\ 86152\ 1370 \\ F\varphi = & 0,83095\ 71234\ 6716. \end{array}$$

767. Venons maintenant au calcul de la formule $E\varphi = L'F\varphi + Pc\sin\varphi$; la première partie se trouvera au moyen des formules qui déterminent L', comme il suit :

$$\begin{array}{ll} L'\ldots & 9.38094\ 67241\ 4940 \\ F\varphi\ldots & 9.91957\ 86152\ 1370 \\ \hline & 9.30052\ 53393\ 6310 \end{array} \qquad L'F\varphi = 0.19976\ 77321\ 6029,$$

La seconde partie $Pc\sin\varphi = 2\sqrt{c}\sin\varphi'.P' - c\sin\varphi$, et pour avoir P', il faut connaître $r'' = c''\cos\omega''$ et $r''' = c'''\cos\omega'''$; or, d'après les valeurs déjà connues

$$\begin{aligned} \omega'' &= \varphi' - \varphi'' = 887''68037\ 024 \\ \omega''' &= \varphi'' - \varphi''' = \quad 1.21784\ 824, \end{aligned}$$

on trouve les résultats suivans :

$$\begin{array}{lr} 1:\cos\omega'''\ldots & 0.00000\ 40217\ 70478 \\ 1:c''\ldots\ldots & 65398\ 47146 \\ \hline 1:r''\ldots\ldots & 0.00001\ 05616\ 17624 \\ 1:r'''^2\ldots\ldots & 39760 \\ \hline t = & 0.00001\ 05616\ 57384. \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \cos\omega'''\ldots & -\ 7570 \\ c'''\ldots\ldots & -\ 12310 \\ \hline r'''\ldots\ldots & -\ 19880 \end{array}$$

Par le moyen de cette valeur de $t = -\log(r''r'''^2)$, on trouve aisément le terme $Z = 2\sqrt{c}\sin\varphi'.P'$, ensuite on aura $c\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos 3^\circ + \frac{1}{2}\sin 3^\circ$, d'où l'on conclura la valeur de $E\varphi$, comme il suit :

$2\sqrt{c}$....	0.23656 67247 35736	$Z =$	1.06981 27381 3605
$\sin\varphi'$....	9.79271 99168 90090	$c\sin\varphi =$	0.52348 27454 9876
$2t$......	+ 2 11233 14768		
Mt^2.....	— 2 56850	$Pc\sin\varphi =$	0.54432 99926 3729
M^2t^3....	+ 6	$L'F\varphi =$	0.19976 77321 6029
Z.......	0.02930 77646 8375	$E\varphi =$	0.74409 77247 9758.

Les calculs de ces deux exemples ont été fort longs, malgré la simplicité des formules, parce qu'on a voulu obtenir des résultats exacts jusqu'à la quatorzième décimale ; mais ils s'abrégeraient beaucoup si l'on se bornait, comme il convient presque toujours, à dix ou à un moindre nombre de décimales.

768. L'addition que nous venons de faire au chap. XXI du traité précédent, nous donne l'occasion de placer ici une conséquence assez remarquable qu'on peut tirer de la formule (i'), chap. XXIII.

Si l'on fait dans cette formule $\varphi = \theta$, on aura $n' = n$; ainsi les deux fonctions $\Pi(n, c, \theta)$, $\Pi(n, b, \theta)$, dont les modules sont complémens l'un de l'autre et qui ont d'ailleurs le même paramètre et la même amplitude, pourront s'exprimer l'une par l'autre au moyen de l'équation

$$\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n, c, \theta) + \frac{\Delta(c,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n, b, \theta)$$
$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi + \operatorname{tang}\theta\,[\Delta(b,\theta)\,F(c,\theta) + \Delta(c,\theta)\,F(b,\theta)] \\ + F(c,\theta)\,F(b,\theta) - F(c,\theta)\,E(b,\theta) - F(b,\theta)\,E(c,\theta) \end{array}\right\}.$$

Cette équation fait partie de la propriété mentionnée dans l'art. 110. Mais si on a $c = b$, c'est-à-dire si le module $c = \sin 45°$, alors en omettant la désignation du module c et de l'amplitude θ, commune à tous les termes $\Pi(n, c, \theta)$, $\Delta(c, \theta)$, $F(c, \theta)$, $E(c, \theta)$, on aura la formule

$$\frac{2\Delta}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n) = \tfrac{1}{2}\pi + (2\Delta\operatorname{tang}\theta + F - 2E)F,$$

d'où l'on voit que dans ce cas particulier la fonction de troisième espèce $\Pi(n)$ ou $\Pi(n, c, \theta)$, où l'on a $n = \cot^2\theta$, s'exprime par les fonctions de première et de seconde espèce F et E.

Ce résultat est d'autant plus remarquable que l'amplitude θ, qui détermine le paramètre $\cot^2\theta$, peut être prise à volonté et ne suppose point que $F(c, \theta)$ soit commensurable avec F^1c. Si cette commensurabilité avait lieu, on sait par les propriétés connues que la fonction de troisième espèce

$\Pi(n, c, \theta)$, pourrait se déterminer par le moyen de $\Pi^1(n, c)$, quel que fût le paramètre n, et ne dépendrait ainsi que des fonctions de la première et de la seconde espèce; de plus, comme dans le cas dont il s'agit, la fonction $F(b, \theta)$ qui est la même que $F(c, \theta)$, serait commensurable avec $F^1 b$ qui est la même que $F^1 c$, la fonction de troisième espèce $\Pi(n, c, \varphi)$ serait en général réductible à la première espèce $F(c, \varphi)$ par la formule de l'art. 110, de sorte que la valeur particulière de $\Pi(n, c, \theta)$ ne dépendrait que de la seule fonction $F(c, \theta)$, ou même de la fonction complète $F^1 c$, puisqu'il y a un rapport donné entre ces deux dernières fonctions.

On voit donc que l'équation précédente contient un théorème entièrement nouveau sur la fonction de troisième espèce $\Pi(\cot^2 \theta, c, \theta)$, puisqu'elle ne suppose pas $F(c, \theta)$ commensurable avec la fonction complète $F^1 c$; mais ce théorème est restreint au seul cas du module $c = \sin 45°$.

CHAPITRE X.

Modification de la méthode trigonométrique du Chapitre VI

769. La méthode que nous allons exposer n'est autre chose que celle du Chapitre VI, modifiée de manière qu'elle n'exige pas un travail préliminaire trop considérable, au moins lorsqu'on ne veut pas pousser l'approximation au delà d'un certain degré.

Supposons d'abord que l'on calcule par la méthode générale l'amplitude α ou α_1, qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F^1 c$ (nous prenons pour exemple la fraction $\frac{1}{10}$, mais une autre fraction telle que $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$, pourrait être plus convenable dans certains cas, comme nous le verrons ci-après); au moyen de cette amplitude on déterminera successivement celles qui satisfont aux fonctions multiples $F\alpha_2 = 2F\alpha$, $F\alpha_3 = 3F\alpha$, etc. On calculera en même temps les valeurs correspondantes de E, et du tout on formera un petit tableau de dix lignes seulement, contenant les valeurs de φ et de $E\varphi$, auquel on pourra joindre, pour la facilité des applications, les valeurs logarithmiques correspondantes de $\sin \varphi$, $\tang \varphi$, $\Delta\varphi$. *Voyez* un tableau de cette sorte, art. 777.

Cela posé, φ ayant une valeur donnée quelconque, il s'agira de trouver, par le moyen de cette table, les valeurs des fonctions $F\varphi$, $E\varphi$.

770. Supposons que la valeur de φ soit plus grande que $\alpha 1$, elle sera comprise entre deux termes consécutifs de la première colonne; soit a le terme le plus proche ou au moins celui pour lequel la différence $F\varphi - Fa$, positive ou négative, est la plus petite, et soit $\varphi = a + x$, x ayant le même signe que $F\varphi - Fa$; si l'on fait en même temps $F(a+x) = Fa + F'y$, l'amplitude y se déterminera trigonométriquement par les équations suivantes:

$$c \sin a = \sin 6,\ \tang \psi' = \cos 6\ \tang (a+x),\ y = \psi' - \psi.$$
$$c \sin (a+x) = \sin 6',\ \tang \psi = \cos 6' \tang a.$$

On voit qu'il faudra d'abord calculer les angles auxiliaires 6, $6'$, ensuite les angles ψ' et ψ, dont la différence est l'angle cherché y.

Connaissant y qui sera en général du même ordre que x, et peu supérieur à x (excepté dans le seul cas où c et $\sin \varphi$ seront tous les deux peu différens de l'unité), on pourra déterminer Fy et Ey par les formules qui conviennent aux petites amplitudes, et on en déduira les fonctions cherchées

$$F\varphi = Fa + Fy,$$
$$E\varphi = Ea + Ey - c^2 \sin a \sin \varphi \sin y.$$

Cette sorte d'interpolation n'exigera en général qu'un calcul assez facile et fondé, comme on voit, sur des formules trigonométriques très simples.

Si x est négatif, y le sera aussi; mais d'ailleurs le calcul sera toujours le même. Au reste la faculté qu'on a, suivant les différens cas, de prendre x positif ou négatif, permettra toujours de supposer $Fy < \frac{1}{2} F\alpha$; c'est ce qui aura lieu encore, lorsque φ sera moindre que α, mais tel cependant qu'on ait $F\varphi > \frac{1}{2} F\alpha$.

Nous remarquerons que si l'on fait $\sin \omega = \frac{\sin x}{\frac{1}{2}\Delta a + \frac{1}{2}\Delta(a+x)}$, on aura exactement $\sin y = \frac{\sin \omega}{1 + \frac{1}{4} c^2 \sin^2 \omega}$. Par les auxiliaires 6 et $6'$, on a $\Delta a = \cos 6$, $\Delta(a+x) = \cos 6'$, ainsi l'angle ω, troisième auxiliaire, se trouverait par l'équation $\sin \omega = \frac{\sin x}{\cos(\frac{1}{2}6' + \frac{1}{2}6) \cdot \cos(\frac{1}{2}6' - \frac{1}{2}6)}$; mais il sera presque toujours plus simple de se servir des formules précédentes, quoiqu'elles déterminent l'angle y par la différence de deux angles beaucoup plus grands ψ' et ψ.

771. Nous avons donné dans le Chapitre VII des formules pour calculer les fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, lorsque l'amplitude φ ne passe pas une certaine limite;

mais si y était très petit, le calcul de ces formules pourrait être sujet à quelques difficultés, surtout si le module c était en même temps très petit. Il sera plus simple alors de se servir des formules telles que les donne immédiatement l'intégration par séries; ces formules sont, en supposant que les termes de l'ordre y^7 peuvent être négligés,

$$Ey = y - \tfrac{1}{2}c^2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15}\right) - \tfrac{1}{8}c^4 \cdot \frac{y^5}{5},$$
$$Fy = y + \tfrac{1}{2}c^2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15}\right) + \tfrac{3}{8}c^4 \cdot \frac{y^5}{5}.$$

772. Connaissant α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, par la multiplication de la fonction $F\alpha$, il faudra que α_5 s'accorde avec la valeur tirée de l'équation $\cot \alpha_5 = \sqrt{b}$. Cette vérification étant faite, on calculera les termes suivans α_6, α_7, etc., par les équations complémentaires, savoir : $\cot \alpha_6 = b \tang \alpha_4$, $\cot \alpha_7 = b \tang \alpha_3$, $\cot \alpha_8 = b \tang \alpha_2$, $\cot \alpha_9 = b \tang \alpha$. Il faudra ensuite calculer les fonctions $E\alpha_1$, $E\alpha_2$, etc., ce qu'on fera par les formules

$$\begin{array}{l|l}
p_1 = c^2 \sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & 2E\alpha - E\alpha_2 = p_1 \\
p_2 = c^2 \sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & E\alpha + E\alpha_2 - E\alpha_3 = p_2. \\
p_3 = c^2 \sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 & E\alpha + E\alpha_3 - E\alpha_4 = p_3 \\
p_4 = c^2 \sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_4 \sin \alpha_5 & E\alpha + E\alpha_4 - E\alpha_5 = p_4.
\end{array}$$

De ces formules résulte

$$E\alpha = \tfrac{1}{5}\,(E\alpha_5 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4);$$

et comme on connaît $E\alpha_5 = \frac{1}{2}E^1 + \frac{1}{2}(1 - b)$, on aura par l'équation précédente la valeur de $E\alpha$; ensuite $E\alpha_2$, $E\alpha_3$, $E\alpha_4$, seront données par les équations

$$\begin{aligned}
E\alpha_2 &= 2E\alpha - p_1, \\
E\alpha_3 &= E\alpha + E\alpha_2 - p_2, \\
E\alpha_4 &= E\alpha + E\alpha_3 - p_3.
\end{aligned}$$

Ce calcul se continuera pour les autres amplitudes α_6, α_7, etc., au moyen des formules

$$\begin{aligned}
E\alpha_6 + E\alpha_4 &= E^1 + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6, \\
E\alpha_7 + E\alpha_3 &= E^1 + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_7, \\
E\alpha_8 + E\alpha_2 &= E^1 + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8, \\
E\alpha_9 + E\alpha\ &= E^1 + c^2 \sin \alpha \sin \alpha_9.
\end{aligned}$$

Cette méthode va recevoir les développemens nécessaires dans l'exemple suivant, où les calculs sont faits de manière à obtenir au moins dix décimales exactes dans les résultats.

773. Afin de mieux juger de l'exactitude de la nouvelle méthode, nous prendrons pour exemple le module sin 45°, d'après lequel la Table II a été construite. Voici, dans ce cas, l'échelle des modules réduite à douze décimales.

c....	9,84948 50021 68	b.....	9,84948 50021 68
c°...	9,23444 86293 24	b°....	9,99351 18092 42
$c^{\circ\circ}$..	7,87330 12255 42	$b^{\circ\circ}$....	9,99998 78837 31
$c^{\circ\circ\circ}$..	5,14455 45759 93	$b^{\circ\circ\circ}$...	9,99999 99999 58.
$c^{\circ\circ\circ\circ}$..	$\bar{9}$,68704 91605 93		

il faut d'abord déterminer α par l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F^{1}$; et comme on a en général $F\varphi = \frac{\Phi}{90^{\circ}} \cdot F^{1}c$, Φ étant la limite de la suite φ, $\frac{1}{2}\varphi^{\circ}$, $\frac{1}{4}\varphi^{\circ\circ}$, etc., il faudra faire $\Phi = 9^{\circ}$; or, pour le degré d'exactitude que nous avons en vue, on peut supposer $\Phi = \frac{1}{16}\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$; ainsi on aura $\varphi^{\circ\circ\circ\circ} = 144^{\circ}$. De cette valeur on déduira successivement celles de $\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ}$, φ°, φ, au moyen des équations $\sin(2\varphi^{\circ\circ\circ} - \varphi^{\circ\circ\circ\circ}) = c^{\circ\circ\circ\circ} \sin \varphi^{\circ\circ\circ\circ}$, $\sin(2\varphi^{\circ\circ} - \varphi^{\circ\circ\circ}) = c^{\circ\circ\circ} \sin \varphi^{\circ\circ\circ}$, etc., dont voici le calcul :

$c^{\circ 4}$.......	$\bar{9}$,68704 92	$2\varphi^{\circ 3} - \varphi^{\circ 4} =$	0° 0′ 0″,00000 5898
$\sin\varphi^{\circ 4}$....	9,76921 87	$\varphi^{\circ 4} =$	144
R″.......	5,31442 51	$\varphi^{\circ\circ\circ} =$	72.0.0 ,00000 2949
$2\varphi^{\circ 3} - \varphi^{\circ 4}$.	4,77069 30		
$c^{\circ 3}$.......	5,14455 45759 4	$2\varphi^{\circ\circ} - \varphi^{\circ\circ\circ} =$	2 ,73644 0659
$\sin\varphi^{\circ 3}$....	9,97820 63255 5	$\varphi^{\circ\circ} =$	36.0.1 ,36822 1804
R″.......	5,31442 51331 8		
$2\varphi^{\circ 2} - \varphi^{\circ 3}$.	0,43718 60347		
$c^{\circ\circ}$......	7,87330 12255 42	(1).......	905″,62626 4253
$\sin\varphi^{\circ\circ}$...	9,76922 26503 72	(2).......	+ 290 9682
p.......	7,64252 38759 14	$2\varphi^{\circ} - \varphi^{\circ\circ} =$	15′ 5″,62917 3935
R″......	5,31442 51331 76	$\varphi^{\circ\circ} =$ 36°	0. 1 ,36822 1804
(1)......	2,95694 90090 90	$\varphi^{\circ} =$ 18.	7.33 ,49869 7870
$\frac{1}{6}p^{2}$.....	4,50689 65		
(2)......	7,46384 55		

c^{o}	9,23444 86293 24	angle cherché $A = 2\varphi - \varphi^{o}$,
$\sin \varphi^{o}$ ...	9,49291 01476 38	angle approché $a = 3^{\circ}06 = 3^{\circ}3'36''$,
$\sin(2\varphi - \varphi^{o})$	8,72735 87769 62	éq. à résoudre $l\sin A = l\sin a - r$,
$\sin a$	8,72739 23169 47	Solution. $p = r\mathrm{M}\tang a$
$r =$	3 35399 85	$A = a - p\left(1 - \frac{p}{\sin 2a}\right)$.

r	5,52556 28641	(1)...	0″,85156 0817
M	0,36221 56887	(2)...	3 2976
$\tang a$ ...	8,72801 19841		0 ,85152 7841
p	4,61579 05369	a	3° 3′ 36″
R″	5,31442 51332	$2\varphi - \varphi^{o} =$	3. 3.35 ,14847 2159
(1)	9,93021 56701	$\varphi^{o} =$	18. 7.33 ,49869 7870
p	4,61579 053	$2\varphi =$	21.11. 8 ,64717 0029
$1 : \sin 2a$	0,97219 73	$\alpha = \varphi =$	10.35.34 ,32358 50.
(2)	5,51820 35		

774. Ayant ainsi déterminé la valeur de α ou α_1, il faut calculer les termes α_2, α_3, α_4, etc., par les formules connues pour la multiplication des fonctions ; savoir : $\tang \frac{1}{2}\alpha_2 = \Delta \tang \alpha$, $\tang(\frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_1) = \Delta \tang \alpha_2$, etc. ; voici d'abord le calcul de $\Delta\alpha$ ou Δ :

c....	9,84948 50021 68	$a = 7^{\circ},47$			
$\sin \alpha$.	9,26441 40026 72	r.	5,83197 06609	$\cos a$	9,99629 84428 77
$\sin$ A.	9,11389 90048 40	$\tang^2 a$. .	8,23533 69554	R. .	11674 507
$\sin a$.	9,11396 69206 15	$r \tang^2 a$	4,06730 76163	Δ. .	9,99629 96103 28.
$r =$	6 79157 75	r......	— 6 79158		
$l\sin A = l\sin \alpha - r$,		$r\tang^2 a$	— 11676		
$l\cos A = l\cos a + R$,		R.....	4,06723 85329		
$lR = l(r\tang^2 a) - r\tang^2 \alpha - r$.					

Calcul de α_2.

$\tang \alpha$..	9,27187 89348 79	$a = 10^{\circ}\,50$	r.....	6,32556 58917
Δ......	9,99629 96103 28	$2a = 21.00$	$\frac{1}{2}$M...	0,06118 56930
$\tang \frac{1}{2}\alpha_2$	9,26817 85452 07		p.....	6,38675 15847
$\tang a$..	9,26796 69207 33		$\sin 2a$.	9,55432 91618
r....	21 16244 74		R″....	5,31442 51332
			(1)....	1,25550 58797
$l\tang A = l\tang a + r$,			p.....	6,38675 15847
$p = \frac{1}{2}\mathrm{M}r$,			$\cos 2a$.	9,97015 174
$A - a = p\sin 2a(1 + p\cos 2a + \frac{2}{3}p^2\cos 4a)$.			(2).. .	7,61240 920

$a+(1) =$	10° 30′ 18″,00967 517	(1)......	1,25550 59
(2)...	409 646	p^2.......	2,77350 32
(3)...	53	$\frac{2}{3}$.......	9,82390 87
$\frac{1}{2}a_2$.... =	10.30.18 ,01377 216	cos $4a$...	9,87107 35
a_2..... =	21. 0.36 ,02754 43	(3).....	3,72399 13.

Calcul de a_3.

tang a_2 9,58440 41122 28	$a = 20°85$	r.....	5,81548 23192
Δ.... 9,99629 96103 28	$2a = 41.70$	$\frac{1}{2}$M...	0,06118 56930
tang A 9,58070 37225 56	$4a = 83.40$	p.....	5,87666 80122
tang a. 9,58076 91081 87		sin $2a$.	9,82297 20580
$r =$ 6 53856 31		R″....	5,31442 51332
$l\,\text{tang}\,A = l\,\text{tang}\,a - r,\ p = \frac{1}{2}Mr,$		(1)...	1,01406 52034
		p.....	5,87666 801
$A = a - p\sin 2a(1 - p\cos 2a + \frac{2}{3}p^2\cos 4a)$		cos $2a$.	9,87311 02
		(2)....	6,76384 34

(1)...... =	10″,32916 4724		
(2)......	— 58 0557	(1)....	1,01406 5
(3)......	+ 4	p^2....	1,75333 6
a—A... =	10 ,32858 417	$\frac{2}{3}$ cos $4a$	8,88436 9
a....... =	20° 51′ 0″	(3)....	1,65177 0.
A...... =	20.50.49 ,67141 583		
a_3+a... =	41.41.39 ,34283 17		
a.......	10.35.34 ,32358 50		
a_3...... =	31. 6. 5 ,01924 67		

Calcul de α_4.

tang α_3	9,78051 29931 86			r.....	5,84856 50655
Δ....	9,99629 96103 28	$a = 30°89$		$\frac{1}{2}$M...	0,06118 56930
tang A	9,77681 26035 14	$2a = 61.78$		p.....	5,90975 07585
tang a.	9,77688 31645 69	$4a = 123.56$		sin $2a$..	9,94504 41514
$r =$	7 05610 55			R″....	5,31442 51332
				(1)....	1,16922 00431
				p.....	5,90975 076
				cos $2a$.	9,67473 108
				(2)....	6,75370 188.

l tang A $= l$ tang $a - r$.

a—(1)...	=	30°53″ 9″,23545 5840
(2)...		+ 56 7155
(3)...		+ 36
$\frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_3)$	=	30.53. 9 ,23602 303
α_4	=	40.45.42 ,44450 18

(1)....	1,16922 00
p^2....	1,81950 15
$\frac{2}{3}$ cos $4a$	9,56648 46
(3)....	2,55520 61.

Calcul de α_5.

tang α_4.	9,93551 41911 62	$a = 40°52$	r.....	4,90002 10848
Δ......	9,99629 96103 28	$2a = 81.04$	$\frac{1}{2}$M...	0,06118 56930
tang A..	9,93181 38014 90		p.....	4,96120 67778
tang a..	9,93180 58578 22		sin $2a$.	9,99466 78399
$r =$	79436 68		R″....	5,31442 51332
			(1)....	0,27029 97509
			p.....	4,96120 678
			cos $2a$.	9,19241 381
			(2)....	4,42392 034.

l tang A $= l$ tang $a + r$.

a.......	=	40°31′ 12″,00000 0000
(1).....		1 ,86337 2796
(2).....		2654
$\frac{1}{2}\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_3$	=	40.31.13 ,86337 545
		81. 2.27 ,72675 09
α_3......		31. 6. 5 ,01924 67
α_5......	=	49.56.22 ,70750 42.

Par l'équation cot $\alpha_5 = \sqrt{b}$, on trouve directement $\alpha_5 = 49°56'22''70750\ 516$; la différence n'est que d'une unité décimale du sixième ordre; or, le sixième ordre de décimales dans les secondes, est le douzième chiffre significatif du nombre entier, puisqu'en réduisant tout en secondes, on a $\alpha_5 = \ldots$ $179782'',7075016$. On ne peut donc pas répondre d'un plus grand degré de précision, en ne donnant que douze décimales aux logarithmes, surtout si l'on considère combien il a fallu d'opérations pour obtenir ce résultat.

775. Pour calculer maintenant les quantités p_1, p_2, p_3, p_4, il faut connaître les log-sinus des angles α, α_2, α_3, α_4, α_5; le premier est déjà connu, le dernier se trouve par la formule $\sin \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 22^\circ \frac{1}{2}}$; voici ces logarithmes, d'où l'on déduit ceux des quantités p, et ensuite ces quantités elles-mêmes :

sin α_1 9,26441 40026 72	p_1 7,78232 47333 43	$p_1 =$ 0,00605 79367 32
sin α_2 9,55452 67236 63	p_2 8,23102 65983 97	$p_2 =$ 0,01702 26276 04
sin α_3 9,71311 58677 26	p_3 8,49135 69385 46	$p_3 =$ 0,03099 96605 69
sin α_4 9,81485 70638 12	p_4 8,66211 07270 67	$p_4 =$ 0,04593 15104 20
sin α_5 9,88386 96562 47		0,10001 17353 25

Connaissant la fonction complète $E^1 = 1,35064\ 38810\ 48$, et la quantité $1 - b = 0,29289\ 32188\ 24$, on trouvera par les formules de l'article 772,

$$\begin{aligned} E\alpha_5 &= 0,82176\ 85499\ 31 \\ E\alpha_1 &= 0,18435\ 60570\ 512 \\ E\alpha_2 &= 0,36265\ 41773\ 704 \\ E\alpha_3 &= 0,52998\ 76068\ 176 \\ E\alpha_4 &= 0,68334\ 40032\ 998. \end{aligned}$$

776. Il faut maintenant prolonger le calcul de toutes ces quantités pour toutes les amplitudes au-delà de α_5, savoir : α_6, α_7, α_8, α_9. Or, si les amplitudes φ et ψ sont complémens l'une de l'autre, c'est-à-dire, si l'on a $F\varphi + F\psi = F^1c$, non-seulement l'amplitude ψ se déduit de φ, par la formule $\cot \psi = b \tang \varphi$, comme on l'a vu dans l'art. 772; mais on a en même temps $\Delta\psi = \frac{b}{\Delta\varphi}$, et $\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{\Delta\varphi . \tang\varphi}$; de sorte que connaissant les logarithmes des quantités $\sin \varphi$, $\tang \varphi$, $\Delta\varphi$, pour les amplitudes qui précèdent α_5, on aura immédiatement les logarithmes de ces quantités pour les amplitudes qui suivent α_5.

D'ailleurs de la valeur connue de $\cot \psi$, on déduit celle de l'angle ψ, ce qui s'applique successivement aux amplitudes α_6, α_7, α_8, α_9; on aura donc de cette manière les résultats suivans :

φ.	$l \sin \varphi$.	$l \operatorname{tang} \varphi$.
$\alpha_6 = 58°38'10'',31402\ 70$	9,93139 67348 58	0,21500 08066 70
$\alpha_7 = 66.53.52\ ,77456\ 17$	9,96369 70659 98	0,37000 20046 46
$\alpha_8 = 74.48.22\ ,93725\ 47$	9,98454 78550 84	0,56611 08856 04
$\alpha_9 = 82.28.\ 0\ ,82488\ 73$	9,99623 54574 65	0,87863 60629 53

Au moyen des valeurs de $\sin \varphi$, on déterminera les fonctions $E\alpha_6$, $E\alpha_7$, etc., par les formules de l'art. 772, comme il suit :

$c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 =$	0,27875 57297 82	$c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_7 =$	0,23756 52630 146
E'........ =	1,35064 38810 48	E'........ =	1,35064 38810 48
	1,62939 96108 30		1,58820 91440 626
$E\alpha_4$........ =	0,68334 40033 00	$E\alpha_3$........	0,52998 76068 176
$E\alpha_6$........ =	0,94605 56075 30	$E\alpha_7$........ =	1,05822 15372 45
$c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8 =$	0,17299 93944 95	$c^2 \sin \alpha \sin \alpha_9 =$	0,09112 12071 38
E'.........	1,35064 38810 48	E'.........	1,35064 38810 48
	1,52364 32755 43		1,44176 50881 86
$E\alpha_2$........ =	0,36265 41773 70	$E\alpha$........	0,18435 60570 51
$E\alpha_8$........ =	1,16098 90981 73	$E\alpha_9$........ =	1,25740 90311 35.

777. Nous avons maintenant tous les élémens qui doivent composer la Table auxiliaire que nous voulions construire; mais, pour en rendre l'usage plus commode, il sera bon d'y joindre les valeurs correspondantes de $\log \Delta\varphi$.

On connaît déjà $\Delta(\alpha)$ et $\Delta(\alpha_5) = \sqrt{b}$; on calculera les autres termes par les formules $\Delta\alpha_2 = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha_4}{\operatorname{tang} \alpha_2}$, $\Delta\alpha_3 = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha_6}{\operatorname{tang} \alpha_3}$, $\Delta\alpha_4 = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha_8}{\operatorname{tang} \alpha_4}$, et les termes complémentaires par la formule générale $\Delta\psi = \frac{b}{\Delta\varphi}$.

Voici donc la Table complète qui résulte de tous les élémens ainsi calculés.

φ.	Eφ.	$l\sin\varphi$.	$l\,\mathrm{tang}\,\varphi$.	$l\Delta\varphi$.
a_1 = 10° 35′ 24″ 32358 50	0,18435 60570 51	9,26441 40026 72	9,27187 89348 79	9,99629 96103 28
a_2 = 21. 0.36,02754 43	0,36265 41773 70	9,55452 67236 63	9,58440 41122 28	9,98557 47563 52
a_3 = 31. 6. 5,01924 67	0,52998 76068 18	9,71311 58677 26	9,78051 29931 86	9,96890 58085 45
a_4 = 40.45.42,44450 18	0,68334 40033 00	9,81485 70638 12	9,93551 41911 62	9,94794 61377 95
a_5 = 49.56.22,70750 52	0,82176 85499 31	9,88386 96562 47	0,07525 74989 16	9,92474 25010 84
a_6 = 58.38.10,31402 70	0,94605 56075 30	9,93139 67348 58	0,21500 08066 70	9,90153 88643 73
a_7 = 66.53.52,77456 17	1,05822 15372 45	9,96369 70659 98	0,37000 20046 46	9,88057 91936 23
a_8 = 74.48.22,93725 47	1,16098 90981 73	9,98454 78550 84	0,56611 08856 04	9,86391 02458 16
a_9 = 82.28. 0,82488 73	1,25740 90311 35	9,99623 54574 65	0,87863 60629 53	9,85318 53918 40
a_{10} = 90. 0. 0,00000 00	1,35064 38810 48	0,00000 00000 00	Infini.	9,84948 50021 68

778. Pour faire voir l'usage de cette table, cherchons la valeur des fonctions F et E, lorsque $\varphi = 70°$.

L'amplitude qui dans la table approche le plus de 70°, est........ $a = 66° 53' 52'', 77456\ 17$; elle répond à la fonction $\mathrm{F}a = \frac{7}{10}\mathrm{F}^1c$; il faut donc résoudre l'équation $\mathrm{F}\varphi = \mathrm{F}a + \mathrm{F}y$, ce qui se fera par les formules

$$\mathrm{tang}\,\psi' = \Delta a\,\mathrm{tang}\,\varphi,\quad \mathrm{tang}\,\psi = \Delta\varphi\,\mathrm{tang}\,a,\quad y = \psi' = \psi;$$

soit $c\sin\varphi = \sin\theta$, on aura $l\sin\theta = 9{,}82247\ 08186\ 11$, d'où l'on tire $l\cos\theta$ ou $l\Delta\varphi = 9{,}87350\ 72687\ 63$. Par la table, on a immédiatement tang a et Δa, ainsi l tang ψ' et l tang ψ seront donnés comme il suit :

Δa.......	9,88057 91936 23	$\Delta\varphi$.......	9,87350 72687 63
tang φ....	0,43893 41317 97	tang a.....	0,37000 20046 46
tang ψ'...	0,31951 33254 20	tang ψ....	0,24350 92734 09,

il en résulte

$$\begin{aligned} \psi' &= 64° 23' 52'',11076\ 01 \\ \psi &= 60.16.54,80887\ 69 \\ \hline y &= 4.\ 6.57,30188\ 32. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver avec le même degré d'approximation la valeur des fonctions Ey, Fy; c'est ce qu'on obtiendrait par l'interpolation de la Table II; mais, pour ne rien emprunter de cette Table, nous calculerons directement les valeurs de Ey, Fy, par les formules que donne immédiatement l'intégration, lesquelles en négligeant les termes de l'ordre y^9 seulement, sont :

$$Ey = y - \tfrac{1}{2}c^2.\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{15}+\frac{2y^7}{315}\right)-\tfrac{1}{8}c^4\left(\frac{y^5}{5}-\frac{2y^7}{21}\right)-\tfrac{1}{16}c^6.\frac{y^7}{7},$$

$$Fy = y + \tfrac{1}{2}c^2.\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{15}+\frac{2y^7}{315}\right)+\tfrac{3}{8}c^4\left(\frac{y^5}{5}-\frac{2y^7}{21}\right)+\tfrac{5}{16}c^6.\frac{y^7}{7}.$$

Si l'on y substitue la valeur de c^2 dans notre exemple, savoir $c^2=\frac{1}{2}$, elles deviennent

$$Ey = y - \tfrac{1}{12}y^3 + \tfrac{1}{96}y^5 + \tfrac{11}{40320}y^7,$$

$$Fy = y + \tfrac{1}{12}y^3 + \tfrac{1}{480}y^5 - \tfrac{71}{40320}y^7;$$

faisant donc $y = 4°\,6'\,57''$, 30188 32, ce qui donne, après avoir réduit cet arc en parties du rayon

$$\log y = 8{,}85634\ 39959\ 78,\quad y = 0{,}07183\ 63067\ 020,$$

on trouvera $\qquad Ey = 0{,}07180\ 54342\ 97,$

$\qquad\qquad\qquad\quad Fy = 0{,}07186\ 72030\ 06.$

Maintenant les valeurs cherchées de $F\varphi$ et $E\varphi$ se tireront des équations $F\varphi = Fa + Fy$, $E\varphi = Ea + Ey - c^2 \sin a \sin\varphi \sin y$, comme il suit :

$c^2 \sin\varphi$	9,67195 58207 79
$\sin a$............	9,96369 70659 98
$\sin y$............	8,85597 04055 19
Z.............	8,49162 32922 96

$Ea =$	1,05822 15372 45
$Ey =$	0,07180 54342 97
	1,13002 69715 42
$Z =$	0,03101 86785 59
$E\varphi =$	1,09900 82929 83.

$Fa = \frac{7}{10}F'c =$	1,29785 22741 11
Fy......... $=$	0,07186 72030 06
$F\varphi$......... $=$	1,36971 94771 17

Par la Table II, on a $F\varphi = 1{,}36971\ 94771\ 22$, et $E\varphi = 1{,}09900\ 82929\ 83$, ainsi l'accord est parfait sur la valeur de E, et il n'y a de différence sur celle de F que cinq unités décimales du douzième ordre; erreur facile à expliquer tant par la longueur et la multiplicité des calculs de la dernière méthode, que par l'inexactitude qui peut rester dans le dernier chiffre des nombres de la Table II, malgré tout le soin qu'on a pu mettre à la construction de cette Table.

779. Dans le calcul du tableau de l'art. 777, nous avons poussé le nombre des décimales jusqu'à douze, afin de mieux établir la comparaison des

résultats avec ceux de la Table II qui comprend un pareil nombre de décimales : mais le calcul s'abrégerait beaucoup, si l'on voulait se borner à dix ou à un moindre nombre de décimales.

En général, quel que soit le degré d'exactitude qu'on veut obtenir, il faut mettre un soin particulier à l'exacte détermination de l'amplitude α d'après laquelle la Table est formée. En supposant, comme nous l'avons fait, $F\alpha = \frac{1}{10} Fc$, il est nécessaire, pour connaître α, d'avoir l'échelle des modules qui résulte du module donné c. La Table VI ci-après donne cette échelle pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 15°, et ensuite de demi-degré en demi-degré, depuis 15° jusqu'à 45°. Mais cette Table n'est pas de nature à être interpolée, et ne serait d'aucun usage pour les angles du module qui n'y sont pas expressément contenus.

780. Pour obvier à cet inconvénient, nous avons pensé qu'il serait utile de construire une Table où l'on trouverait, pour tout angle donné du module, au moins de 0° à 45°, la valeur de α qui donne $F\alpha = \frac{1}{10} F^1c$. Dans cette vue, nous avons calculé directement la valeur de α pour tout angle du module de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 45°; nous avons ensuite interpolé les résultats en insérant quatre moyens entre deux termes consécutifs. C'est ainsi qu'a été formée la Table VII où l'on trouve la valeur de α pour tout angle du module de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 45°. Cette Table, dans laquelle les quantités α sont accompagnées de trois ordres de différences, le quatrième étant omis comme inutile ou pouvant être pris à vue, servira à déterminer par interpolation la valeur de α qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F^1c$, pour tout angle donné du module de 0° à 45°, sans qu'il soit besoin de connaître l'échelle des modules correspondante.

On n'a pas prolongé la Table VII au-delà de 45°, parce que l'interpolation deviendrait de plus en plus pénible, à mesure que l'angle du module s'éloignerait de ce terme, et aussi parce que passé 45°, il convient de prendre $F\alpha$ plus petit que $\frac{1}{10} F^1c$, et de plus en plus petit, à mesure que l'angle du module devient plus grand. En effet, pour que, suivant l'esprit de la méthode, le calcul des fonctions $E\varphi$, $F\varphi$, soit ramené à celui de deux autres fonctions Ey, Fy, dans lesquelles l'amplitude y n'excède pas 5 à 6 degrés, il faut que α n'excède pas 12°. D'après cette base, on peut faire $F\alpha = \frac{1}{12} F^1c$, depuis $\theta = 45°$, jusqu'à $\theta = 70°$, et $F\alpha = \frac{1}{16} F^1c$, depuis $\theta = 70°$, jusqu'à $\theta = 82°$. C'est ce qu'on trouve aisément par l'équation approchée $\frac{M}{c} l \tang (45° + \frac{1}{2} c\alpha) = nF'c$, dans laquelle substituant les valeurs $n = \frac{1}{12}$, $c = \sin 70°$, on trouve $\alpha = 11° 53'$, de même qu'en faisant $n = \frac{1}{16}$, $c = \sin 82°$, on trouve $\alpha = 11° 58'$.

781. Nous remarquerons que lorsqu'il y aura lieu de supposer .... $F\alpha = \frac{1}{12} F'c$, cette équation peut être résolue par de simples opérations trigonométriques, sans être obligé de former l'échelle des modules. En effet, l'angle α_4 qui satisfait à l'équation $F\alpha_4 = \frac{1}{3} F'c$, pourra se déterminer par la formule du n°. 24; connaissant α_4, il faudra employer les formules de la bissection, pour trouver successivement α_2 et α_1 ou α. Ensuite on trouvera les autres termes par les formules de la multiplication qui ne supposent pas connue l'échelle des modules. On pourrait même déterminer ces termes par la simple bissection, savoir : α_6 par la formule ordinaire... $\tang \alpha_6 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, et α_3 par la bissection de $F\alpha_6$. Il resterait à trouver par ces mêmes formules la valeur de α_5, ce qui peut se faire au moyen de l'équation des complémens qui donne d'abord $\cot \alpha_{10} = b \tang \alpha_2$, et ensuite α_5 par la bissection de $F\alpha_{10}$.

Il sera encore plus facile de résoudre l'équation $F\alpha = \frac{1}{16} F'c$, puisqu'elle n'exigera que les formules ordinaires de la bissection. Nous en donnerons bientôt un exemple pour le module sin 81°.

782. Pour montrer l'usage de la Table VII, supposons qu'on demande la valeur de α pour le module $\sin \theta = \frac{1}{3}$. De cette valeur du sinus on déduira d'abord l'angle correspondant

$$\theta = 19°,47122\ 06344\ 868;$$

on voit ensuite par la Table, qu'à l'angle du module 19°,4 répond la valeur $\varphi = 9°15'37'',83660\ 10$, et les différences toutes positives

$$\delta\varphi = 9{,}95614\ 40, \quad \delta^2\varphi = 5677\ 85, \quad \delta^3\varphi = 914, \quad \delta^4\varphi = 8;$$

faisant donc $x = 0{,}71220\ 6345$, et appliquant la formule ordinaire des interpolations, savoir :

$$\alpha = \varphi + x \left(\delta\varphi - \frac{1-x}{2} \left(\delta^2\varphi - \frac{2-x}{3} \left(\delta^3\varphi - \frac{3-x}{4} \delta^4\varphi, \right.\right.\right.$$

on aura

$$\alpha = 9°15'44'',92161\ 50.$$

783. Non-seulement la Table VII fait connaître pour chaque module moindre que sin 45°, l'angle α qui donne $F\alpha = \frac{1}{10} F'c$; mais on peut facilement tirer de cette même Table, la valeur correspondante de la fonction $E\alpha$. Voici comment on parvient à la formule nécessaire pour cette détermination.

Si on suppose que pour l'angle θ du module, l'amplitude φ satisfait à l'équation $F\varphi = nF^1c$, n étant un nombre fractionnaire constant, φ sera en général une fonction de θ; et comme $F\varphi$ ou F est fonction de θ et φ, on devra faire $dF = \left(\frac{dF}{d\theta} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}\right) d\theta = \left(\frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}\right) d\theta$, ce qui donnera l'équation

$$\frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = n \cdot \frac{dF^1}{d\theta};$$

mais en faisant $c = \sin\theta$, les formules de l'art. 45 donnent

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{E - F\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}, \quad \frac{dF^1}{d\theta} = \frac{E^1 - F^1\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta};$$

donc on a

$$E - F\cos^2\theta - n(E^1 - F^1\cos^2\theta) = \sin^2\theta \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta},$$

ou simplement

$$E = nE^1 + \sin^2\theta \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

Or, pour chaque valeur de θ comprise dans la Table VII, on trouvera immédiatement le coefficient différentiel $\frac{d\varphi}{d\theta}$, par la formule

$$360 \frac{d\varphi}{d\theta} = \delta\varphi - \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi + \tfrac{1}{3}\delta^3\varphi - \tfrac{1}{4}\delta^4\varphi,$$

où 360 est mis pour la différence $0^\circ{,}1$ des valeurs de θ, parce que les différences $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, etc., sont exprimées en secondes; quant aux valeurs de θ qui ne sont pas comprises dans la Table, on trouvera également par interpolation les valeurs correspondantes de $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, etc.; donc dans tous les cas, on connaîtra la valeur de $E\alpha$ qui répond à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10}F^1c$.

Dans l'exemple précédent, l'angle du module 45° est compris dans la Table; mais les différences qui répondent à 45°, dans le sens de l'accroissement de la variable θ, n'existant pas, faute de termes ultérieurs, on y suppléera par les différences dans l'ordre inverse, comme on l'expliquera ci-après art. 797.

On aura alors

$$\delta\varphi = 29{,}80516\ 98, \quad \delta^2\varphi = -11285\ 31, \quad \delta^3\varphi = 44\ 10, \quad \delta^4\varphi = -30,$$

ce qui donnera $\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{29{,}8617441}{360} = 0{,}08294\ 92892$.

Substituant ces valeurs, ainsi que celles de $\sin\varphi$, $\tang\varphi$, Δ, dans la formule $E = \frac{1}{10}E^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\varphi\cot\varphi}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}$, on aura $E = 0{,}18435\ 60577$, ce qui s'accorde suffisamment avec la valeur de $E\alpha$, dans le tableau de l'art 777.

CHAPITRE XI.

Application de la méthode précédente au calcul de la Table particulière pour le module c = sin 81°.

784. **N**ous supposerons $F\alpha = \frac{1}{16}F^1c$, et nous ferons les calculs avec toute l'exactitude que comportent les Tables à quatorze décimales, par la seule méthode de bissection, sans faire usage de l'échelle des modules, quoique cette échelle se trouve dans la Table VI.

La première bissection de la fonction F^1c se fait par les formules connues,
$$\tang\alpha_8 = \frac{1}{\sqrt{b}},\ \sin\alpha_8 = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}} = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 40^\circ\frac{1}{2}},\ \cos\alpha_8 = \sqrt{\left(\frac{b}{1+b}\right)},\ \Delta\alpha_8 = \sqrt{b},$$
et on a immédiatement les logarithmes de ces quantités, savoir :
$$l\tang\alpha_8 = 0,40283\ 37793\ 2150,\quad l\sin\alpha_8 = 9,96843\ 94867\ 9809,$$
$$l\Delta\alpha_8 \ldots = 9,59716\ 62206\ 7850,\quad l\cos\alpha_8 = 9,56560\ 57074\ 7659,$$
les quantités semblables pour α_4, se déduiront de la formule $\sin\alpha_4 = \ldots \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_8}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta\alpha_8)}}$; et d'abord pour avoir $\sin\frac{1}{2}\alpha_8$, je cherche $l(1+\cos\alpha_8)$ par la formule qui sert à déduire log (1 + A) de log A

log A =	9,56560 57074 7659	$a = \frac{185}{503}$	
log a ...	9,56560 37433 4709		
r =	19641 2950	$1 + a = \frac{688}{503}$	
r	4,29317 01185		
1 + a..	0,13602 04532		
r'.......	4,15714 96653		
a.......	9,56560 37433		
$\frac{1}{2}r'$.....	7180		
R.......	3,72275 41266		

1 + a..	0,13602 04531 7958
R.....	5281 4616
1 + cos α_8	0,13602 09813 2574
	0,30102 99956 6398
$\cos^2\frac{1}{2}\alpha_8$.	9,83499 09856 6176
$\cos\frac{1}{2}\alpha_8$.	9,91749 54928 3088
$\frac{1}{2}\sin\alpha_8$.	9,66740 94911 3411
$\sin\frac{1}{2}\alpha_8$.	9,74991 39983 0323.

De la valeur $\Delta\alpha_8 = \sqrt{b}$, on déduira par un calcul semblable

$l(1+\Delta\alpha_2)\ldots\ldots$	$=$	0,14473 54334 2026
		0,30102 99956 6398
		9,84370 54377 5628
$l\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta\alpha_2)}.$	$=$	9,92185 27188 7814
$l\sin\frac{1}{2}\alpha_2\ldots\ldots$		9,74991 39983 0323
$l\sin\alpha_4\ldots\ldots$	$=$	9,82806 12794 2509,

on trouvera cos α_4 d'une manière abrégée par la formule

$$\cos^2\alpha_4 = \frac{\Delta}{1+\Delta}\left[1+\frac{1}{\sqrt{(1+b)}}\right] = \frac{\Delta}{1+\Delta}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\theta+\cos 45^\circ}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{2\Delta}{1+\Delta}\cdot\frac{\cos\frac{90^\circ+\theta}{4}\cos\frac{90^\circ-\theta}{4}}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

où l'on a $\theta = 81^\circ$; on aura ensuite tang α_4, et $\Delta(\alpha_4) = \frac{\tang\frac{1}{2}\alpha_2}{\tang\alpha_4}$.

$\Delta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,59716 62206 7850
$\frac{2}{1+\Delta}\ldots\ldots\ldots\ldots$	0,15629 45622 4372
$\cos\frac{1}{4}(90^\circ+\theta)\ldots\ldots$	9,86588 68409 8715
$\cos\frac{1}{4}(90^\circ-\theta)\ldots\ldots$	9,99966 50455 5811
$1:\cos\frac{1}{2}\theta\ldots\ldots\ldots$	0,11895 44846 3008
$\cos^2\alpha_4\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,73796 71540 9756
$\cos\ \alpha_4\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,86898 35770 4878
$\sin\alpha_4\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,82806 12794 2509
$\tang\alpha_4\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,95907 77023 7631
$\tang\frac{1}{2}\alpha_2\ldots\ldots\ldots$	9,83241 85054 7235
$\Delta\alpha_4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	9,87334 08030 9604;

on connaît ainsi toutes les quantités sin α_4, cos α_4, tang α_4, $\Delta\alpha_4$, relatives au terme α_4.

785. Une troisième bissection donnera les quantités relatives à α_8, par le calcul des formules successives : $\sin\alpha_8 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_4.\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\Delta\alpha_4)}}$, $\tang\alpha_8 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_4\sqrt{2}}{\sqrt{(\Delta\alpha_4+\cos\alpha_4)}}$, $\Delta\alpha_8 = \frac{\tang\frac{1}{2}\alpha_4}{\tang\alpha_8}$; et pour cela, on fera toujours usage des formules qui donnent log $(1+A)$ par le moyen de log A; en voici les résultats :

$\sin\alpha_4 . \sqrt{\frac{1}{2}}$	9,67754 62815 9310	$\sin\alpha_4$	9,82806 12794 2509
$\sqrt{(1+\cos\alpha_4)}$.	0,12022 18668 3187	$1+\cos\alpha_4$	0,24044 37336 6374
$\sin\frac{1}{2}\alpha_4$	9,55732 44147 6123	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_4$	9,58761 75457 6135
$\sqrt{2}$	0,15051 49978 3199		
	9,70783 94125 9322	....	9,70783 94125 9322
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_4)}$...	0,12115 07714 8332	$\sqrt{(\Delta\alpha_4+\cos\alpha_4)}$.	0,08609 88250 7813
$\sin\alpha_2$	9,58668 86411 0990	$\operatorname{tang}\alpha_2$	9,62174 05875 1509
$\cos\alpha_2$	9,96494 80535 9481	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_4$	9,58761 75457 6135
		$\Delta\alpha_2$	9,96587 69582 4626.

On procédera de même au calcul des quantités relatives à α_1, par les formules $\sin\frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_2 . \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1+\cos\alpha_2)}}$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_2}{1+\cos\alpha_2}$, $\sin\alpha_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2 . \sqrt{2}}{\sqrt{(1+\Delta\alpha_2)}}$, $\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2 . \sqrt{2}}{\sqrt{(\Delta\alpha_2+\cos\alpha_2)}}$, $\Delta\alpha_1 = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2}{\operatorname{tang}\alpha_1}$; voici les résultats de ce calcul :

$\sin\alpha_2 . \sqrt{\frac{1}{2}}$	9,43617 36432 7791	$\sin\alpha_2$	9,58668 86411 0990
$\sqrt{(1+\cos\alpha_2)}$..	0,14192 87786 1774	$1+\cos\alpha_2$	0,28385 75572 3548
$\sin\frac{1}{2}\alpha_2$	9,29424 48646 6017	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2$	9.30283 10838 7442
$\sqrt{2}$	0,15051 49978 3199		
$\sin\frac{1}{2}\alpha_2 . \sqrt{2}$...	9,44475 98624 9216		9,44475 98624 9216
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_2)}$...	0,14215 17623 4500	$\sqrt{(\Delta\alpha_2+\cos\alpha_2)}$	0,13322 13749 6833
$\sin\alpha_1$	9,30260 81001 4716	$\operatorname{tang}\alpha_1$	9,31153 84875 2383
		$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2$	9,30283 10838 7442
		$\Delta\alpha_1$	9,99129 25963 5059.

Jusqu'ici nous n'avons point cherché les valeurs en degrés des angles α_8, α_4, α_2, α_1, et nous avons déterminé toutes les quantités qui en dépendent, par la seule table des logarithmes des nombres, et par l'application de la formule qui sert à trouver $\log(1+A)$ par le moyen de $\log A$; nous continuerons de suivre cette marche, qui semble la meilleure pour obtenir les résultats les plus exacts, en n'employant non plus que les formules de la bissection, et celles qui sont relatives aux fonctions complémentaires.

786. Les quantités déterminées pour α_4 feront connaître immédiatement les quantités analogues pour son complément α_{12}, au moyen des formules générales $\cot\psi = b \operatorname{tang}\varphi$, $\Delta\psi = \frac{b}{\Delta\varphi}$, $\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$, dans lesquelles on

fera $\varphi = \alpha_4$, $\psi = \alpha_{12}$; on aura ainsi pour α_{12} les logarithmes suivans :

tang α_{12}	0,84658 98562 6669
sin α_{12}	9,99564 27739 5274
cos α_{12}	9,14905 29176 8605
$\Delta(\alpha_{12})$	9,32099 16382 6096.

D'après ces élémens, on calculera ceux qui conviennent à α_6, ce qui donnera les résultats suivans :

$\sin\alpha_{12}\sqrt{\frac{1}{2}}$ . . .	9,84512 77761 2075	$\sin\alpha_{12}$	9,99564 27739 5274
$\sqrt{(1+\cos\alpha_{12})}$.	0,02863 25550 9193	$1+\cos\alpha_{12}$	0,05726 51101 8386
$\sin\frac{1}{2}\alpha_{12}$	9,81649 52210 2882	$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha_{12}$	9,93837 76637 6888
	0,15051 49978 3199		
$\sin\frac{1}{2}\alpha_{12}.\sqrt{2}$ . .	9,96701 02188 6081	. . . .	9,96701 02188 6081
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_{12})}$. .	0,04128 62773 4783	$\sqrt{(\Delta\alpha_{12}+\cos\alpha_{12})}$. .	9,77225 30854 3341
$\sin\alpha_6$	9,92572 39415 1298	$\text{tang}\,\alpha_6$.	0,19475 71334 2740
$\cos\alpha_6$	9,73096 68080 8558	$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha_{12}$	9,93837 76637 6888
		$\Delta\alpha_6$	9,74362 05303 4148.

De ces élémens, on déduira encore par une nouvelle bissection, ceux de α_3, comme il suit :

$\sin\alpha_6.\sqrt{\frac{1}{2}}$. . . .	9,77520 89436 8099	$\sin\alpha_6$	9,92572 39415 1298
$\sqrt{(1+\cos\alpha_6)}$.	0,09351 04473 6726	$1+\cos\alpha_6$.	0,18702 08947 3452
$\sin\frac{1}{2}\alpha_6$	9,68169 84963 1373	$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha_6$	9,73870 30467 7846
	0,15051 49978 3199		
$\sin\frac{1}{2}\alpha_6.\sqrt{2}$ . .	9,83221 34941 4572	. . . .	9,83221 34941 4572
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_6)}$. . .	0,09574 52527 8769	$\sqrt{(\Delta\alpha_6+\cos\alpha_6)}$.	0,01918 48742 6726
$\sin\alpha_3$	9,73646 82413 5813	$\text{tang}\,\alpha_3$	9,81302 86198 7846
$\cos\alpha_3$	9,92343 96214 7967	$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha_6$	9,73870 30467 7846.
		$\Delta\alpha_3$	9,92567 44269 0000.

787. Des élémens de α_8, on déduit ceux de α_{10} par les formules des complémens, savoir :

tang α_{10}	0,61091 04252 1560
sin α_{10}	9,98734 62777 4410
cos α_{10}	9,37643 58525 2850
$\Delta(\alpha_{10})$	9,45071 19110 1552

et de ces derniers, on déduit par bissection les élémens de α_5 comme il suit :

$\sin\alpha_{10}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ . . .	9,83683 12799 1211	$\sin\alpha_{10}$	9,98734 62777 4410
$\sqrt{(1+\cos\alpha_{10})}$.	0,04634 67607 6243	$1+\cos\alpha_{10}$ . . .	0,09269 35215 2485
$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_{10}$	9,79048 45191 4968	$\tang\tfrac{1}{2}\alpha_{10}$	9,89465 27562 1925
	0,15051 49978 3199		
$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_{10}.\sqrt{2}$. . .	9,94099 95169 8167	. . . .	9,94099 95169 8167
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_{10})}$ . .	0,05399 49348 2754	$\sqrt{(\Delta\alpha_{10}+\cos\alpha_{10})}$	9,85809 49234 2723
$\sin\alpha_5$	9,88700 45821 5413	$\tang\alpha_5$.	0,08290 45935 5444
$\cos\alpha_5$	9,80409 99885 9969	$\tang\tfrac{1}{2}\alpha_{10}$. . . .	9,89465 27562 1925
		$\Delta\alpha_5$	9,81174 81626 6481.

788. Enfin, pour trouver les élémens de α_7, il faudra d'abord prendre le complément des élémens de α_8, pour avoir ceux de α_{14}, savoir :

$\tang\alpha_{14}$.	1,18392 69711 2791
$\sin\alpha_{14}$.	9,99907 10953 4855
$\cos\alpha_{14}$.	8,81514 41242 2064
$\Delta\alpha_{14}$.	9,22845 54831 1074;

on déduira ensuite de la bissection les résultats suivans :

$\sin\alpha_{14}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ . . .	9,84855 60975 1656	$\sin\alpha_{14}$	9,99907 10953 4855
$\sqrt{(1+\cos\alpha_{14})}$.	0,01374 30433 6552	$1+\cos\alpha_{14}$. . . .	0,02748 60867 31 5
$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_{14}$.	9,83481 30541 5104	$\tang\tfrac{1}{2}\alpha_{14}$	9,97158 50086 1750
	0,15051 49978 3199		
$\sin\tfrac{1}{2}\alpha_{14}.\sqrt{2}$ . .	9,98532 80519 8303	. . . .	9,98532 80519 8303
$\sqrt{(1+\Delta\alpha_{14})}$ . .	0,03394 83922 0521	$\sqrt{(\Delta\alpha_{14}+\cos\alpha_{14})}$	9,68512 34689 4358
$\sin\alpha_7$	9,95137 96597 7782	$\tang\alpha_7$.	0,30020 45830 3945
		$\tang\tfrac{1}{2}\alpha_{14}$.	9,97158 50086 1750
		$\Delta\alpha_7$	9,67138 04255 7805.

789. Si l'on joint à ces résultats ceux que donnent les formules des complémens appliquées aux amplitudes α_1, α_3, α_5, α_7, on aura les logarithmes des quantités $\sin\alpha$, $\tang\alpha$, $\Delta\alpha$, pour tous les termes de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{16}$.

Il faut maintenant chercher les valeurs correspondantes de la fonction $E\alpha$, ce qui se fera aisément par les log-sinus déjà trouvés. Voici le calcul de ces fonctions, où l'on trouvera de nombreuses vérifications qui prouvent l'exactitude de nos résultats.

Par la Table I, on a $\log E^1 = 0{,}01443\ 21010\ 0944$, ce qui donne $E^1 = 1{,}03378\ 94623\ 9087$; substituant cette valeur ainsi que celle de $1-b = 0{,}84356\ 55349\ 5977$, dans l'équation $E\alpha_8 = \tfrac{1}{2}E^1 + \tfrac{1}{2}(1-b)$, on aura

$E\alpha_8 = 0{,}93867\ 74986\ 7532$. Ce terme va servir à calculer tous les autres.

Calcul de $E\alpha_4$ par la formule $2E\alpha_4 - E\alpha_8 = c^2 \sin^2 \alpha_4 \sin \alpha_8$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_8$..... =	0,93867 74986 7532
$\sin^2\alpha_4$.	9,65612 25588 5018	p......	0,41096 22209 6138
$\sin\alpha_8$..	9,96843 94867 9809		1,34963 97196 3670
p.....	9,61380 18997 7843	$E\alpha_4$..... =	0,67481 98598 1835.

Calcul de $E\alpha_2$ par la formule $2E\alpha_2 - E\alpha_4 = c^2 \sin^2 \alpha_2 \sin \alpha_4$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_4$..... =	0,67481 98598 1835
$\sin^2\alpha_2$.	9,17337 72822 1980	p.......	0,09787 64965 9827
$\sin\alpha_4$..	9,82806 12794 2509		0,77269 63564 1662
p.....	8,99067 84157 7505	$E\alpha_2$..... =	0,38634 81782 0831.

Calcul de $E\alpha$ par l'équation $2E\alpha - E\alpha_2 = c^2 \sin^2 \alpha \sin \alpha_2$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_2$..... =	0,38634 81782 0831
$\sin^2\alpha$..	8,60521 62002 9432	p.......	0,01517 55589 3074 6
$\sin\alpha_2$..	9,58668 86411 0990		0,40152 37371 3905 6
p.....	8,18114 46955 3438	$E\alpha$..... =	0,20076 18685 6952 8.

Calcul de $E\alpha_{12}$, 1°. par l'équation $E\alpha_4 + E\alpha_{12} = E^1 + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_{12}$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	E^1c..... =	1,03378 94623 9087
$\sin\alpha_4$..	9,82806 12794 2509	$E\alpha_4$....	0,67481 98598 1835
$\sin\alpha_{12}$.	9,99564 27739 5274		0,35896 96025 7252
p.....	9,81294 39075 0799	p......	0,65004 57264 8663
		$E\alpha_{12}$.... =	1,00901 53290 5915.

2°. Par l'équation $E\alpha_4 + E\alpha_8 = E\alpha_{12} + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{12}$.

$c^2 f\alpha_4 f\alpha_{12}$	9,81294 39075 0799	$E\alpha_8 + E\alpha_4$ =	1,61349 73584 9367
$\sin\alpha_8$...	9,96843 94867 9809	p....... =	0,60448 20294 3456
p......	9,78138 33943 0608	$E\alpha_{12}$.... =	1,00901 53290 5911
Milieu entre les deux résultats :		$E\alpha_{12}$.... =	1,00901 53290 5913.

Calcul de $E\alpha_6$ par l'équation $2E\alpha_6 - E\alpha_{12} = c^2 \sin^2 \alpha_6 \sin \alpha_{12}$.

c^2....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_{12}$.... =	1,00901 53290 5913
$\sin^2\alpha_6$.	9,85144 78830 2596	p.......	0,68601 01020 8131
$\sin\alpha_{12}$.	9,99564 27739 5274		1,69502 54311 4044
p.....	9,83653 05111 0886	$E\alpha_6$..... =	0,84751 27155 7022.

Calcul de $E\alpha_3$ par l'équation $2E\alpha_3 - E\alpha_6 = c^2 \sin^2 \alpha_3 \sin \alpha_6$.

c^2	9,98923 98541 3016	$E\alpha_6$ .... =	0,84751 27155 7022
$\sin^2 \alpha_3$.	9,47293 64827 1626	p	0,24428 69562 5341 1
$\sin \alpha_6$ ..	9,92572 39415 1298		1,09179 96718 2363 1
p	9,38790 02783 5940	$E\alpha_3$ .... =	0,54589 98359 1181 6.

Calcul de $E\alpha_{10}$, 1°. par l'équation $E\alpha_6 + E\alpha_{10} = E^1 + c^2 \sin \alpha_6 \sin \alpha_{10}$.

c^2	9,98923 98541 3016	$E^1 - E\alpha_6$. =	0,18627 67468 2065
$\sin \alpha_6$.	9,92572 39415 1298	p	0,79856 46352 6023 4
$\sin \alpha_{10}$.	9,98734 62777 4410	$E\alpha_{10}$ .... =	0,98484 13820 8088 4.
p	9,90231 00733 8724		

2°. Par l'équation $E\alpha_2 + E\alpha_8 = E\alpha_{10} + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{10}$.

$c^2 \sin \alpha_2$.	9,57592 84952 4006	$E\alpha_2 + E\alpha_8$ =	1,32502 56768 8363
$\sin \alpha_8$.	9,96843 94867 9809	p	0,34018 42948 0271 2
$\sin \alpha_{10}$.	9,98734 62777 4410	$E\alpha_{10}$ .... =	0,98484 13820 8091 8.
p	9,53171 42597 8225		

Milieu entre les deux résultats : $E\alpha_{10}$ .... = 0,98484 13820 8090.

Calcul de $E\alpha_5$, 1°. par l'équation $2E\alpha_5 - E\alpha_{10} = c^2 \sin^2 \alpha_5 \sin \alpha_{10}$.

c^2	9,98923 98541 3016	$E\alpha_{10}$ .... =	0,98484 13820 8090
$\sin^2 \alpha_5$.	9,77400 91643 0826	p	0,56311 26662 8236 5
$\sin \alpha_{10}$.	9,98734 62777 4410		1,54795 40483 6326 5
p	9,75059 52961 8252	$E\alpha_5$ .... =	0,77397 70241 8163 3.

2°. Par l'équation $E\alpha_3 + E\alpha_5 = E\alpha_8 + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 \sin \alpha_8$.

$c^2 \sin \alpha_3$	9,72570 80954 8829	$E\alpha_8 - E\alpha_3$ =	0,39277 76627 6350 4
$\sin \alpha_5$..	9,88700 45821 5413	p	0,38119 93614 1811 7
$\sin \alpha_8$..	9,96843 94867 9809	$E\alpha_5$.... =	0,77397 70241 8162 1.
p	9,58115 21644 4051		

Milieu entre les deux résultats : $E\alpha_5$ = 0,77397 70241 8162 7

Calcul de $E\alpha_{14}$, 1°. par l'équation $E\alpha_2 + E\alpha_{14} = E^1 + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_{14}$.

$c^2 \sin \alpha_2$	9,57592 84952 4006	$E^1 - E\alpha_2$ =	0,64744 12841 8256
$\sin \alpha_{14}$.	9,99907 10953 4855	p	0,37583 70499 8497 5
p	9,57499 95905 8861	$E\alpha_{14}$.... =	1,02327 83341 6753 5.

2°. Par l'équation $E\alpha_6 + E\alpha_8 = E\alpha_{14} + c^2 \sin\alpha_6 \sin\alpha_8 \sin\alpha_{14}$.

$c^2 \sin\alpha_6$	9,91496 37956 4314	$E\alpha_8 + E\alpha_6$ =	1,78619 02142 4554
$\sin\alpha_8$..	9,96843 94867 9809	p....... =	0,76291 18800 7799 1
$\sin\alpha_{14}$.	9,99907 10953 4855	$E\alpha_{14}$.... =	1,02327 83341 6754 9.
p.....	9,88247 43777 8978		

Milieu entre les deux résultats : $E\alpha_{14}$ = 1,02327 83341 6754 2

Calcul de $E\alpha_7$, 1°. par l'équation $2E\alpha_7 - E\alpha_{14} = c^2 \sin^2\alpha_7 \sin\alpha_{14}$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_{14}$.... =	1,02327 83341 6754 2
$\sin^2\alpha_7$.	9,90275 93195 5564	p......	0,77816 24478 7389 7
$\sin\alpha_{14}$.	9,99907 10953 4855		1,80144 07820 4143 9
p.....	9,89107 02690 3435	$E\alpha_7$.... =	0,90072 03910 2072 0.

2°. Par l'équation $E\alpha + E\alpha_7 = E\alpha_8 + c^2 \sin\alpha \sin\alpha_7 \sin\alpha_8$.

$c^2 \sin\alpha$.	9,29184 79542 7732	$E\alpha_8 - E\alpha$ =	0,73791 56301·0579 2
$\sin\alpha_7$..	9,95137 96597 7782	p......	0,16280 47609 1482 4
$\sin\alpha_8$..	9,96843 94867 9809	$E\alpha_7$.... =	0,90072 03910 2071 6.
p.....	9,21166 71008 5323		

Milieu : $E\alpha_7$ = 0,90072 03910 2071 8.

Calcul de $E\alpha_9$, 1°. par l'équation $E\alpha_7 + E\alpha_9 = E^1 + c^2 \sin\alpha_7 \sin\alpha_9$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	E^1...... =	1,03378 94625 9087
$\sin\alpha_7$..	9,95137 96597 7782	$E\alpha_7$.....	0,90072 03910 2071 8
$\sin\alpha_9$..	9,97979 46511 6032		0,13306 90713 7015 2
p.....	9,92041 41650 6830	p......	0,83255 73612 2633 7
		$E\alpha$. ... =	0,96562 64325 9648 9

2°. Par l'équation $E\alpha + E\alpha_8 = E\alpha_9 + c^2 \sin\alpha \sin\alpha_8 \sin\alpha_9$.

$c \sin\alpha$.	9,29184 79542 7732	$E\alpha_8 + E\alpha$ =	1,13943 93672 4485
$\sin\alpha_8$.	9,96843 94867 9809	p.......	0,17381 29346 4837 3
$\sin\alpha_9$.	9,97979 46511 6032	$E\alpha_9$..... =	0,96562 64325 9647 7.
p.....	9,24008 20922 3573		

Milieu : $E\alpha_9$ = 0,96562 64325 9648 3.

Calcul de $E\alpha_{11}$, 1°. par l'équat. $E\alpha_5 + E\alpha_{11} = E' + c^2 \sin\alpha_5 \sin\alpha_{11}$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	E'...... =	1,03378 94623 9087
$\sin\alpha_5$.	9,88700 45821 5413	$E\alpha_5$.....	0,77397 70241 8162 7
$\sin\alpha_{11}$.	9,99235 18259 3488		0,25981 24382 0924 3
p.....	9,86859 62622 1917	p.......	0,73891 80274 6592 7
		$E\alpha_{11}$.... =	0,99873 04656 7517.

2°. Par l'équation $E\alpha_3 + E\alpha_8 = E\alpha_{11} + c^2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_8 \sin\alpha_{11}$.

$c^2 \sin\alpha_3$	9,72570 80954 8829	$E\alpha_8 + E\alpha_3$ =	1,48457 73345 8713 6
$\sin\alpha_8$..	9,96843 94867 9809	p......	0,48584 68689 1194 1
$\sin\alpha_{11}$..	9,99235 18259 3488	$E\alpha_{11}$.... =	0,99873 04656 7519 5.
p.....	9,68649 94082 2126.		

Milieu : $E\alpha_{11}$ = 0,99873 04656 7518 2.

Calcul de $E\alpha_{13}$, 1°. par l'équat. $E\alpha_3 + E\alpha_{13} = E' + c^2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_{13}$.

$c^2 \sin\alpha_3$	9,72570 80954 8829	$E' - E\alpha_3$ =	0,48788 96264 7905 4
$\sin\alpha_{13}$.	9,99776 51945 7967	p.......	0,52902 14603 8867 2
p.....	9,72347 32900 6796	$E\alpha_{13}$.... =	1,01691 10868 6772 6

2°. Par l'équation $E\alpha_5 + E\alpha_8 = E\alpha_{13} + c^2 \sin\alpha_5 \sin\alpha_8 \sin\alpha_{13}$.

$c^2 \sin\alpha_5$	9,87624 44362 8429	$E\alpha_8 + E\alpha_5$ =	1,71265 45228 5694 7
$\sin\alpha_8$..	9,96843 94867 9809	p.......	0,69574 34359 8921 7
$\sin\alpha_{13}$.	9,99776 51945 7967	$E\alpha_{13}$.... =	1,01691 10868 6773.
p.....	9,84244 91176 6205		

Milieu: $E\alpha_{13}$ = 1,01691 10868 67728.

Calcul de $E\alpha_{15}$, 1°. par l'équat. $E\alpha + E\alpha_{15} = E' + c^2 \sin\alpha \sin\alpha_{15}$.

$c^2 \sin\alpha$.	9,29184 79542 7732	$E'c - E\alpha$ =	0,83302 75938 2134
$\sin\alpha_{15}$.	9,99977 70162 7274	p.......	0,19571 53868 3621 8
p.....	9,29162 49705 5006	$E\alpha_{15}$.... =	1,02874 29806 5775 8.

2°. Par l'équation $E\alpha_7 + E\alpha_8 = E\alpha_{15} + c^2 \sin\alpha_7 \sin\alpha_8 \sin\alpha_{15}$.

c^2.....	9,98923 98541 3016	$E\alpha_8 + E\alpha_7$ =	1,83939 78896 9603 8
$\sin\alpha_7$..	9,95137 96597 7782	p......	0,81065 49090 3848 4
$\sin\alpha_8$.	9,96843 94867 9809	$E\alpha_{15}$.... =	1,02874 29806 5755 4.
$\sin\alpha_{15}$.	9,99977 70162 7274		
p.....	9,90883 60169 7881		

Milieu : $E\alpha_{15}$ = 1,02874 29806 5755 6.

790. Il ne reste plus, pour compléter notre Tableau, qu'à calculer les valeurs de φ, qui répondent aux logarithmes connus de leurs sinus ou de leurs tangentes. Il est préférable pour cet objet, d'employer les log-tangentes, principalement depuis 45° jusqu'à 90°; on se servira donc des formules suivantes, qui paraissent les plus commodes dans la pratique :

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log \operatorname{tang} a + r, \quad p = \tfrac{1}{2} \mathrm{M} r,$$
$$\varphi - a = p \sin 2a\,(1 + p\cos 2a + \tfrac{2}{3} p^2 \cos 4a).$$

Pour cet effet, on prendra dans la *Trig. Brit.,* l'angle a, tel que l tang a approche le plus qu'il est possible, en plus ou en moins, de l tang φ; on calculera avec les Tables à dix décimales, le premier terme $(1) = p \sin 2a$, qu'on aura soin de multiplier par R°, pour exprimer la correction (1) en parties décimales de degré, jusqu'au douzième ordre au moins; de là on déduira les deux autres corrections $(2) = (1)\,.\,p\cos 2a$, $(3) = (1)\,.\,\frac{2}{3}p^2 \cos 4a$, et du tout on formera la valeur de $\varphi - a$, en observant les signes que doivent avoir les termes, suivant ceux des facteurs p, cos $2a$, cos $4a$.

C'est ainsi qu'ont été calculées les valeurs de φ qu'on voit dans la Table; elles sont bornées à la douzième décimale de degré, ce qui est un degré de précision correspondant aux quatorze décimales des log-tangentes.

Voici un des calculs de ce genre que nous donnons pour exemple :

$\varphi = a_4$......	l tang φ =	9,95907 77023 7631
angle approché, a = 42°, 30..	l tang a =	9,95900 79781 2573
l tang A = l tang $a+r$....	r =	6 97242 5058

r.... 5,84338 38549 9	$2a$ = 84.60	$a+(1)$ =	42° 30457 88928 051
$\frac{1}{2}$M.. 0,06118 66930 4	$4a$ = 169.20	(2) +	345 906
p.... 5,90456 95480 3		(3) —	193
sin $2a$ 9,99806 82960 5		φ =	42,30457 89273 764
R°... 1,75812 26324 1			

(1)... 7,66076 04764 9	...... 7,66076 0
p.... 5,90456 9548	p^2.... 1,80913 9
cos $2a$. 8,97362 799	$\frac{2}{3}$cos $4a$ 9,81614 7
(2)... 2,53895 801	(3).... 9,28594 6.

791. La formule dont nous venons de donner une application suppose qu'on peut négliger les termes de l'ordre p^4, ce qui aura toujours lieu lorsque l'angle φ sera au-dessus de 5°. Dans tout autre cas, la quantité tang φ étant très petite, on fera tang $\varphi = t$, et on calculera φ par la suite or-

dinaire $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$, dont tous les termes devront être multipliés par R°, et qui sera alors fort convergente. On ferait la même chose pour $\tang(90^\circ - \varphi)$, si φ était très près de 90°.

Par exemple, pour calculer l'angle α_{15} par le moyen de son log-tang., soit A le complément de α_{15} et $\tang A = t$; on aura

$$\log t = 8{,}50587\ 09288\ 8083,$$

et $A = R^\circ t(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8)$. Voici les logarithmes de ces cinq termes, et les nombres correspondans exprimés en degrés et décimales de degré.

(1)...	0,26399 35612 9000	(1)	=	1° 83651 11156 2465
(2)...	6,79861 41643 3	(2)...	—	62 89471 6567
				1,83588 21684 5898
(3)...	3,58850 7272	(3)...	+	3877 1024
				25561 6922
(4)...	0,45412 11	(4)...	=	2 8452
				25558 8470
(5)...	7,35672	(5)...	+	23
		A	=	1,83588 25558 8493
		donc α_{15}	=	88° 16411 74441 1507.

792. Au moyen du tableau que nous venons de construire, la détermination des fonctions E et F pour toute amplitude proposée φ, peut être ramenée immédiatement aux cas où l'amplitude proposée est moindre que 6°; car en choisissant pour a le terme de la table qui approche le plus de φ (celui au moins pour lequel la différence $F\varphi - Fa$, est la plus petite), on aura toujours $F\varphi - Fa$ ou $Fy < \frac{1}{32} F^1c$, et par conséquent $y < 6^\circ$.

Nous avons donné dans l'art. 778 les formules nécessaires pour calculer les valeurs des fonctions Ey et Fy, lorsque l'angle y est d'un petit nombre de degrés. Mais, lorsque y approchera de la limite 6°, ces formules, dans lesquelles on a négligé les termes de l'ordre y^9, ne pourront guère donner que dix décimales exactes, et il faudrait les prolonger jusqu'aux termes y^{11} ou même y^{13}, pour avoir un degré d'exactitude égal à celui de notre tableau. Pour éviter cet inconvénient, et réduire tous les calculs aux formules ordinaires d'interpolation, il faudra construire une seconde Table qui contienne les valeurs des fonctions E et F pour des amplitudes croissant par de petits intervalles depuis 0° jusqu'à 6°.

Cette table, que nous appellerons la table n° 2, pour la distinguer de la table n° 1, que nous avons déjà construite, peut se calculer de demi-degré en demi-degré, par les formules de l'article cité, sauf à leur donner plus d'étendue, lorsque l'angle y devient plus grand ; mais nous préférons de la calculer ici par la méthode du chapitre VI, qui peut également servir à calculer la table principale n° 1.

Il suffira pour notre objet de calculer les valeurs de φ et de $E\varphi$ qui répondent aux différentes valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots 12$, dans l'équation $F\varphi = \frac{n}{12} \cdot \frac{F^1c}{32}$; car de cette manière les valeurs de φ croîtront par des intervalles moindres qu'un demi-degré, et l'interpolation pourra être faite avec toute l'exactitude qu'on peut désirer, pour toute valeur de n moindre que 12.

793. Cherchons d'abord l'amplitude 6 qui satisfait à l'équation $F6 = \frac{1}{12} \cdot \frac{F^1c}{32} = t$, où l'on a $\log t = 7{,}92826\ 01863\ 4903$. Le moyen le plus simple est de résoudre l'équation suivante dans laquelle on a négligé les quantités de l'ordre 6^7 qui n'entrent pas dans les quatorze premières décimales.

$$F6 = 6 + \tfrac{1}{2} c^2 \left(\frac{6^3}{3} - \frac{6^5}{15}\right) + \frac{3c^4}{40} 6^5 = t;$$

on en tire

$$6 = t - \tfrac{1}{6} c^2 t^3 + \frac{c^2}{30} t^5 + \frac{c^4}{120} t^5 ;$$

ensuite on aura $E6$ par l'équation

$$E6 + F6 = 26 + \frac{c^4}{20} 6^5 ;$$

substituant la valeur connue de t, il en résulte

$$\begin{aligned} 6 &= 0{,}00847\ 72523\ 60254 \\ F6 &= 0{,}00847\ 73514\ 11832 \\ E6 &= 0{,}00847\ 71533\ 10760, \end{aligned}$$

on aura en même temps la formule

$$\log 6 = \log t - \frac{mc^2}{6} t^2 + \frac{mc^2}{30} t^4 - \frac{mc^4}{180} t^4 ,$$

d'où l'on deduit la valeur de 6 en parties décimales de degré, comme il suit :

$$\begin{array}{ll} 6 \ldots\ldots & 7{,}92825\ 51119\ 09746 \\ R^\circ \ldots\ldots & \underline{1{,}75812\ 26324\ 09172} \\ & 9{,}68637\ 77443\ 18918 \\ 6 \ldots & = 0^\circ 48571\ 07821\ 09868. \end{array}$$

Maintenant, pour construire la table dont il s'agit, il faut reprendre les formules de l'art. 731 ci-dessus.

794. Soient φ°, φ, φ', trois termes consécutifs de la suite 6_1, 6_2, 6_3, etc., qui répond aux valeurs successives $n=1, 2, 3$, etc.; on déterminera k par l'équation $\frac{\sqrt{k}}{1+k}=\frac{1}{2}c\sin 6=\frac{1}{2}p$, qui donne

$$\log k=\log\frac{p^2}{4}+m\left(\frac{1}{2}\cdot p^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{p^4}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{p^6}{3}+\text{ etc.}\right);$$

si ensuite on fait $\delta^2\varphi^\circ=-2\omega$, on aura pour déterminer ω l'équation

$$\sin\omega=k\sin(2\varphi+\omega),$$

ou la série

$$\omega=k\sin 2\varphi-\frac{1}{2}k^2\sin 4\varphi+\frac{1}{3}k^3\sin 6\varphi-\text{etc.}$$

Enfin, pour déterminer $E\varphi'$, on observera qu'à l'équation $F\varphi+F6=F\varphi'$, correspond l'équation $E6+E\varphi=E\varphi'+c^2\sin 6\sin\varphi\sin\varphi'$, d'où résulte

$$E\varphi'=E\,6+E\varphi-c^2\sin 6\sin\varphi\sin\varphi';$$

quant aux cofficiens qui entrent dans ces équations, voici leurs logarithmes :

k......	5,24369 49064 2596
kR°....	7,00181 75388 3513
$\frac{1}{2}k^2R^\circ$..	$\bar{1}$,94448 24496
$\frac{1}{3}k^3R^\circ$..	$\bar{7}$,01208 6
$\sin 6$...	7,92824 99102 2144
$c^2\sin 6$.	7,91748 97643 5160.

795. D'après ces formules, nous allons procéder aux calculs nécessaires pour former la table n° 2.

Calcul de 6_2 *et* $E6_2$.

Il faut, dans les formules, faire $\varphi^\circ=0$, $\varphi=6$, et on aura $\varphi'=6_2$. On observera d'ailleurs que les tables à dix décimales suffisent pour calculer le premier terme de la valeur de ω; mais à cause de la petitesse de l'angle 2φ, il conviendra de calculer son log-sinus par la formule du n° 763, et on aura la valeur 6_2 par le calcul suivant :

sin 2φ..	8,22926 43006 7
kR°....	7,00181 75388 3
(1).....	5,23108 18395
sin 4φ..	8,53023 19
$\frac{1}{2}k^2$R°..	1,94448 24
(2).....	0,47471 43
sin 6φ..	8,70622
$\frac{1}{3}k^3$R°..	7,01209
(3).....	5,71831.

(1)....	=	0°00001 70247 92974
(2)....	−	2 98342
(3)....	+	5
ω.....	=	0,00001 70244 94637
$\delta^2\varphi^\circ$...	=	−0,00003 40489 89274
$\delta\varphi^\circ$....	=	0,48571 07821 09868
$\delta\varphi$.....	=	0,48567 67331 20594
φ......	=	0,48571 07821 09868
$\mathcal{C}_2 = \varphi'$	=	0,97138 75152 30462.

Pour avoir E$\mathcal{C}_2$, il faut calculer le terme $c^2 \sin \mathcal{C} \sin \varphi \sin \varphi'$, ou $c^2 \sin^2 \mathcal{C}$ $\sin \varphi'$; mais, dans la vue de faciliter le calcul de $\mathcal{C}_3$, on cherchera à la fois les logarithmes de $\sin \varphi'$ et $\cos \varphi'$, par les formules de l'art. 763, ce qui donnera les résultats suivans :

R°φ'.....	9,98739 25174 0
R°.......	1,75812 26324 1
φ'.......	8,22926 98849 9
(1)... =	0,00006 24157 343
(2)...	29 901
(3)...	2
cos φ'. —	0,00006 24187 246
$\frac{1}{3}$(1) =	0,00002 08052 448
$\frac{1}{15}$(2)..	1 993
	2 08054 441
φ'......	8,22926 98849 9
sin φ'...	8,22924 90795 46
cos φ'...	— 6 24187 25
2......	0,30102 99956 64
sin $2\varphi'$..	8,53021 66564 85

φ'^2	6,45853 97700		
	9,33675 43156		
(1)	5,79529 40856		
φ'^4	2,91707 95	φ'^6	9,37562
	8,55860 31		7,98457
(2)	1,47568 26	(3)	7,36019

$c^2 \sin^2 \mathcal{C}$.....		5,84573 96746
sin φ'.......		8,22924 90795
Z..........		4,07498 87541
2E$\mathcal{C}$.....	=	0,01695 43066 2152
Z.......		11884 7145
E$\mathcal{C}_2$ = Eφ'	=	0,01695 31181 5007.

Calcul de $\mathcal{C}_3$ et E$\mathcal{C}_3$.

Il faut, dans les formules, faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}$, $\varphi = \mathcal{C}_2$, et on aura $\varphi' = \mathcal{C}_3$. Dans ce cas, sin 2φ devient ce qu'était sin $2\varphi'$ dans le cas précédent.

$\sin 2\varphi$...	8,53021 66564 85
kR°.....	7,00181 75388 35
(1).....	5,53203 41953 20
4φ... =	3° 53′ 7″ 98
$\sin 4\varphi$...	8,83099 70
	1,94448 24
(2)......	0,77547 94
6φ... =	5° 49′ 42″
$\sin 6\varphi$...	9,00667
	7,01208
(3)......	6,01875
$\sin \varphi'$....	8,40528 89681 51
$\cos \varphi'$...	— 14 04341 06
2.......	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$..	8,70617 85297 09

(1)... =	0°00003 40434 99370
(2)...	— 5 96320
(3)...	+ 10
ω.... =	0,00003 40429 03060
$\delta^2\varphi^{\circ}$.. =	−0,00006 80858 06120
$\delta\varphi^{\circ}$..	0,48567 67331 20594
$\delta\varphi$... =	0,48560 86473 14474
φ.... =	0,97138 75152 30462
$ϐ_3 = \varphi'$ =	1,45699 61625 44936
$c^2 \sin ϐ$..	7,91748 97643 5
$\sin \varphi$....	8,22924 90795 5
$\sin \varphi'$....	8,40528 89681 5
z.....	4,55202 78120 5
$E\varphi$... =	0,01695 31181 5007
$Eϐ$...	847 71533 1076
z....	— 35647 3961
$Eϐ_3 = E\varphi'$ =	0,02542 67067 2122.

Calcul de $ϐ_4$ et $Eϐ_4$.

Il faudra faire $\varphi_0 = ϐ_2$, $\varphi = ϐ_3$, et on aura $\varphi' = ϐ_4$. Voici le calcul d'après ces données, en suivant la même marche que dans le cas précédent :

$\sin 2\varphi$...	8,70617 85297 09
kR°.....	7,00181 75388 35
(1)......	5,70799 60685 44
4φ... =	5° 49′ 40″ 74
$\sin 4\varphi$...	9,00664 65
	1,94448 24
(2)......	0,95112 89
6φ... =	8° 44′ 31″ 12
$\sin 6\varphi$...	9,18180
	7,01208
(3)......	6,19388

(1)... =	0,00005 10500 37866 0
(2)...	— 8 93570 7
(3)...	+ 15 6
ω.... =	0,00005 10491 44311
$\delta^2\varphi^{\circ}$.. =	− 0,00010 20982 88622
$\delta\varphi^{\circ}$..	0,48560 86473 14474
$\delta\varphi$...	0,48550 65490 25852
φ....	1,45699 61625 44936
$ϐ_4 = \varphi'$ =	1,94250 27115 70788..

$\sin\varphi'$...	8,53015 58004 64	$c^2 \sin \beta$	7,91748 97643 52
$\cos\varphi'$...	— 24 97407 81	$\sin\varphi$..	8,40528 89681 51
	8,52990 61596 83	$\sin\varphi'$..	8,53015 58004 64
	0,30102 99956 64	y.....	4,85293 45329 67
$\sin 2\varphi'$..	8,83093 61553 47		
		$E\varphi$.... =	0,02542 67067 2122
		$E\beta$....	847 71533 1076
			0,03390 38600 3198
		y.....	71274 55803
		$E\beta_4 = E\varphi'$ =	0,03389 67325 76177.

Calcul de β_5 et $E\beta_5$.

Il faut faire dans les formules $\varphi^\circ = \beta_3$, $\varphi = \beta_4$, $\varphi' = \beta_5$, ce qui donnera les résultats suivans :

$\sin 2\varphi$...	8,83093 61553 47	(1)...	0°00006 80383 37650
kR°.....	7,00181 75388 35	(2)...	— 11 89733
(1).....	5,83275 36941 82	(3)...	+ 21
4φ... =	7° 46′ 12″ 039	ω.... =	0,00006 80371 47938
$\sin 4\varphi$...	9,13096 70	$\delta^2\varphi^\circ$.. =	— 0,00013 60742 95876
	1,94448 24	$\delta\varphi^\circ$...	0,48550 65490 25852
(2).....	1,07544 94	$\delta\varphi$...	0,48537 04747 29976
6φ... =	11°39′18″	φ....	1,94250 27115 70788
$\sin 6\varphi$...	9,30539	$\beta_5 = \varphi'$ =	2,42787 31863 00764
	7,01208		
(3).....	6,31747	$c^2 \sin \beta$	7,91748 97643 52
		$\sin\varphi$..	8,53015 58004 64
$\sin\varphi'$...	8,62697 33896 30	$\sin\varphi'$.	8,62697 33896 30
$\cos\varphi'$...	— 39 00237 56	y.....	5,07461 89544 46
	8,62658 33658 74		
	0,30102 99956 64	$E\varphi$... =	0,03389 67325 76177
$\sin 2\varphi'$..	8,92761 33615 38	$E\beta$...	847 71533 10760
			0,04237 38858 86937
		y....	1 18745 99050
		$E\beta_5 = E\varphi'$ =	0,04236 20112 87887.

Calcul de β_6 *et* $E\beta_6$.

Il faut faire $\varphi^\circ = \beta_4$, $\varphi = \beta_5$, $\varphi' = \beta_6$.

$\sin 2\varphi$...	8,92761 33615 38	(1)..	0°00008 50023 43709
kR°.....	7,00181 75388 35	(2)..	— 14 84446
(1)......	5,92943 09003 73	(3)..	+ 26
4φ.... =	9°42′41″374	ω... =	0,00008 50008 59289
$\sin 4\varphi$...	9,22708 19	$\delta^2\varphi^\circ$. =	—0,00017 00017 18578
	1,94448 24	$\delta\varphi^\circ$..	0,48537 04747 29976
(2)......	1,17156 43	$\delta\varphi$..	0,48520 04730 11398
6φ.... =	14°34′2″	φ...	2,42787 31863 00764
$\sin 6\varphi$...	9,40056 5	$\beta_6 = \varphi' =$	2,91307 36593 12162
	7,01208 6		
(3)......	6,41265 1	$c^2 \sin \beta$	7,91748 97643 52
		$\sin \varphi$.	8,62697 33896 30
$\sin \varphi'$....	8,70604 17102 24	$\sin \varphi'$.	8,70604 17102 24
$\cos \varphi'$....	— 56 15638 97	y....	5,25050 48642 06
	8,70548 01463 27		
	0,30102 99956 64	$E\varphi$... =	0,04236 20112 87887
$\sin 2\varphi'$...	9,00651 01419 91	$E\beta$..	847 71533 10760
			0,05083 91645 98647
		y....	1 78034 78498
		$E\beta_6 = E\varphi' =$	0,05082 13611 20149.

Calcul de β_7 *et* $E\beta_7$.

Il faut faire $\varphi^\circ = \beta_5$, $\varphi = \beta_6$, $\varphi' = \beta_7$.

$\sin 2\varphi$...	9,00651 01419 91	(1)...	0°00010 19360 21849
kR°.....	7,00181 75388 35	(2)...	— 17 77351
(1)......	6,00832 76808 26	(3)...	+ 31
4φ... =	11°39′8″26	ω..... =	0,00010 19342 44529
$\sin 4\varphi$...	9,30529 09	$\delta^2\varphi^\circ$.. =	—0,00020 38684 89058
	1,94448 24	$\delta\varphi^\circ$..	0,48520 04730 11398
(2).....	1,24977 33	$\delta\varphi$...	0,48499 66045 22340
6φ... =	17°28′42″4	φ....	2,91307 36593 12162
$\sin 6\varphi$...	9,47763 6	$\beta_7 = \varphi' =$	3,39807 02638 34502
	7,01208 6		
(3).....	6,48972 2		

$\sin\varphi'$..	8,77285 50959 69
$\cos\varphi'$..	— 76 42378 12
	8,77209 08581 57
	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$.	9,07312 08538 21

$c^2 \sin\beta$..	7,91748 97643 52
$\sin\varphi$.....	8,70604 17102 24
$\sin\varphi'$....	8,77285 50959 69
y	5,39638 65705 45

$E\varphi$. ..... =	0,05082 13611 20149
$E\beta$.	847 71533 10760
	0,05929 85144 30909
y	2 49107 36652
$E\beta_7 = E\varphi'$ =	0,05927 36036 94257.

Calcul de β_8 *et* $E\beta_8$.

Il faut faire $\varphi^\circ = \beta_6$, $\varphi = \beta_7$, $\varphi' = \beta_8$.

$\sin 2\varphi$.	9,07312 08538 21
kR°...	7,00181 75388 35
(1)....	6,07493 83926 56
4φ. .=	13°35′32″212
$\sin 4\varphi$.	9,37108 85
	1,94448 24
(2)....	1,31557 09
6φ..=	10°23′18″3
$\sin 6\varphi$.	9,54205 6
	7,01208 6
(3)....	6,55414 2

$\sin\varphi'$..	8,83069 31864 41
$\cos\varphi'$..	— 99 80178 85
	8,82969 51685 56
	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$.	9,13072 51642 20

(1)......=	0°00011 88333 64304
(2)......	— 20 68097
(3)......	+ 36
ω.......=	0,00011 88312 96243
$\delta'\varphi^\circ$.....=	−0,00023 76625 92486
$\delta\varphi^\circ$.. ..	0,48499 66045 22340
$\delta\varphi$......	0,48475 89419 29854
φ.......	3,39807 02638 34502
φ'.......=	3,88282 92057 64356

$c^2 \sin\beta$...	7,91748 97643 52
$\sin\varphi$....	8,77285 50959 69
$\sin\varphi'$....	8,83069 31864 41
y.......	5,52103 80467 62

$E\varphi$.....=	0,05927 36036 94257
$E\beta$......	847 71533 10760
	0,06775 07570 05017
y.......	3 31923 53474
$E\beta_8 = E\varphi'$ =	0,06771 75646 51543.

Calcul de ϵ_9 *et* $E\epsilon_9$.

On fera dans les formules $\varphi^\circ = \epsilon_7$, $\varphi = \epsilon_8$, $\varphi' = \epsilon_9$.

$\sin 2\varphi$..	9,13072 51642 20
kR°...	7,00181 75388 35
(1)....	6,13254 27030 55
4φ..=	15°31'52"74
$\sin 4\varphi$.	9,42775 39
	1,94448 24
(2)....	1,37223 63
6φ..=	23°17'49"11
$\sin 6\varphi$..	9,59714 3
	7,01208 6
(3)....	6,60922 9
$\sin\varphi'$..	8,88167 14304 00
$\cos\varphi'$..	— 126 28722 98
	8,88040 85581 02
	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$.	9,18143 85537 66

(1)......=	0°00013 56883 942635
(2)......	— 23 563310
(3)......	+ 406
ω....... =	0,00013 56860 37973
$\delta^2\varphi^\circ$....=	—0,00027 13720 75946
$\delta\varphi^\circ$.....	8,48475 89419 29854
$\delta\varphi$...... =	0,48448 75698 53908
	3,88282 92057 64356
φ'....... =	4,36731 67756 18264
$c^2 \sin\epsilon$...	7,91748 97643 52
$\sin\varphi$.....	8,83069 31864 41
$\sin\varphi'$....	8,88167 14304 00
y.......	5,62985 43811 93
$E\varphi$...... =	0,06771 75646 51543
$E\epsilon$......	847 71533 10760
	0,07619 47179 62303
y.......	4 26436 51080
$E\epsilon_9 = E\varphi'$. =	0,07615 20743 11223.

Calcul de ϵ_{10} *et* $E\epsilon_{10}$.

Il faudra faire $\varphi^\circ = \epsilon_8$, $\varphi = \epsilon_9$, $\varphi' = \epsilon_{10}$.

$\sin 2\varphi$..	9,18143 85537 66
kR°....	7,00181 75388 35
(1)....	6,18325 60926 01
4φ...=	17°28'9"362
$\sin 4\varphi$..	9,47740 23
	1,94448 24
(2)....	1,42188 47
6φ..=	26°12'14"
$\sin 6\varphi$..	9,64499 6
	7,01208 6
(3)....	6,65708 2

(1)......=	0°00015 24951 71463
(2)......	— 26 41707
(3)......	+ 45
ω.......=	0,00015 24925 29801
$\delta^2\varphi^\circ$.....=	—0,00030 49850 59602
$\delta\varphi^\circ$.....	0,48448 75698 53908
$\delta\varphi$......	0,48418 25847 94306
	4,36731 67756 18264
φ'.......=	4,85149 93604 12570

$\sin\varphi'$..	8,92723 42549 55
$\cos\varphi'$..	— 155 87650 45
	8,92567 54899 10
	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$.	9,22670 54855 74

$c^2 \sin \beta$...	7,91748 97643 52
$\sin\varphi$. ...	8,88167 14304 00
$\sin\varphi'$....	8,92723 42549 55
y.......	5,72639 54497 07
$E\varphi$......=	0,07615 20743 11223
$E\beta$......	847 71533 10760
	0,08462 92276 21983
y.......	5 32592 99449
$E\beta_{10} = E\varphi' =$	0,08457 59683 22534.

Calcul de β_{11} *et* $E\beta_{11}$.

$\varphi^\circ = \beta_9$, $\varphi = \beta_{10}$, $\varphi' = \beta_{11}$.

$\sin 2\varphi$..	9,22670 54855 74
kR°...	7,00181 75388 35
(1)....	6,22852 30244 09
4φ..=	19°24′21″591
$\sin 4\varphi$.	9,52147 79
	1,94448 24
(2)....	1,46596 03
6φ..=	29°6′32″4
$\sin 6\varphi$..	9,68705 8
	7,01208 6
(3)....	6,69914 4
$\sin\varphi'$..	8,96841 19250 40
$\cos\varphi'$..	— 188 56559 56
	8,96652 62690 84
	0,30102 99956 64
$\sin 2\varphi'$.	9,26755 62647 48

(1).....=	0°00016 92477 96990
(2)......	— 29 23885
(3)......	+ 50
ω.......=	0,00016 92448 73155
$\delta^2\varphi^\circ$....=	—0,00033 84897 46310
$\delta\varphi^\circ$.....	0,48418 25847 94306
$\delta\varphi$......	0,48384 40950 47996
φ.......	4,85149 93604 12570
φ'.....=	5,33534 34554 60566
$c^2 \sin \beta$..	7,91748 97643 52
$\sin\varphi$....	8,92723 42549 55
$\sin\varphi'$...	8,96841 19250 40
y.......	5,81313 59443 47
$E\varphi$......=	0,08457 59683 22534
$E\beta$......	847 71533 10760
	0,09305 31216 33294
y.......	6 50333 22802
$E\beta_{11} = E\varphi' =$	0,09298 80883 10492.

Calcul de β_{12} et $E\beta_{12}$.

$\varphi^{\circ} = \beta,\quad \varphi = \beta_{11},\quad \varphi' = \beta_{12}.$

sin 2φ.	9,26755 62647 48
lR°. ..	7,00181 75388 35
(1)....	6,26937 38035 83
4φ..=	21°20′28″946
sin 4φ..	9,56101 06
	1,94448 24
(2)....	1,50549 30
6φ..=	32°0′43″4
sin 6φ..	9,72435 9
	7,01208 6
(3)....	6,73644 5
$E\varphi$..=	0,09298 80883 10492
$E\beta$....	847 71533 10760
	0,10146 52416 21252
γ......	7 79591 06614
$E\varphi'$....	0,10138 72825 14638 $= E\beta_{12}$.

(1).....=	0°00018 59404 18279
(2)......	— 32 02529
(3)......	+ 54
ω.......=	0,00018 59372 15804
$\delta^2\varphi^{\circ}$....=	—0,00037 18744 31608
$\delta\varphi^{\circ}$.....	0,48384 40950 47996
$\delta\varphi$.....=	0,48347 22206 16388
φ.......	5,33534 34554 60566
$\beta_{12} = \varphi'$..=	5,81881 56760 76954
c^2 sin β.	7,91748 97643 52
sin φ...	8,96841 19250 40
sin φ'...	9,00596 51642 04
y......	5,89186 68535 96

796. Pour vérifier tous ces calculs, nous allons chercher directement la valeur de φ qui satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{32} F^1 c$, ce qui se fera en déduisant φ par bisection de la valeur de α qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{16} F^1 c$. Il faut donc déterminer φ d'après l'équation $\sin\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta\alpha)}}$, où l'on connaît les logarithmes suivans :

sin α.....	9,30260 81001 4716
cos α.....	9,99106 96126 2333
$\Delta\alpha$.......	9,99129 25963 5059.

On en déduira la valeur de l sin φ et ensuite celle de φ, par les calculs suivans :

$\sin\alpha.\sqrt{\frac{1}{2}}$..	9,15209	31023	1517
$\sqrt{(1+\cos\alpha)}$	0,14829	38779	9493
$\sin\frac{1}{2}\alpha$.....	9,00379	92243	2024
	9,99783	40601	1858
$\sin\varphi$......	9,00596	51642	0166
$\sin a$......	9,00605	32445	4882
$r =$	8	80803	4716

$1+\Delta$..	0,29669	81159	0114
2.....	0,30102	99956	6398
	9,99566	81202	3716
$\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta)}$.	9,99783	40601	1858

$a = 5°82$ $l\sin A = l\sin a - r$

$2a = 11.64$ $p = \frac{\frac{1}{2}rM}{\cos^2 a}$,

$$\varphi = a - p\sin 2a\left(1 - p + p^2 . \frac{2+4\sin^2 a}{3}\right).$$

r.........	5,94487	90176	7
$\frac{1}{2}$M........	0,06118	56930	4
$1:\cos^2 a$....	0,00448	88312	9
p.........	6,01055	35420	0
$\sin 2a$.....	9,30483	88245	7
R°........	1,75812	26324	1
(1)........	7,07351	49989	8
p.........	6,01055	35420	
(2)........	5,08406	854	
p.........	6,01055	354	
$\frac{1}{3}(2+4\sin^2 a)$	9,83274	96	
(3)........	8,92737	17	

$a-(1) =$	5°81881	55547	2720
(2)	+		1213	5804
(3)	−			846
$\varphi =$	5,81881	56760	7678

On voit que cette valeur de φ s'accorde très bien avec la valeur trouvée pour $\mathfrak{C}_{10}$, puisque la différence est à peine de deux unités décimales du treizième ordre, ou du quatorzième chiffre significatif.

La valeur de Eφ se déduira en même tems de celle de Eα, par l'équation $2E\varphi - E\alpha = c^2\sin^2\varphi\sin\alpha$, dont voici le calcul :

$c^2\sin\alpha$...	9,29184	79542	7735
$\sin^2\varphi$....	8,01193	03284	0332
y.......	7,30377	82826	8067

Eα =	0,20076	18685	6953
y	201	26964	5971
	0,20277	45650	2924
Eφ =	0,10138	72825	1462,

valeur qui s'accorde encore aussi bien avec celle que nous avons trouvée pour E$\mathfrak{C}_{10}$.

Suivent les deux tableaux qui résultent des calculs précédens.

TABLE N° I.

φ.	Eφ.	log. sin φ.	log. tang φ.	log. $\Delta\varphi$.
7953 75689 08	0.20076 18685 6953	9.30260 81001 4716	9.31153 84875 2383	9.99129 25963 5059
1143 03294 02	0.38634 81782 0831	9.58668 86411 0990	9.62174 05875 1509	9.96587 69582 4626
3081 64164 44	0.54589 98359 1182	9.73646 82413 5813	9.81302 86198 7846	9.92567 44269 0000
0457 89273 76	0.67481 98598 1835	9.82806 12794 2509	9.95907 77023 7631	9.87334 08030 9604
3582 07019 71	0.77397 70241 8163	9.88700 45821 5413	0.08290 45935 5444	9.81174 81626 6481
3686 36982 91	0.84751 27155 7022	9.92572 39415 1298	0.19475 71334 2740	9.74362 05303 4148
9136 58451 87	0.90072 03910 2072	9.95137 96597 7782	0.30020 45830 3945	9.67138 04255 7805
2031 25776 96	0.93867 74986 7532	9.96843 94867 9809	0.40283 37793 2150	9.59716 62206 7850
5772 79622 17	0.96562 64325 9648	9.97979 46511 6032	0.50546 29756 0355	9.52295 20157 7895
3603 20752 60	0.98484 13820 8090	9.98734 62777 4410	0.61091 04252 1560	9.45071 19110 1552
7866 36949 05	0.99873 04656 7518	9.99235 18259 3488	0.72276 29650 8856	9.38258 42786 9219
9740 60723 43	1.00901 53290 5913	9.99564 27739 5274	0.84658 98562 6669	9.32099 16382 6096
9245 20890 68	1.01691 10868 6773	9.99776 51945 7967	0.99263 89387 6454	9.26865 80144 5700
5392 71839 91	1.02327 83341 6754	9.99907 10953 4855	1.18392 69711 2791	9.22845 54831 1074
6411 74441 15	1.02874 29806 5756	9.99977 70162 7274	1.49412 90711 1917	9.20303 98450 0641
0000 00000 00	1.03378 94623 9087	0.00000 00000 0000	Infini.	9.19433 24413 5700

TABLE N° II.

φ.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
°00000 00000 0000	48571 07821 0987	3 40489 8928	3 40368 1683	243 3431	121 4096	3167
.48571 07821 0987	48567 67331 2059	6 80858 0611	3 40124 8252	364 7527	121 0929	4165
.97138 75152 3046	48560 86473 1448	10 20982 8863	3 39760 0725	485 8456	120 6764	5277
.45699 61625 4494	48550 65490 2585	13 60742 9588	3 39274 2269	606 5220	120 1487	6200
.94250 27115 7079	48537 04747 2997	17 00017 1857	3 38667 7049	726 6707	119 5287	7296
.42787 31863 0076	48520 04730 1140	20 38684 8906	3 37941 0342	846 1994	118 7991	8285
.91307 36593 1216	48499 66045 2234	23 76625 9248	3 37094 8348	964 9985	117 9706	9256
.39807 02638 3450	48475 89419 2986	27 13720 7596	3 36129 8363	1082 9691	117 0450	
.88282 92057 6436	48448 75698 5390	30 49850 5959	3 35046 8672	1200 0141		
.36731 67756 1826	48418 25847 9431	33 84897 4631	3 33846 8531			
.85149 93604 1257	48384 40950 4800	37 18744 3162				
.33534 34554 6057	48347 22206 1638					
.81881 56760 7695						

Eφ.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
.00000 00000 0000	847 71533 1076	11884 7145	11877 9671	13 4868	6 7229	240
.00847 71533 1076	847 59648 3931	23762 6816	11864 4803	20 2097	6 6989	325
.01695 31181 5007	847 35885 7115	35627 1619	11844 2706	26 9086	6 6664	412
.02542 67067 2122	847 00258 5496	47471 4325	11817 3620	33 5750	6 6252	463
.03389 67325 7618	846 52787 1171	59288 7945	11783 7870	40 2002	6 5789	580
.04236 20112 8789	845 93498 3226	71072 5815	11743 5868	46 7791	6 5209	630
.05082 13611 2015	845 22425 7411	82816 1683	11696 8077	53 3000	6 4579	706
.05927 36036 9426	844 39609 5728	94512 9760	11643 5077	59 7579	6 3873	
.06771 75646 5154	843 45096 5968	1 06156 4837	11583 7498	66 1452		
.07615 20743 1122	842 38940 1131	1 17740 2335	11517 6046			
.08457 59683 2253	841 21199 8796	1 29257 8381				
.09298 80883 1049	839 91942 0415					
.10138 72825 1464						

La table n° 2, construite au moyen des résultats précédens, contient les valeurs des quantités φ et $E\varphi$, avec leurs différences successives jusqu'à la sixième, correspondantes aux diverses valeurs $n=0, 1, 2, \ldots\ 12$, pour lesquelles on a $F\varphi = \frac{n}{12} \cdot \frac{F^1c}{32}$. C'est par l'interpolation de cette table qu'on pourra trouver la valeur de φ et celle de $E\varphi$, correspondantes à toute valeur de n moindre que 12, c'est-à-dire à toute valeur de $F\varphi$ moindre que $\frac{1}{32}F^1c$.

Il semble d'abord que la série des quantités φ et $E\varphi$ devrait être continuée pour les valeurs $n=13, 14\ldots\ 17$, afin qu'on pût en déduire la suite complète des différences, jusqu'à $n=11$, et qu'ainsi l'interpolation entre deux termes consécutifs quelconques de la table, ne dépendît que de la formule ordinaire $y = A + x(\delta A + \frac{x-1}{2}(\delta^2 A + \text{etc.}$ Mais en y réfléchissant un peu, on voit que ce nouveau travail est inutile, et qu'on peut y suppléer aisément par une considération générale qui s'applique à tous les cas semblables.

797. L'usage que nous avons constamment suivi dans la table n° 2, ainsi que dans toutes les autres que cet ouvrage contient, est de placer sur une même ligne horizontale la fonction A et ses différences successives δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc., qui naissent de l'accroissement constant de la variable a, contenue dans la première colonne (ici la variable a devient n et sa différence constante est 1). Dans cette hypothèse, la fonction qui répond à la variable $a+x$, comprise entre a et $a+1$, est donnée par la formule ordinaire $y = A + x(\delta A + \text{etc.}$

Mais si, au lieu de considérer les variables dans l'ordre croissant a, $a+1$, $a+2$, etc., on les considère dans l'ordre décroissant $a+1$, a, $a-1$, $a-2$, etc., et qu'on désigne toujours par A', A, A°, $A^{\circ\circ}$, etc., les fonctions correspondantes, l'expression de la fonction y correspondante à la variable $a+x$, sera donnée semblablement par la formule

$$y = A' + (1-x)(A - A') + \frac{(1-x)(-x)}{2}.(A^{\circ} - 2A + A')$$
$$+ \frac{(1-x)(-x)(-x-1)}{2.3}(A^{\circ\circ} - 3A^{\circ} + 3A - A') + \text{etc.},$$

qui se réduit à

$$y = A' + (x-1)\delta A + \frac{x-1.x}{1.2}\delta^2 A^{\circ} + \frac{x-1.x.x+1}{1.2.3}\delta^3 A^{\circ\circ}$$
$$+ \frac{x-1.x.x+1.x+2}{1.2.3.4}\delta^4 A^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

nouvelle formule dans laquelle les différences δA, $\delta^2 A^{\circ}$, $\delta^3 A^{\circ\circ}$, etc., sont les mêmes et de même signe que celles qui sont ainsi désignées dans la table; mais on voit qu'elles ne sont plus disposées sur la même ligne horizontale, et qu'il faut monter d'une ligne pour passer d'une différence à la différence suivante.

C'est donc avec le secours de cette nouvelle formule qu'on suppléera très aisément aux différences qui manquent dans les lignes horizontales de la Table n° 2, passé $n=6$. Depuis $n=0$ jusqu'à $n=6$, on se servira pour l'interpolation de la formule ordinaire $y=A+x\delta A+\frac{x.x-1}{2}\delta^2 A+$ etc.; mais depuis $n=6$ jusqu'à $n=12$, il faudra se servir de la formule $y=A'+(x-1)\delta A+\frac{x-1.x}{2}\delta^2 A^{\circ}+\frac{x-1.x.x+1}{2.3}\delta^3 A^{\circ\circ}+$ etc., où toutes les différences sont données par la table, en montant graduellement d'une ligne pour passer d'une différence à la suivante.

Dans les tables où toutes les lignes horizontales des différences sont complètes, il sera indifférent de se servir de l'une ou de l'autre formule pour chaque interpolation. La première cependant semble devoir être préférée, lorsque x sera $<\frac{1}{2}$, et la seconde lorsque x sera $>\frac{1}{2}$.

Il reste à faire voir par quelques exemples l'usage des Tables que nous venons de construire.

798. Cherchons d'abord l'amplitude φ et la fonction $E\varphi$ qui répondent à l'équation $F\varphi=\frac{1}{3}F^1c$. Puisqu'on a $\frac{1}{3}.16=5\frac{1}{3}$, on voit qu'en faisant $F\lambda=\frac{5}{16}F^1c$, $F\mu=\frac{1}{48}F^1c$, on aura $F\varphi=F\lambda+F\mu$.

Les valeurs de λ et $E\lambda$ sont données immédiatement par la Table n° 1; et comme on a $F\mu=\frac{8}{384}F^1c$, les valeurs de μ et de $E\mu$ seront aussi données par la Table n° 2; ces valeurs sont

$$\lambda = 50°43582\ 07019\ 71 \qquad \mu = 3°88282\ 92057\ 6436$$
$$E\lambda = 0{,}77397\ 70241\ 8163 \qquad E\mu = 0{,}06771\ 75646\ 5154.$$

Il ne s'agit plus que de calculer φ par les équations algébriques qui représentent l'équation transcendante $F\varphi = F\lambda+F\mu$; pour cela, ayant pris les auxiliaires λ', μ', telles que

$$\tang \lambda'=\tang \lambda.\Delta\mu, \quad \tang \mu'=\tang \mu.\Delta\lambda,$$

on aura $\varphi=\lambda'+\mu'$. Ensuite l'équation $E\lambda+E\mu-E\varphi=c^2\sin\lambda\sin\mu\sin\varphi$ donnera la valeur de $E\varphi$.

Les quantités tang λ et $\Delta\lambda$ sont données par la Table n° 1; il ne reste donc à calculer que tang μ et $\Delta\mu$, ce que nous allons faire avec toute l'exactitude que les Tables comportent. Voici d'abord le calcul de $l \sin \mu$ et $l \cos \mu$, d'après les formules du n° 763.

$R^{\circ}\mu$	0,58914	82876	29379	(1)..=	0,00099	72536	306006
R°.	1,75812	26324	09172	(2)....		7633	183208
μ..	8,83102	56552	20207	(3)....		9	348151
μ^2.	7,66205	13104	40	(4)....			13033
	9,33675	43156	37	$\cos\mu$.—	0,00099	80178	850398
(1).	6,99880	56260	77	$\frac{1}{3}$(1)...	0,00033	24178	768669
μ^4.	5,32410	26209		$\frac{1}{15}$(2)..		508	878881
	8,55860	30653		$\frac{1}{63}$(3)..			148383
(2).	3,88270	56862		$\frac{1}{255}$(4).			51
μ^6.	2,98615	393			0,00033	24687	795984
	7,98457	180		μ.....	8,83102	56552	20207
(3).	0,97072	573		$\sin\mu$..	8,83069	31864	40609
μ^8.	0,64820	5		$\cos\mu$..	— 99	80178	85040
	7,46683	3		tang μ.	8,83169	12043	2565.
(4).	8,11503	8					

Connaissant $l \sin \mu$, on calculera $l\Delta\mu$ comme il suit :

$c^2 \sin^2\mu$	7,65062	62270	1138
a.....	7,65062	53257	9595
$r=$		9012	1543

$$a = \frac{20}{4471},\quad lA = la + r,\quad r' = \frac{r}{1-a},$$

$$1 - a = \frac{4451}{4471},\quad l(1-A) = l(1-a) - R,$$

$$lR = l(ar') + \tfrac{1}{2} r'.$$

......	3,95482	86188	$1-a$...	9,99805	29244	1449
$1-a$.	9,99805	29244	R......		40	4950
r'....	3,95677	56944	$1-A$...	9,99805	29203	6499
a.....	7,65062	53258	$\Delta\mu$.....	9,99902	64601	8250.
$\frac{1}{2}r'$...		4506				
R....	1,60740	14708				

D'après ces valeurs, voici le calcul des angles λ', et μ' :

tang λ.	0,08290	45935	5444	tang μ..	8,83169	12043	2565
$\Delta\mu$....	9,99902	64601	8250	$\Delta\lambda$.....	9,81174	81626	6481
tang λ'.	0,08193	10537	3694	tang μ'..	8,64343	93669	9046

Au moyen de l'angle approché $a = 50°37$, on trouvera par les formules ordinaires $\lambda' = 50°,37274\ 12266\ 4851$; quant à l'angle μ', comme il n'est que d'un petit nombre de degrés, on pourra, en faisant tang $\mu' = t$, calculer cet angle par la formule $\mu' = t(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8)$, et on trouvera par les cinq premiers termes de la série $\mu' = 2°,51931\ 21820\ 4336$. De là résulte

$$\lambda' + \mu' = \varphi = 52°,89205\ 34086\ 9187.$$

Puisque φ satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{3}F^1c$, la valeur de φ peut être vérifiée par la formule du n° 24, qui donne $l \sin \varphi = 9,90173\ 08331\ 6243$, et de là

$$\varphi = 52°,89205\ 34086\ 886;$$

la différence n'est que de trois unités du quatorzième chiffre, et on ne peut guère décider de quel côté est l'erreur.

Enfin la valeur de $E\varphi$ se trouvera par le calcul suivant :

c^2...	9,98923 98541 3016	$E\lambda$... =	0,77397 70241 8163
sin λ.	9,88700 45821 5413	$E\mu$.. =	0,06771 75646 5154
sin μ.	8,83069 31864 4061		0,84169 45888 3317
sin φ.	9,90173 08331 6243	z.. ..	0,04061 33165 2661
z....	8,60866 84558 8733	$E\varphi$.. =	0,80108 12723 0656.

799. Pour donner une seconde application des mêmes Tables, cherchons les valeurs des fonctions E et F qui répondent à l'amplitude $\varphi = 75°$.

La plus proche valeur de φ contenue dans la Table n° 1, est $\lambda = 76°,23603\ 20752\ 60$; elle répond à la fonction $F\lambda = \frac{10}{16}F^1c$; il faut donc déterminer l'amplitude μ par l'équation $F\mu = F\lambda - F\varphi$, ou par les formules.

$$\text{tang}\,\lambda' = \text{tang}\,\lambda.\Delta\varphi, \quad \text{tang}\,\varphi' = \text{tang}\,\varphi.\Delta\lambda, \quad \mu = \lambda' - \varphi'.$$

Connaissant μ, il sera facile d'avoir, par l'interpolation de la Table n° 2, la valeur correspondante de n qui donnera celle de $F\mu$ et ensuite celle de $E\mu$. Voici le détail de tous ces calculs.

On a, par la Table n° 1, les logarithmes de tang λ et $\Delta\lambda$; on a immédiatement l tang φ, ainsi il ne reste à trouver que $l\Delta\varphi$, ce qui se fera par la formule $\Delta = \cos\varphi\sqrt{(1+A)}$, dans laquelle $A = b^2 \text{tang}^2\varphi$, et d'où résulte $l\Delta\varphi = 9,47668\ 59066\ 8751$. D'après ces valeurs, on formera celles de l tang λ' et l tang φ', savoir :

tang λ..	0,61091 04252 1560	tang φ..	0,57194 75475 3330
$\Delta\varphi$.....	9,47668 59066 8751	$\Delta\lambda$.....	9,45071 19110 1552
tang λ'..	0,08759 63319 0311	tang φ'..	0,02265 94575 4882

d'où l'on déduit

$$\lambda' = 50^\circ 73943\ 77571\ 6697$$
$$\varphi' = 46,49403\ 54375\ 3376$$
$$\mu' = 4,24540\ 23196\ 3321.$$

800. Il faut maintenant chercher dans la Table n° 2, la valeur de n qui répond à cette valeur de φ; on voit que cette valeur est comprise entre 8 et 9, et qu'en faisant $n = 8 + x$, on aura à déterminer x par la seconde formule générale d'interpolation, savoir :

$$A' - \mu = (1 - x)\ (\delta A + \tfrac{x}{2}\ (\delta^2 A^\circ + \tfrac{x+1}{3}\ (\delta^3 A^{\circ\circ} + \tfrac{x+2}{4}\ (\delta^4 A^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

dans laquelle les nombres donnés par la table sont :

$A' - \mu$	$= 0,12191\ 44559\ 8505$	$\delta^4 A^{\circ\circ\circ}$	$= +\ 846\ 1994$
δA	$= 0,48448\ 75698\ 5390$	$\delta^5 A^{\circ\circ\circ\circ}$	$= +\ 119\ 5287$
$\delta^2 A^\circ$	$= -\ 27\ 13720\ 7596$	$\delta^6 A^{\circ 5}$	$= -\ 6200$
$\delta^3 A^{\circ\circ}$	$= -\ 3\ 37094\ 8348$	$\delta^7 A^{\circ 6}$	$= -\ 923.$

Après quelques essais dans lesquels on peut négliger les décimales qui passent le dixième rang, on trouve $x = 0,74830\ 756125$. Pour plus d'exactitude, il conviendra de substituer cette valeur dans le second membre de l'équation à résoudre, afin d'avoir la différence entre le résultat de la substitution et la valeur donnée de $A' - \mu$.

Résultat de la substitution...	0,12191 44559 7543
$A' - \mu$.....	0,12191 44559 8505
Différence... $r =$	962.

De là on voit que $1 - x$ doit être augmenté de $\frac{r}{\delta A} = 1988$, ce qui donnera pour la vraie valeur de x

$$x = 0,74830\ 75612\ 3012.$$

Connaissant x, on aura $F\mu = \frac{8+x}{384} F^1 c$, et par conséquent.........
$F\varphi = \frac{332 - x}{384} \cdot F^1 c = \frac{231,25169\ 24387\ 6988}{384} \cdot F^1 c$, ce qui donne le logarithme de cette fonction :

$F'c$....	0,51259 14107 1659
coeff...	9,77975 36954 8302
$F\varphi$....	0,29234 51061 9961.

801. Pour calculer $E\varphi$, il faut d'abord chercher $E\mu$ par l'interpolation de la Table n° 2; en appelant de nouveau A le terme $E\varphi$ qui répond à $n=8$, la valeur cherchée sera donnée par la formule

$$E\mu = A' - (1-x)\left(\delta A + \frac{x}{2}\left(\delta^2 A^{\circ} + \frac{x+1}{3}\left(\delta^3 A^{\circ\circ} + \frac{x+2}{4}\left(\delta^4 A^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},\right.\right.\right.\right.$$

où l'on a

A'	$= 0{,}07615\ 20743\ 1122$	$\delta^4 A^{\circ\circ\circ}$	$= +\ 46\ 7791$
δA	$=\ 843\ 45096\ 5968$	$\delta^5 A^{\circ 4}$	$= +\ 6\ 5789$
$\delta^2 A^{\circ}$	$= -\ 94512\ 9760$	$\delta^6 A^{\circ 5}$	$= -\ 463$
$\delta^3 A^{\circ\circ}$	$= -\ 11696\ 8077$	$\delta^7 A^{\circ 6}$	$= -\ 51.$

Substituant ces valeurs et celle de x, on trouvera

$$E\mu = 0{,}07403\ 01260\ 4731,$$

enfin on aura à calculer $E\varphi$ par la form. $E\varphi + E\mu = E\lambda + c^2 \sin\varphi \sin\mu \sin\lambda$

c^2....	9,98923 98541 3016	$E\lambda =$	0,98484 13820 8090
sin φ..	9,98494 37781 0267	$E\mu =$	0,07403 01260 4731
sin λ..	9,98734 62777 4410		0,91081 12560 3359
sin μ..	8,86939 87498 6310	z....	0,06775 30202 7583
z.....	8,83092 86598 4003	$E\varphi =$	0,97856 42763 0942.

Cette valeur et celle de $lF\varphi$ s'accordent suffisamment avec celles qu'on a trouvées par la méthode directe, n°s 764 et 765.

802. Nous avons cru devoir exposer avec beaucoup de détail tout ce qui concerne la construction et l'usage des Tables n° 1 et n° 2, relatives au module $c = \sin 81°$; les calculs ont été faits avec une exactitude scrupuleuse, et soumis à un grand nombre de vérifications, de manière qu'on peut être assuré que les résultats consignés dans ces tables, sont exacts autant qu'ils peuvent l'être, d'après les Tables trigonométriques à quatorze décimales, dont nous avons fait usage, lesquelles sont quelquefois en erreur de une, deux et même trois unités dans le dernier chiffre. On en voit un exemple dans le logarithme de b ou cos 81°, qui, dans la *Trigonom. Brit.*, est 9,19433 24413 5701, et dont les derniers chiffres doivent être 5699. En suivant les mêmes procédés qui ont été indiqués dans la construction de ces Tables, et

dans les deux applications que nous en avons données, on parviendra donc dans tous les cas à la détermination des fonctions E et F et à la solution des questions qui en dépendent, avec un degré de précision supérieur, non-seulement aux besoins de la pratique, mais à ceux des recherches théoriques les plus délicates.

Je ne dissimulerai pas combien est pénible le calcul d'une table telle que la Table n° 1 qui n'a que seize lignes, ou que la Table n° 2 qui n'en a que douze; mais, si on aspire à un aussi grand degré d'exactitude, il semble qu'on n'y peut parvenir que par le secours de ces tables, ou par la méthode générale fondée sur la formation préliminaire de l'échelle des modules. C'est au calculateur à choisir entre ces deux méthodes, celle qui lui paraîtra la moins pénible.

Comme la formation de l'échelle des modules se réduit, d'après nos formules, à un travail assez court, il est vraisemblable qu'on jugera que la méthode générale mérite la préférence, si l'on n'a à calculer qu'un petit nombre de fonctions E et F; mais s'il y avait lieu de calculer un grand nombre de ces fonctions, l'autre procédé paraît être le plus avantageux.

Au reste, nous avons déjà dit que si on se borne à dix décimales dans la formation de la Table auxiliaire n° 1, auquel cas on peut se passer de la Table n° 2, le calcul de cette table et son usage dans les cas particuliers, deviendront très faciles, et rentreront dans la classe des calculs trigonométriques ordinaires, surtout si le module est plus petit que sin 45°, ce qui permettra de prendre la valeur de α dans la Table VII; et puisqu'alors les résultats sont exacts jusqu'à la dixième décimale, ou au moins jusqu'à la neuvième, il ne paraît pas qu'on puisse proposer rien de plus simple pour le calcul des fonctions E et F, au moins tant qu'il n'existera pas des Tables suffisamment étendues, au moyen desquelles la détermination de ces fonctions serait réduite aux règles ordinaires de l'interpolation.

803. Remarquons en finissant que le Tableau n° 1 pourrait être réduit aux cinq termes α_1, α_2, α_4, α_8, α_{16}, et que dans cet état, il suffirait encore pour ramener les fonctions proposées $E\varphi$, $F\varphi$, au cas où l'amplitude est moindre que 6°. Pareille observation s'applique à plus forte raison aux Tables auxiliaires construites pour des modules moindres que sin 81°.

En effet, 1°. si l'amplitude donnée φ est comprise entre α_8 et α_{16}, ou 90°, l'une des deux différences $F\varphi - F\alpha_8$, $F^1c - F\varphi$, sera moindre que $\frac{1}{4}F^1c$; ainsi, en faisant la plus petite des deux différences $= F\varphi'$, on aura $\varphi' < \alpha_4$. Il faudra donc d'abord déterminer φ', soit par l'équation algébrique qui correspond à l'équation $F\varphi - F\alpha_8 = F\varphi'$, soit par l'équation $\cot\varphi' = b \tang\varphi$, si l'on a $F^1c - F\varphi = F\varphi'$.

Puisque φ' ainsi déterminé est plus petit que α_4, le cas le moins favorable pour la réduction est celui ou φ' sera compris entre α_2 et α_4: soit alors $F\varphi''$ égal à la plus petite des deux différences $F\alpha_4 - F\varphi'$, $F\varphi' - F\alpha_2$, la fonction $F\varphi''$ sera plus petite que $\frac{1}{2}(F\alpha_4 - F\alpha_2)$, et par conséquent $< \frac{1}{2} F\alpha_2 < F\alpha_1$. Si en même tems $F\varphi''$ est $< \frac{1}{2} F\alpha_1$, φ'' sera plus petit que 5°,8188, et l'objet de la réduction sera rempli par deux transformations seulement. Si au contraire $F\varphi''$ est $> \frac{1}{2} F\alpha_1$, il faudra une troisième transformation pour réduire les fonctions $E\varphi$, $F\varphi$, au cas où l'amplitude est moindre que 5°,8188.

2°. Si l'amplitude donnée φ est moindre que α_8, le nombre des transformations qui ne pouvait être plus grand que trois dans le premier cas, ne pourra surpasser deux dans celui-ci, et se réduira le plus souvent à un.

De-là on voit que la Table auxiliaire, réduite à cinq termes, conduira aux mêmes réductions que la Table entière, calculée laborieusement avec onze termes de plus. Mais, tandis qu'une seule transformation, faite à l'aide du tableau entier, suffit pour réduire les fonctions $F\varphi$ et $E\varphi$ au cas où l'amplitude est moindre que 5°,8188, il faudra quelquefois deux et même trois transformations semblables pour parvenir à la même réduction par le tableau partiel. Ces transformations, il est vrai, se font par de simples formules trigonométriques; mais c'est au calculateur à balancer les avantages et les inconvéniens des deux procédés.

J'observerai au reste qu'il faudrait ajouter un sixième terme à la Table auxiliaire, si l'angle du module était plus grand que 81°; cette addition suffira jusqu'à 89°, et il est inutile d'aller plus loin. Alors le nombre des transformations pourrait aller jusqu'à cinq, pour obtenir la réduction cherchée.

CHAPITRE XII.

Sur la construction des Tables VIII et IX.

804. La méthode du chapitre VI présente beaucoup d'avantages par la simplicité et l'élégance des formules qui servent à construire chaque table particulière pour un module déterminé; on a vu que les calculs s'exécutent dans toute l'étendue de la table, en n'empruntant de la théorie des fonctions elliptiques qu'un seul élément qui se multiplie ensuite par des formules purement trigonométriques et rigoureusement exactes; cependant l'usage de ces tables serait peu commode dans l'interpolation, lorsqu'il s'agirait de trouver les fonctions E et F qui répondent à des valeurs données de l'amplitude et du module.

Il paraît beaucoup plus convenable, pour cet objet, de construire des Tables dans lesquelles l'amplitude et l'angle du module croissent par des intervalles égaux et suffisamment petits, de 0° à 90°. C'est donc entre les deux méthodes proposées dans le chap. III, qu'il faut choisir celle qu'on regardera comme la plus facile, pour parvenir à un degré d'exactitude déterminé.

805. La seconde de ces deux méthodes fait trouver directement la différence seconde de la fonction E, ainsi que celle de la fonction F; et par ces différences, vérifiées à de certains intervalles, on parvient à former la série entière des valeurs de E et de F, comme nous l'avons fait voir avec beaucoup de détail, en calculant la Table II qui convient au module $c = \sin 45^\circ$.

L'avantage principal de cette seconde méthode consiste en ce que les auxiliaires qui servent à déterminer les différences secondes des fonctions, sont beaucoup plus petites que celles qui, dans la première méthode, seraient nécessaires pour donner immédiatement les différences premières de ces mêmes fonctions. Mais, d'un autre côté, les erreurs sur les différences secondes se multiplient suivant la progression des nombres triangulaires, dans la détermination des fonctions principales; il devient donc nécessaire de calculer ces différences avec deux décimales de plus, ce qui fait perdre tout l'avantage qu'on pouvait en attendre; et si on n'augmente pas le nombre des décimales, il faut vérifier les résultats de distance en distance, puis corriger les nombres intermédiaires, suivant un mode de répartition qui est plus ou moins arbitraire.

Cet inconvénient qu'on a pu remarquer dans l'art. 722, n'a pas lieu dans la première méthode, ainsi que nous nous en sommes assuré par un grand nombre d'essais, et cette raison suffit pour lui donner la préférence. Mais, comme on n'a pas de tables usuelles qui passent dix décimales, il serait trop difficile de calculer les fonctions avec douze décimales, comme nous l'avons fait dans la Table II, et il faut se borner à les calculer avec neuf ou dix décimales, ce qui au reste est plus que suffisant pour l'usage ordinaire.

806. Notre choix étant ainsi fixé sur la première méthode que nous avons nommée *Méthode des ordonnées moyennes*, nous aurions désiré pouvoir construire, pour tous les angles du module, de demi-degré en demi-degré, des Tables particulières semblables à la Table II, mais calculées à dix décimales seulement; la réunion de toutes ces tables, sans y comprendre les différences qui n'y pourraient entrer qu'au premier ordre et en amenant beaucoup de confusion, aurait formé, sous un assez petit volume, une table à double entrée d'une étendue suffisante pour satisfaire à toutes les applications où il s'agit de calculer les fonctions E et F pour des valeurs données de l'amplitude et de l'angle du module. Mais l'extrême longueur d'un pareil travail ne nous a pas permis de l'entreprendre, et nous nous sommes proposé seulement de calculer une Table semblable pour tous les degrés de l'amplitude et de l'angle du module. Cette tâche encore bien pénible a été heureusement conduite à son terme, et la Table IX qui en est résultée pourra satisfaire encore long-temps aux besoins des Géomètres; d'ailleurs elle fournira des bases certaines et bien vérifiées à ceux qui entreprendraient de calculer une Table semblable d'une plus grande étendue et procédant par de plus petits intervalles.

807. Pour faciliter la construction des Tables particulières qui composent la Table IX, il était nécessaire de calculer d'avance et avec beaucoup de précision, les fonctions F et E pour l'amplitude de $45°$ et pour celle de $90°$. C'est pour ce double objet que la Table VIII a été construite: nous aurions pu n'y pas comprendre les fonctions ayant $90°$ d'amplitude, puisque leurs logarithmes sont donnés avec douze décimales dans la Table I;

mais la réunion des deux séries a procuré une facilité de plus pour la construction de la Table générale et ne peut manquer d'avoir son utilité dans d'autres occasions.

Nous remarquerons ici que les formules générales pour le calcul des fonctions E et F, se simplifient assez notablement dans le cas d'une amplitude de 45°, ce qui a facilité beaucoup la construction de la Table VIII. Rappelons d'abord que les formules pour calculer les fonctions F et E, sont en général $F\varphi = K\Phi$, $E\varphi = LF\varphi + Pc \sin \varphi$. D'ailleurs la valeur de P se forme au moyen des équations $\omega = \varphi^\circ - \varphi$, $\omega^\circ = \varphi^{\circ\circ} - \varphi^\circ$, etc., $\tang \omega = b \tang \varphi$, $\tang \omega^\circ = b^\circ \tang \varphi^\circ$, etc., $r = c \cos \omega$, $r^\circ = \ldots\ldots\ldots$ $c^\circ \cos \omega^\circ$, etc., d'où l'on déduit

$$P = \tfrac{1}{2} r + \tfrac{1}{4} rr^\circ + \tfrac{1}{8} rr^\circ r^{\circ\circ} + \text{etc.}$$

808. Voyons maintenant ce qui résulte de la supposition $\varphi = 45^\circ$. Alors les équations $\sin(2\varphi - \varphi^\circ) = c^\circ \sin \varphi^\circ$, $\tang \omega^\circ = b^\circ \tang \varphi^\circ$, donnent $\tang \varphi^\circ = \frac{1}{c^\circ}$, $\tang \omega^\circ = \frac{b^\circ}{c^\circ}$, et de celle-ci on déduit encore $\sin \omega^\circ = b^\circ$, $\cos \omega^\circ = c^\circ$; ainsi on aura à la fois $\cot \varphi^\circ = c^\circ$ et $\cos \omega^\circ = c^\circ$, la première donne la valeur de φ° et la seconde celle de ω°; on connaîtra ainsi $\varphi^{\circ\circ} = \varphi^\circ + \omega^\circ$. Dans le cas où c° est suffisamment petit, il conviendra de calculer φ° par la suite

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi^\circ = c^\circ - \tfrac{1}{3} c^{\circ 3} + \tfrac{1}{5} c^{\circ 5} - \tfrac{1}{7} c^{\circ 7} + \text{etc.},$$

ou pour abréger

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi^\circ = (1) - (2) + (3) - (4) + \text{etc.},$$

et on aura en même temps

$$\tfrac{1}{2}\pi - \omega^\circ = (1) + \tfrac{1}{2}(2) + \frac{1.3}{2.4}(3) + \frac{1.3.5}{2.4.6}(4) + \text{etc.}$$

Soit z la somme des seconds membres de ces deux équations, on aura $\pi - \varphi^{\circ\circ} = z$ ou $\varphi^{\circ\circ} = \pi - z$.

Connaissant ainsi φ° et $\varphi^{\circ\circ}$, il sera facile d'avoir $\varphi^{\circ\circ\circ}$ par l'équation $\tang \omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ} \tang \varphi^{\circ\circ}$, ou par la série

$$\varphi^{\circ\circ\circ} = 2\varphi^{\circ\circ} - c^{\circ\circ\circ} \sin 2\varphi^{\circ\circ} + \tfrac{1}{2}(c^{\circ\circ\circ})^2 \sin 4\varphi^\circ - \text{etc.},$$

dont il suffit de calculer les trois premiers termes; on aura de même.. $\varphi^{\circ\circ\circ\circ} = 2\varphi^{\circ\circ\circ} - c^{\circ\circ\circ\circ} \sin 2\varphi^{\circ\circ\circ}$. Il résulte de ces deux équations, où l'on peut supposer $c^{\circ\circ\circ\circ} = (\tfrac{1}{2} c^{\circ\circ\circ})^2$:

$$\tfrac{1}{4}\varphi^{\circ\circ\circ\circ} = \pi - z + \tfrac{1}{2} c^{\circ\circ\circ} \sin 2z\,(1 - \tfrac{3}{4} c^{\circ\circ\circ} \cos 2z);$$

et comme Φ désigne la limite des quantités φ, $\frac{\varphi^{\circ}}{2}$, $\frac{\varphi^{\circ\circ}}{4}$, etc., laquelle peut être censée égale au cinquième terme, on aura

$$\Phi = \tfrac{1}{4}\left[\pi - z + \tfrac{1}{2} c^{\circ\circ\circ} \sin 2z \left(1 - \tfrac{3}{4} c^{\circ\circ\circ} \cos 2z\right)\right];$$

ainsi z étant déjà connu, il suffira d'ajouter à $\pi - z$ la petite correction $\frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ} \sin 2z \left(1 - \frac{3}{4} c^{\circ\circ\circ} \cos 2z\right)$ et de diviser le tout par 4, pour avoir la valeur de Φ, au moyen de laquelle on trouve $F\varphi = K\Phi = \frac{\Phi}{\frac{1}{2}\pi} . F^{1}c$.

Connaissant $F\varphi$, on connaîtra la partie $LF\varphi$ qui entre dans la valeur de $E\varphi$; quant à la seconde partie $Pc \sin \varphi$, elle se trouvera d'une manière très simple par la formule

$$Pc \sin \varphi = \tfrac{1}{2} c \sqrt{c^{\circ}} \left[1 + \left(\frac{c^{\circ}}{2}\right)^{4} + \frac{55}{8}\left(\frac{c^{\circ}}{2}\right)^{8} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c^{\circ}}{2}\right)^{10}\right],$$

où il faut observer que le premier terme $\frac{1}{2} c \sqrt{c^{\circ}} = \frac{1}{2}(1 - b)$, se trouvera immédiatement par la Table des sinus naturels à 15 décimales, comprise dans la *Trig. Brit.*, si toutefois l'angle du module θ s'exprime exactement en degrés et centièmes de degré.

809. Pour vérifier cette valeur de $Pc \sin \varphi$, il faut, dans la formule générale $Pc \sin \varphi = \frac{1}{2} c \sqrt{c^{\circ}} \sin \varphi^{\circ} \left(1 + \frac{1}{2} c^{\circ} \cos \varphi^{\circ} + \frac{1}{4} c^{\circ} c^{\circ\circ} \cos \varphi^{\circ} \cos \varphi^{\circ\circ} + \text{etc.}\right)$, substituer les valeurs $\cos \omega^{\circ} = c^{\circ}$, $\sin \varphi^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{(1 + c^{\circ 2})}}$, ce qui donne d'abord

$$Pc \sin \varphi = \frac{\frac{1}{2} c \sqrt{c^{\circ}}}{\sqrt{(1 + c^{\circ 2})}} \left(1 + \tfrac{1}{2} c^{\circ 2} + \tfrac{1}{4} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ} + \tfrac{1}{8} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ\circ} + \text{etc.}\right);$$

ensuite pour avoir l'expression des quantités $\cos \omega^{\circ\circ}$, $\cos \omega^{\circ\circ\circ}$, je reprends les équations $\tang \omega^{\circ} = b^{\circ} \tang \varphi^{\circ}$, $\varphi^{\circ\circ} = \varphi^{\circ} + \omega^{\circ}$, $\tang \omega^{\circ} = \frac{b^{\circ}}{c^{\circ}}$, ... $\tang \omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ} \tang \varphi^{\circ\circ}$, j'en déduis successivement

$$\tang \varphi^{\circ\circ} = \frac{\tang \varphi^{\circ} + \tang \omega^{\circ}}{1 - \tang \varphi^{\circ} \tang \omega^{\circ}} = \frac{(1 + b^{\circ}) c^{\circ}}{c^{\circ 2} - b^{\circ}},$$

$$\tang \omega^{\circ\circ} = \frac{b^{\circ} c^{\circ} (1 + b^{\circ})}{c^{\circ 2} - b^{\circ}} = \frac{2c^{\circ} \sqrt{b^{\circ}}}{c^{\circ 2} - b^{\circ}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} \omega^{\circ\circ} = \frac{\sqrt{b^{\circ}}}{c^{\circ}} = \tang \omega^{\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ}}}, \quad \cos \omega^{\circ\circ} = \frac{c^{\circ 2} - b^{\circ}}{c^{\circ 2} + b^{\circ}};$$

en continuant cette analyse, on trouvera

$$\tang \tfrac{1}{2} \omega^{\circ\circ\circ} = \tang \omega^{\circ\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ\circ}}}, \quad \cos \omega^{\circ\circ\circ} = \frac{b^{\circ\circ} - \tang^{2} \omega^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ} + \tang^{2} \omega^{\circ\circ}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} \omega^{\circ\circ\circ\circ} = \tang \omega^{\circ\circ\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ\circ\circ}}}, \quad \cos \omega^{\circ\circ\circ\circ} = \frac{b^{\circ\circ\circ} - \tang^{2} \omega^{\circ\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ} + \tang^{2} \omega^{\circ\circ\circ}};$$

ainsi à l'infini. On voit donc que dans le cas dont il s'agit, les quantités ω, ω°, $\omega^{\circ\circ}$, $\omega^{\circ\circ\circ}$, etc., se calculent facilement; savoir, la première au moyen de l'équation $\tan \omega = b$, la seconde au moyen de l'une des équations $\tan \omega^{\circ} = \frac{b^{\circ}}{c^{\circ}}$, $\sin \omega^{\circ} = b^{\circ}$, $\cos \omega^{\circ} = c^{\circ}$, $\tan \frac{1}{2}\omega^{\circ} = \tan \omega . \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{b}$, les suivantes au moyen des équations $\tan \frac{1}{2}\omega^{\circ\circ} = \tan \omega^{\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ}}} = \frac{\sqrt{b^{\circ}}}{c^{\circ}}$, $\tan \frac{1}{2}\omega^{\circ\circ\circ} = \tan \omega^{\circ\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ\circ}}}$, $\tan \frac{1}{2}\omega^{\circ\circ\circ\circ} = \tan \omega^{\circ\circ\circ} . \sqrt{\frac{1}{b^{\circ\circ\circ}}}$, etc., ce qui offre des formules assez remarquables pour le cas où l'on a $\varphi = 45^{\circ}$.

Maintenant qu'on connaît les valeurs de $\cos \omega^{\circ\circ}$ et $\cos \omega^{\circ\circ\circ}$, si on les substitue dans l'expression de $Pc \sin \varphi$, et qu'on y substitue également les expressions connues de $c^{\circ\circ}$ en c°, et de $c^{\circ\circ\circ}$ en $c^{\circ\circ}$, on aura, en développant ces quantités jusqu'à la dixième puissance de c° inclusivement, l'expression que nous avons rapportée du terme $Pc \sin \varphi$, laquelle est très facile à calculer, et donne au moins 12 décimales exactes, tant que l'angle du module ne surpasse pas sin 45°.

C'est par ces formules qu'on a calculé les fonctions $F(45^{\circ})$, $E(45^{\circ})$ de la Table VIII, pour toutes les valeurs de l'angle du module de 0° à 45°; au-delà de cette limite, on a fait usage de la méthode des modules croissans, art. 762, laquelle ne présente, pour le cas de $\varphi = 45^{\circ}$, aucune formule remarquable, si ce n'est pour déterminer φ', l'équation $\sin 4\varphi' = b^{2}$.

810. Nous allons maintenant expliquer avec détail les différens procédés que nous avons suivis dans la construction de la Table IX, et nous prendrons d'abord pour exemple le calcul d'une Table particulière des fonctions E.

Soit α l'arc d'un degré, ou $\alpha = \frac{\pi}{180}$; soit $\omega = \varphi + \frac{1}{2}\alpha$, et .... $\sqrt{(1 - c^{2} \sin^{2} \omega)} = \Delta(\omega)$; si on prend l'auxiliaire $p = \alpha\Delta\omega$, on aura en général pour construire la Table des fonctions E, la formule

$$\delta E = p + \frac{1}{24}\delta^{2}p^{\circ} - \frac{17}{5760}\delta^{4}p^{\circ\circ} + \text{etc.}$$

On calculera donc pour les valeurs successives $\varphi = 0^{\circ}, 1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}$, etc., les valeurs correspondantes de l'auxiliaire p; on observera de plus que la valeur p pour $\varphi = -1^{\circ}$ serait la même que pour $\varphi = 0^{\circ}$; on placera donc deux fois cette première valeur de p, l'une sur la ligne de $\varphi = 0$, l'autre sur la ligne supérieure, ce qui sera nécessaire pour former cette ligne où l'on doit trouver la différence seconde $\delta^{2}p^{\circ}$ qui entre dans la première valeur de δE, celle qui répond à $\varphi = 0$.

A mesure qu'on aura calculé une valeur de p, cette valeur servira à ajouter un terme de plus aux colonnes des différences dans les lignes supérieures. Au commencement de la Table et même jusqu'à des termes assez éloignés tels que $\varphi = 45°$ ou $50°$, il suffira de prendre les deux premiers termes de la valeur de δE, savoir : $\delta E = p + \frac{1}{24}\delta^2 p^{\circ}$; car nous supposons constamment que les valeurs de p sont calculées avec dix décimales, et qu'on en conserve neuf seulement dans les valeurs de δE.

Lorsque par le progrès de l'opération, on reconnaîtra que le troisième terme $-\frac{17}{5760}\delta^4 p^{\circ\circ}$ peut influer sur la dernière décimale de δE, il faudra tenir compte de ce terme. Mais alors on devra ajouter un terme de plus à la colonne des p, ce terme qui répond à $\varphi + \alpha$ étant nécessaire pour avoir la différence $\delta^4 p^{\circ\circ}$ qui entre dans la valeur de δE. Jamais on n'aura besoin de calculer un terme de plus de la formule.

Les mêmes procédés s'appliquent au calcul des fonctions F, avec cette seule différence, que l'auxiliaire P a pour valeur $\frac{\alpha}{\Delta\omega}$; ainsi le logarithme connu de $\Delta\omega$ servira à calculer à la fois les deux auxiliaires $p = \alpha\Delta\omega$, $P = \frac{\alpha}{\Delta\omega}$. Il faut observer seulement que les différences croissant plus rapidement dans la Table des fonctions F, il faudra beaucoup plus tôt faire entrer le troisième terme de la formule dans la valeur de δF.

En formant la colonne des différences δE et δF, réduite à neuf décimales, il sera bon de faire une marque particulière aux termes dont la dernière décimale n'est exacte qu'à $\frac{1}{2}$ ou au moins $\frac{4}{10}$ d'unité près. Cette marque sera utile pour faire sur la table les légères corrections qui seraient indiquées par la différence qu'on pourra trouver entre les fonctions données par la Table pour les amplitudes de $45°$ et $90°$, et celles qui auront été calculées d'avance par la méthode directe.

811. Il ne reste plus qu'à faire voir comment on doit calculer le logarithme de $\Delta\omega$. Au commencement de la Table et jusqu'à une limite assez éloignée, faites $\sin A = c \sin\omega$; appelez a l'angle qui, dans la Table à dix décimales, approche le plus de A, et soit la différence $l \sin A - l \sin a = r$; vous aurez avec une exactitude suffisante $l \cos A$, ou

$$\log \Delta = \log \cos a - r \operatorname{tang}^2 a,$$

et l'on voit que la correction $r \operatorname{tang}^2 a$ n'a pas besoin d'être calculée avec beaucoup de précision, tant que l'angle a sera d'un petit nombre de degrés.

Lorsque l'angle a approchera de $45°$, on pourra faire plus exactement $\log \Delta = l \cos a - R$, $\log R = \log (r \operatorname{tang}^2 a) + r + r \operatorname{tang}^2 a$.

Si l'on avait $l \sin A = l \sin a - r$, il faudrait faire $\log \Delta = l \cos a + R$, $\log R = \log (r \operatorname{tang}^2 a) - r - r \operatorname{tang}^2 a$.

Lorsque l'angle a sera plus grand que $45°$, la correction R devenant plus grande que r, les erreurs se multiplieraient par la formule précédente, et il faut lui en substituer une autre. On mettra alors la valeur de Δ sous cette forme, $\Delta = b\sqrt{\left(1 + \frac{c^2 \cos^2 \omega}{b^2}\right)}$, et faisant $\operatorname{tang} A = \frac{c \cos \omega}{b}$ on aura.. $\Delta = \frac{b}{\cos A}$. Soit a l'angle de la Table qui approche le plus de l'angle A dont on connaît la tangente, et soit $l \operatorname{tang} A = l \operatorname{tang} a + r$; on aura

$$l \cos A = l \cos a - r \sin^2 a\,(1 + Mr \cos^2 a),$$

ou si l'on fait $l \cos A = l \cos a - R$, on aura

$$lR = l\,(r \sin^2 a) + r - r \sin^2 a, \quad \text{ensuite } \log \Delta = \log \frac{b}{\cos a} + R.$$

Cette formule, dont le calcul est aussi facile qu'il est possible, ne laisse rien à désirer, et pourrait même servir dans toute l'étendue de la Table sans exception; mais le calcul de la première est plus simple, tant que $c \sin \omega$ est $< \sin 45°$.

Si l'on avait $l \operatorname{tang} A = l \operatorname{tang} a - r$, la formule deviendrait

$$\log R = \log (r \sin^2 a) - r + r \sin^2 a, \ \log \Delta = \log \left(\frac{b}{\cos a}\right) - R.$$

Connaissant Δ pour une valeur déterminée de ω, on connaîtra à la fois les deux auxiliaires $p = \alpha\Delta$, $P = \frac{\alpha}{\Delta}$, l'une pour la Table des fonctions E, l'autre pour celle des fonctions F. Ces auxiliaires devront être placées chacune sur la même ligne que la valeur de φ, d'où elles sont déduites, en faisant $\omega = \varphi + \frac{1}{2}\alpha$; on y joindra leurs différences successives continuées jusqu'à l'ordre où les différences de l'ordre suivant seraient négligeables ou fort inégales. On en déduira ensuite les valeurs de δE et de δF, suivant les formules que nous avons rapportées.

CHAPITRE XIII.

Calcul détaillé de la Table particulière pour le module $c = \sin 63°$.

812. Nous prenons pour exemple un module un peu grand, parce que les calculs deviennent plus difficiles vers la fin de la Table, à raison de la grande inégalité des différences; on verra cependant que les résultats n'en sont pas moins sûrs, en prenant les précautions convenables. Du reste, nous entrons dans tous les détails nécessaires pour qu'on puisse facilement saisir la méthode, et l'appliquer à tout autre module.

$$\varphi = 0°, \quad \omega = 0°\tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$	9,99998 69338
$\sin \omega$	7,94084 18596 8	R	— 623
$\sin A$	7,89072 27437 5	Δ	9,99998 68715
$\sin a$	7,88969 04944	ω	8,24187 73676
$r =$	103 22493 5	p	8,24186 42391
		P	8,24189 04961
r	7,01378 46		
$\tang^2 a$	5,77940 71	p . . . . $=$	0,01745 27649
	2,79319 17	P. . . . . $=$	0,01745 38201.
r	+ 103 22		
R.	2,79422 39		

Dans ce cas et dans le cas suivant, on aurait pu faire plus simplement le calcul de Δ par la formule $\log \Delta = \frac{1}{2} \log(1 - c^2 \sin^2 \omega) = -\frac{1}{2} mc^2 \sin^2 \omega$; ensuite ω devenant un peu plus grand, on aurait les formules plus approchées $r = c^2 \sin^2 \omega$, $\log \Delta = -\mathrm{R}$, $\log \mathrm{R} = \log(\frac{1}{2} mr) + \frac{1}{2} mr$; mais nous avons préféré de suivre toujours la même marche.

$\varphi = 1^\circ,\quad \omega = 1^\circ\frac{1}{2}.$

c . . .	9,94988 08840 7	r. . . .	6,07670 73	cos a. . .	9,99988 19043
sin ω .	8,41791 90153 9	tang² a.	6,73559 73	R	— 649
	8,36779 98994 6	R . . .	2,81230 46	Δ	9,99988 18394
sin a .	8,36768 05811 ·			α.	8,24187 73676
r =	11 93183 6	p =	0,01744 85446	p.	8,24175 92070
		P =	0,01745 80418	P.	8,24199 55282.

$\varphi = 2^\circ,\quad \omega = 2^\circ\frac{1}{2}.$

c . . .	9,94988 08840 7	r. . . .	5,89956 33	cos a. . .	9,99967 16309
sin ω .	8,63967 95616 1	tang² a.	7,17993 63	R.	+ 1201
	8,58956 04456 8	R . . .	3,07949 96	Δ	9,99967 17510
sin a .	8,58963 98005			α.	8,24187 73676
r = —	7 93548 2	p =	0,01744 01059	p.	8,24154 91186
		P =	0,01746 64891	P.	8,24220 56166.

Cette valeur de P, auxiliaire de la fonction F, jointe à la valeur correspondante $\delta^2 P^\circ = 42338$, donne pour $\varphi = 2^\circ$, la différence $\delta F = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^\circ = 1746\ 66655$, où il faut remarquer que le retranchement du dernier chiffre laisse une incertitude d'une demi-unité sur la neuvième décimale de δF. C'est ce qu'on a exprimé dans la Table par le signe + mis à la suite de la valeur choisie $\delta F = 1746\ 6665 +$. On aurait pu également prendre $\delta F = 1746\ 6666 -$. Nous verrons ci-après l'usage de cette notation, pour corriger les petites erreurs qui peuvent résulter du progrès de l'opération.

$\varphi = 3^\circ,\quad \omega = 3^\circ\frac{1}{2}.$

c. . .	9,94988 08840 7	cos a. .	9,99935 60113	tang² a. .	7,47276 807
sin ω .	8,78567 52787 7	R . . .	+ 5461	r.	6,26453 993
	8,73555 61628 4	Δ . . .	9,99935 65574	R	3,73730 800
sin a .	8,73574 00451	α . . .	8,24187 73676		
r = —	18 38823	p . . .	8,24123 39250	p =	1742 74532
		P . . .	8,24252 08102	P =	1747 91702.

$\varphi = 4^\circ,\quad \omega = 4^\circ\frac{1}{2}.$

c. . .	9,94988 08840 7	cos a. .	9,99893 63682	tang² a. .	7,69110 103
sin ω .	8,89464 32984 1	R . . .	— 1831	r.	5,57167 390
	8,84452 41824 8	Δ . . .	9,99893 61851	R	3,26277 493
sin a .	8,84448 68855	α . . .	8,24187 73676		
r =	3 72970	p . . .	8,24081 35527	p =	1741 05926
		P . . .	8,24294 11825	P =	1749 60972.

$\varphi = 5^\circ,\quad \omega = 5^\circ\ \frac{1}{2}.$

c........	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99840 98748	tang² a.....	7,86626 810
sin ω...	8,98157 28715 4	R.........	+ 6627	r............	5,95505 051
	8,93145 37556 1	Δ.......	9,99841 05375	R..........	3,82131 861
sin a...	8,93154 39232	α.........	8,24187 73676		
r =	— 9 01676	p.........	8,24028 79051	p =	1738 95324
		P.........	8,24346 68301	P =	1751 72864.

$\varphi = 6^\circ,\quad \omega = 6^\circ\ \frac{1}{2}.$

c........	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99777 95564	tang² a.....	8,01190 777
sin ω..	9,05385 87563 7	R.........	— 647	r............	4,79925 157
	9,00373 96404 4	Δ.........	9,99777 94917	R..........	2,81115 934
sin a...	9,00373 34424	α.........	8,24187 73676		
r =	61980	p.........	8,23965 68593	p =	1736 42832
		P.........	8,24409 78759	P =	1754 27581.

$\varphi = 7^\circ,\quad \omega = 7^\circ\ \frac{1}{2}.$

c........	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99704 36309	tang² a.....	8,13696 406
sin ω...	9,11569 76687 3	R.........	— 7250	r............	5,72337 849
	9,06557 85528	Δ.........	9,99704 29059	R..........	3,86034 255
sin a...	9,06552 56622	α.........	8,24187 73676		
r =	5 28906	p.........	8,23892 02735	p =	1733 48574
		P.........	8,24483 44617	P =	1757 25368.

$\varphi = 8^\circ,\quad \omega = 8^\circ\ \frac{1}{2}.$

c........	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99620 17398	tang² a.....	8,24662 419
sin ω...	9,16970 20867 8	R.........	— 11318	r............	5,80709 916
	9,11958 29708 5	Δ.........	9,99620 06080	r tang² a...	4,05372 335
sin a...	9,11951 88352	α.........	8,24187 73676	r............	6 414
r =	6 41356	p.........	8,23807 79756	r tang² a...	113
		P.........	8,24567 67596	R..........	4,05378 862

$p = 1730\ 12697$
$P = 1760\ 66512.$

$\varphi = 9^\circ,\quad \omega = 9^\circ\ \frac{1}{2}.$

c........	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99525 34714	tang² a.....	8,34437 695
sin ω...	9,21760 92289 4	R.........	— 10645	r............	5,68272 796
	9,16749 01130	Δ.........	9,99525 24069		4,02710 491
sin a...	9,16744 19484	α.........	8,24187 73676	r............	4 816
r =	4 81646	p.........	8,23712 97745	r tang² a...	106
		P.........	8,24662 49607	R..........	4,02715 413

$p = 1726\ 35368$
$P = 1764\ 51340.$

$\varphi = 10°$, $\omega = 10° \tfrac{1}{2}$.

c………	9,94988 08840 7	cos a…..	9,99419 83602	tang² a…..	8,43261 100
sin ω…	9,26063 30434 5	R………	— 2726	r…………	5,00292 164
	9,21051 39275	Δ………	9,99419 80876	r tang² a..	3,43553 264
sin a…	9,21050 38600	α………	8,24187 73676	r…………	1 007
r =	1 00675	p………	8,23607 54552	r tang² a..	27
		P………	8,24767 92800	R……….	3,43554 298

$p = 1722\ 16776$
P $= 1768\ 80224$.

$\varphi = 11°$, $\omega = 11° \tfrac{1}{2}$.

c………	9,94988 08840 7	cos a…..	9,99303 58856	tang² a…..	8,51309 431
sin ω…	9,29965 53093 1	R………	+ 15265	r…………	5,67066 139
	9,24953 61934	Δ………	9,99303·74121		4,18375 570
sin a…	9,24958 30382	α………	8,24187 73676	r…………	— 4 684
r = —	4 68448	p………	8,23491 47797	r tang² a…	— 153
		P………	8,24883 99555	R……….	4,18370 733

$p = 1717\ 57132$
P $= 1773\ 53578$.

$\varphi = 12°$, $\omega = 12° \tfrac{1}{2}$.

c………	9,94988 08840 7	cos a…..	9,99176 96100	tang² a…..	8,58692 248
sin ω…	9,33533 67506 1	R………	+ 5105	r…………	5,12107 045
	9,28521 76347	Δ………	9,99177 01205		3,70799 293
sin a…	9,28523 08498	α………	8,24187 73676	r…………	— 1 322
r = —	1 32151	p………	8,23364 74881	r tang² a…	— 51
		P………	8,25010 72471	R……….	3,70797 920

$p = 1712\ 56667$
P $= 1778\ 71860$.

$\varphi = 13°$, $\omega = 13° \tfrac{1}{2}$.

c………	9,94988 08840 7	cos a…..	9,99039 54410	tang² a…..	8,65536 307
sin ω…	9,36818 52534 1	R………	+ 4902	r…………	5,03499 723
	9,31806 61375	Δ………	9,99039 59312		3,69036 030
sin a…	9,31807 69767	α………	8,24187 73676	r…………	— 1 084
r = —	1 08392	p………	8,23227 32988	r tang² a…	— 49
		P………	8,25148 14364	R……….	3,69034 897

$p = 1707\ 15635$
P $= 1784\ 35572$.

$\varphi = 14°, \quad \omega = 14° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,98891 75119	tang² a	8,71901 258
sin ω . .	9,39859 96421 3	R	— 29706	r	5,75376 838
	9,34848 05262	Δ	9,98891 45413		4,47278 096
sin a ...	9,34842 38020	ϖ	8,24187 73676	r	5 672
r =	5 67242	p	8,23079 19089	r tang² a ...	297
		P	8,25296 28263	R	4,47284 065

p = 1701 34312
P = 1790 45259.

$\varphi = 15°, \quad \omega = 15° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,98732 57854	tang² a	8,77890 260
sin ω ...	9,42689 88240 2	R	— 1578	r	4,41907 967
	9,37677 97081	Δ	9,98732 56276		3,19798 227
sin a ...	9,37677 70834	ϖ	8,24187 73676	r	262
r =	26247	p	8,22920 29952	r tang² a ...	16
		P	8,25455 17400	R	3,19798 505

p = 1695 12994
P = 1797 01516.

$\varphi = 16°, \quad \omega = 16° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,98562 94425	tang² a	8,83516 911
sin ω ...	9,45334 18046 3	R	— 5947	r	4,93910 473
	9,40322 26887	Δ	9,98562 88478		3,77427 384
sin a ...	9,40321 39970	ϖ	8,24187 73676	r	869
r =	86917	p	8,22750 62154	r tang² a	59
		P	8,25624 85198	R	3,77428 312

p = 1688 52002
P = 1804 04979.

$\varphi = 17°, \quad \omega = 17° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,98382 28058	tang² a	8,88842 650
sin ω ...	9,47814 18041 2	R	+ 10340	r	5,12609 892
	9,42802 26882	Δ	9,98382 38398		4,01452 542
sin a	9,42803 60572	ϖ	8,24187 73676	r	— 1 337
r = —	1 33690	p	8,22570 12074	r tang² a ...	— 103
		P	8,25805 35278	R	4,01451 102

p = 1681 51679
P = 1811 56336.

$\varphi = 18°, \quad \omega = 18° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,98191 11603	tang² a	8,93887 079
sin ω ...	9,50147 64453 6	R	— 9358	r	5,03230 037
	9,45135 73294 3	Δ	9,98191 02245		3,97117 116
sin a ...	9,45134 65573	α	8,24187 73676	r	1 077
$r =$	1 07721	p	8,22378 75921	r tang² a	93
		P	8,25996 71431	R	3,97118 286

$p =$ 1674 12388
P $=$ 1819 56319.

$\varphi = 19°, \quad \omega = 19° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,97988 80210	tang² a	8,98696 769
sin ω	9,52349 52365 4	R	4149	r	4,63093 612
	9,47337 61406	Δ	9,97988 76061		3,61790 381
sin a ...	9,47337 18656	α	8,24187 73676	r	427
$r =$	42750	p	8,22176 49737	r tang² a	41
		P	8,26198 97615	R	3,61790 849

$p =$ 1666 34520
P $=$ 1828 05712.

$\varphi = 20°, \quad \omega = 20° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a	9,97775 92588	tang² a	9,03282 549
sin ω ...	9,54432 52953 9	R	— 36860	r	5,53369 277
	9,49420 61794 6	Δ	9,97775 55728		4,56651 826
sin a ...	9,49417 20057	α	8,24187 73676	r	3 417
$r =$	3 41737 6	p	8,21963 29404	r tang² a	368
		P	8,26412 17948	R	4,56655 611

$p =$ 1658 18484
P $=$ 1837 05346.

$\varphi = 21°, \quad \omega = 21° \tfrac{1}{2}.$

c	9,94988 08840 7	cos a . . .	9,97551 75659	tang² a . . .	9,07681 271
sin ω . . .	9,56407 54326 2	R	— 38666	r	5,51048 455
	9,51395 63166 9	Δ	9,97551 36993		4,58729 726
sin a . . .	9,51392 39212	α	8,24187 73676	r	3 240
$r =$	3 23954 9	p	8,21739 10669	r tang² a . .	386
		P	8,26636 36683	R	4,58733 352

$p =$ 1649 64717
P $=$ 1846 56104.

$$\varphi = 22^\circ,\quad \omega = 22^\circ\,\tfrac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,97316 17704	tang² a...	9,11911 416
sin ω..	9,58283 96605 8	R......	— 2226	r........	4,22843 886
	9,53272 05446 5	Δ......	9,97316 15478		3,34755 302
sin a..	9,53271 88525	α......	8,24187 73676		169
r =	16921 5	p......	8,21503 89154	r tang² a.	22
		P......	8,26871 58198	R.......	3,34755 493

p = 1640 73679
P = 1856 58920.

$$\varphi = 23^\circ,\quad \omega = 23^\circ\,\tfrac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,97069 86306	tang² a...	9.15976 441
sin ω..	9,60069 96819 9	R......	+ 389	r........	3,43013 958
	9,55058 05660 6	Δ......	9,97069 86695		2,58990 399
sin a..	9,55058 08353	α......	8,24187 73676	r........	— 269
r =	— 2692 4	p......	8,21257 60371	r tang² a..	— 4
		P......	8,27117 86981	R.......	2,58990 126

p = 1631 45852
P = 1867 14780.

$$\varphi = 24^\circ,\quad \omega = 24^\circ\,\tfrac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,96812 79369	tang² a...	9,19891 769
sin ω..	9,61772 69586 8	R......	— 33296	r........	5,32344 909
	9,56760 78427 5	Δ......	9,96812 46073		4,52236 678
sin a..	9,56758 67832	α......	8,24187 73676	r........	2 106
r =	2 10595 5	p......	8,21000 19749	r tang² a..	333
		P......	8,27375 27603	R.......	4,52239 117

p = 1621 81747
P = 1878 24724.

$$\varphi = 25^\circ,\quad \omega = 25^\circ\,\tfrac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,96544 06799	tang² a...	9,23682 845
sin ω..	9,63398 43502 6	R......	— 17823	r........	5,01414 782
	9,58386 52343 3	Δ......	9,96543 88976		4,25097 627
sin a..	9,58385 49032	α......	8,24187 73676	r.......	1 033
r =	1 03311 3	p......	8,20731 62652	r tang² a..	178
		P......	8,27643 84700	R.......	4,25098 838

p = 1611 81898
P = 1889 89846.

$$\varphi = 26^\circ, \quad \omega = 26^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ ...	9,96264 45304	$\text{tang}^2 a$ ...	9,27349 074
$\sin \omega$ ..	9,64952 74374 0	R	− 34582	r	5,26533 843
	9,59940 83214 7	Δ	9,96264 10722		4,53882 917
$\sin a$ ..	9,59938 98994	α	8,24187 73676	r	1 842
$r =$	1 84220 7	p	8,20451 84398	$r\,\text{tang}^2 a$ ..	346
		P	8,27923 62954	R	4,53885 105

$p = 1601\ 46864$
$P = 1902\ 11292.$

$$\varphi = 27^\circ, \quad \omega = 27^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ ...	9,95972 95967	$\text{tang}^2 a$ ...	9,30912 424
$\sin \omega$ ..	9,66440 55998 0	R	+ 10663	r	4,71876 152
	9,61428 64838 7	Δ	9,95973 06630		4,02788 576
$\sin a$ ..	9,61429 17170	α	8,24187 73676	r	− 523
$r =$	− 52331 3	p	8,20160 80306	$r\,\text{tang}^2 a$ ..	− 107
		P	8,28214 67046	R	4,02787 946

$p = 1590\ 77234$
$P = 1914\ 90267.$

$$\varphi = 28^\circ, \quad \omega = 28^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ ...	9,95670 41639	$\text{tang}^2 a$ ...	9,34370 679
$\sin \omega$ ..	9,67866 29015 4	R	+ 30390	r	5,13903 769
	9,62854 37856 1	Δ	9,95670 72029		4,48274 448
$\sin a$ ..	9,62855 75589	α	8,24187 73676	r	− 1 377
$r =$ −	1 37732 9	p	8,19858 45705	$r\,\text{tang}^2 a$ ..	− 304
		P	8,28517 01647	R	4,48272 767

$p = 1579\ 73620$
$P = 1928\ 28030.$

$$\varphi = 29^\circ, \omega = 29^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ ...	9,95356 77120	$\text{tang}^2 a$ ...	9,37732 512
$\sin \omega$ ..	9,69233 88236 6	R	+ 25188	r	5,02385 182
	9,64221 97077 3	Δ	9,95357 02308		4,40117 694
$\sin a$ ..	9,64223 02723	α	8,24187 73676	r	− 1 056
$r =$ −	1 05645 7	p	8,19544 75984	$r\,\text{tang}^2 a$ ..	− 252
		P	8,28830 71368	R	4,40119 002

$p = 1568\ 36665$
$P = 1942\ 25897.$

$\varphi = 30°, \quad \omega = 30°\tfrac{1}{2}.$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,95031 96585	tang² a...	9,41005 737
sin ω..	9,70546 88745 5	R......	— 3640	r........	4,15110 005
	9,65534 97586 2	Δ......	9,95031 92945		3,56115 742
sin a..	9,65534 83425	α......	8,24187 73676	r........	142
$r =$	14161 2	p......	8,19219 66621	r tang² a..	36
		P......	8,29155 80731	R........	3,56115 920

$p = 1556\ 67038$
$P = 1956\ 85242$

$\varphi = 31°, \quad \omega = 31°\tfrac{1}{2}.$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,94695 93567	tang² a...	9,44197 422
sin ω..	9,71808 51017 9	R......	— 54006	r........	5,29044 555
	9,66796 59858 6	Δ......	9,94695 39561		4,73241 977
sin a..	9,66794 64674	α......	8,24187 73676	r........	1 952
$r =$	1 95184 6	p......	8,18883 13237	r tang² a..	540
		P......	8,29492 34115	R.......	4,73244 469

$p = 1544\ 65439$
$P = 1972\ 07493$

$\varphi = 32°, \quad \omega = 32°\tfrac{1}{2}$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,94347 46145	tang² a...	9,47324 008
sin ω..	9,73021 65240 0	R......	— 8182	r........	4,43962 791
	9,68009 74080 7	Δ......	9,94347 37963		3,91286 799
sin a..	9,68009 46562	α......	8,24187 73676	r........	275
$r =$	27518 7	p......	8,18535 11639	r tang² a..	82
		P......	8,29840 35713	R.......	3,91287 156

$p = 1532\ 32598$
$P = 1987\ 94137$

$\varphi = 33°, \quad \omega = 33°\tfrac{1}{2}$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,93987 53111	tang² a...	9,50380 963
sin ω..	9,74188 94971 3	R......	+ 31086	r........	4,98876 402
	9,69177 03812	Δ......	9,93987 84197		4,49257 365
sin a..	9,69178 01258	α......	8,24187 73676	r........	— 974
$r = —$	97446	p......	8,18175 57873	r tang² a..	— 311
		P......	8,30199 89479	R......	4,49256 080

$p = 1519\ 69274$
$P = 2004\ 46717.$

$\varphi = 34°, \quad \omega = 34°\frac{1}{2}$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,93617 28891	tang² a...	9,53364 027
sin ω..	9,75312 80269 0	R......	— 54280	r........	5,20097 546
	9,70300 89109 7	Δ......	9,93616 74611		4,73461 573
sin a..	9,70299 30264	ω......	8,24187 73676	r........	1 588
$r =$	1 58845 7	p.....	8,17804 48287	r tang² a..	543
		P......	8,30570 99065	R........	4,73463 704

$p =$ 1506 76259
P $=$ 2021 66832.

$\varphi = 35°, \quad \omega = 35°\frac{1}{2}$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,93234 22152	tang² a...	9,56297 653
sin ω..	9,76395 40365 5	R......	— 16227	r........	4,64724 796
	9,71383 49206 2	Δ......	9,93234 05925		4,21022 449
sin a..	9,71383 04820	ω......	8,24187 73676	r........	444
$r =$	44386 2	p......	8,17421 79601	r tang² a..	162
		P......	8,30953 67751	R.......	4,21023 055

$p =$ 1493 54379
P $=$ 2039 56136.

$\varphi = 36°, \quad \omega = 36°\frac{1}{2}.$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,92839 41671	tang² a...	9,59176 585
sin ω..	9,77438 75973 3	R......	+ 33632	r........	4,93499 306
	9,72426 84814	Δ......	9,92839 75303		4,52675 891
sin a..	9,72427 70912	ω......	8,24187 73676	r........	— 861
$r =$ —	86098	p......	8,17027 48979	r tang² a..	— 336
		P......	8,31347 98373	R.......	4,52674 694

$p =$ 1480 04492
P $=$ 2058 16334.

$\varphi = 37°, \quad \omega = 37°\frac{1}{2}.$

c.....	9,94988 08840 7	cos a...	9,92434 12467	tang² a...	9,61995 816
sin ω..	9,78444 71278 3	R......	— 32033	r........	4,88562 692
	9,73432 80119	Δ.	9,92433 80434		4,50558 508
sin a..	9,73432 03272	ω......	8,24187 73676	r........	768
$r =$	76847	p......	8,16621 54110	r tang² a..	320
		P......	8.31753 93242	R.	4,50559 596

$p =$ 1466 27494
P $=$ 2077 49183.

$\varphi = 38°$, $\omega = 38° \frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,92015 55343	tang² a. . .	9,64777 877
sin ω. .	9,79414 95670 7	R. . . .	+ 64290	r.	5,16038 328
.	9,74403 04511 4	Δ. . . .	9,92016 19633		4,80816 205
sin a . .	9,74404 49183	α. . . .	8,24187 73676	r.	— 1 447
r = —	1 44671 6	p. . . .	8,16203 93309	r tang² a. .	— 643
		P. . . .	8,32171 54043	R.	4,80814 115

$p = 1452\ 24313$
$P = 2097\ 56489$.

$\varphi = 39°$, $\omega = 39° \frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,91586 34168	tang² a . .	9,67508 040
sin ω. . .	9,80351 05253 1	R. . . .	+ 57771	r.	5,08664 523
	9,75339 14093 8	Δ. . . .	9,91586 91939		4,76172 563
sin a. .	9,75340 36174	α.	8,24187 73676	r.	— 1 221
r = —	1 22080 2	p. . . .	8,25774 65615	r tang² a. .	— 578
		P. . . .	8,32600 81737	R.	4,76170 764

$p = 1437\ 95919$
$P = 2118\ 40100$.

$\varphi = 40°$, $\omega = 40° \frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,91146 49165	tang² a. . .	9,70191 013
sin ω. .	9,81254 44160 3	R. . . .	— 51936	r.	5,01354 922
	9,76242 53001	Δ. . . .	9,91145 97229		4,71544 935
sin a. .	9,76241 49832	α	8,24187 73676	r.	1 032
r =	1 03169	p	8,15333 70905	r tang² a. .	519
		P. . . .	8,33041 76447	R	4,71546 486

$p = 1423\ 43320$
$P = 2140\ 01908$.

[$\varphi = 41°$, $\omega = 41° \frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,90692 92066	tang² a . .	9,72844 905
sin ω. .	9,82126 45717 5	R. . . .	+ 44288	r.	4,91784 567
	9,77114 54558 2	Δ. . . .	9,90693 36354		4,64629 472
sin a . .	9,77115 37323	α	8,24187 73676	r.	— 828
r = —	82764 8	p	8,14881 10030	r tang² a. .	— 443
		P	8,33494 37322	R.	4,64628 201

$p = 1408\ 67564$
$P = 2162\ 43834$.

$\varphi = 42^\circ$, $\omega = 42^\circ\,\frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9 90228 51388	tang² a. . .	9,75457 926
sin ω. .	9,82968 33460 4	R.	+ 59879	r.	5,02271 245
	9,77956 42301 1	Δ.	9,90229 11267		4,77729 171
sin a. .	9,77957 47670	α.	8,24187 73676	r.	— 1 054
r = —	1 05368 9	p.	8,14416 84943	r tang² a. .	— 599
		P.	8,33958 62409	R.	4,77727 518

p = 1393 69741
P = 2185 67830.

$\varphi = 43^\circ$, $\omega = 43^\circ\,\frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,89753 25476	tang² a. . .	9,78032 099
sin ω. .	9,83781 22036 4	R. . . .	— 281	r.	2,66847 910
	9,78769 30877 1	Δ.	9,89753 25195	R.	2,44880 009
sin a. .	9,78769 30411	α.	8,24187 73676		
r =	466 1	p.	8,13940 98871		
		P.	8,34434 48481		

p = 1378 50989
P = 2209 75868.

$\varphi = 44^\circ$, $\omega = 44^\circ\,\frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a. . .	9,89265 43791	tang² a. . .	9,80578 881
sin ω. .	9,84566 18003 3	R.	+ 39012	r.	4,78541 526
	9,79554 26844	Δ.	9,89265 82803		4,59120 407
sin a. .	9,79554 87856	α.	8,24187 73676	r.	— 610
r = —	61012	p.	8,13453 56479	r tang² a. .	— 390
		P.	8,34921 90873	R.	4,59119 407

p = 1363 12489
P = 2234 69927.

$\varphi = 45^\circ$, $\omega = 45^\circ\,\frac{1}{2}$.

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a . .	9,88766 62110	tang² a . .	9,83092 180
sin ω. .	9,85324 20538 2	R. . . .	+ 28277	r.	4,62051 186
	9,80312 29378 9	Δ	9,88766 90387		4,45143 366
sin a. .	9,80312 71115	α.	8,24187 73676	r.	— 417
r = —	41736 1	p	8,12954 64063	r tang² a .	— 283
		P. . . .	8,35420 83289	R	4,45142 666

p = 1347 55471
P = 2260 51987.

813. Arrivé aux valeurs de Fφ et Eφ pour l'amplitude $\varphi = 45^\circ$, on voit qu'en comparant ces valeurs avec celles que donne la Table VIII, l'accord est parfait sur la fonction F, et la différence est seulement d'une

unité décimale du dernier ordre sur la fonction E. Cette différence peut facilement être corrigée, en diminuant d'une unité du dernier chiffre, l'une des différences premières, peu éloignée de 45°, marquée du signe —. Nous choisirions de préférence la différence qui répond à 30°, et pour laquelle nous prendrions 1556 6570. On pourrait aussi, pour faire remonter moins haut la correction, l'appliquer à la différence qui répond à 41°, où se trouve un semblable signe —, et réduire ainsi la différence 1408 6665 à 1408 6664, ce qui diminuera les nombres E d'une unité dans le dernier chiffre, depuis $\varphi = 42^\circ$ jusqu'à $\varphi = 45^\circ$. Mais avant d'effectuer cette correction, on peut continuer le calcul de la Table jusqu'à la fin, pour faire toutes les rectifications à la fois.

Nous remarquerons, au reste, que c'est par une sorte de hasard que le calcul de la Table s'est rencontré aussi exactement avec le résultat tiré des formules générales. Cela prouve seulement que les légères erreurs, qui, à chaque opération, affectent ou peuvent affecter le dernier chiffre, se sont compensées : dans d'autres cas, la compensation n'aura pas lieu aussi exactement; mais en opérant avec l'attention nécessaire, il y aura rarement des erreurs de plus de deux ou trois unités sur le dernier chiffre, et dans tous les cas, cette erreur sera facile à corriger par les moyens que nous avons déjà indiqués.

$$\varphi = 46^\circ, \quad \omega = 46^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ . .	9,88256 76934	$\tan^2 a$ . .	9,85574 498
$\sin\omega$ . .	9,86056 22069 9	R	— 20842	r	4,46318 500
	9,81044 30910 6	Δ	9,88256 56092		4,31892 998
$\sin a$ . .	9,81044 01858	α	8,24187 73676	r	291
$r =$	29052 6	p	8,12444 29768	$r \tan^2 a$.	208
		P	8,35931 17584	R	4,31893 497

$p = 1331\ 81216$
$\mathrm{P} = 2287\ 24011.$

$$\varphi = 47^\circ, \quad \omega = 47^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c	9,94988 08840 7	$\cos a$ . .	9,87735 84196	$\tan^2 a$ . .	9,88028 192
$\sin\omega$ . .	9,86763 08843 2	R	— 94055	r	5,09307 797
	9,81751 17683 9	Δ	9,87734 90141		4,97335 989
$\sin a$ . .	9,81749 93782	α	8,24187 73676	r	1 239
$r =$	1 23901 9	p	8,11922 63817	$r \tan^2 a$.	940
		P	8,36452 83535	R	4,97338 168

$p = 1315\ 91059$
$\mathrm{P} = 2314\ 87931.$

$$\varphi = 48^\circ, \quad \omega = 48^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a . .	9,87201 90599	tang² a. .	9,90463 954
sin ω. .	9,87445 61424 2	R. . . .	+ 14491	r.	4,25667 205
	9,82433 70264 9	Δ. . . .	9,87202 05090		4,16111 159
sin a. .	9,82433 88323	ω. . . .	8,24187 73676	r.	— 181
r = —	18058 1	p. . . .	8,11389 78766	r tang² a.	— 145
		P. . . .	8,36985 68586	R	4,16110 833

$p = 1299\ 86388$
$P = 2343\ 45630.$

$$\varphi = 49^\circ, \quad \omega = 49^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a . .	9,86658 62915	tang² a. .	9,92866 919
sin ω. .	9,88104 55153 7	R. . . .	— 46771	r.	4,74129 660
	9,83092 63994 4	Δ. . . .	9,86658 16144		4,66996 579
sin a. .	9,83092 08876	ω. . . .	8,24187 73676	r.	551
r =	55118 4	p. . . .	8,10845 89820	r tang² a.	468
		P. . . .	8,37529 57532	R	4,66997 598

$p = 1283\ 68652$
$P = 2372\ 98915.$

$$\varphi = 50^\circ, \quad \omega = 50^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a . .	9,86104 11838	tang² a. .	9,95247 580
sin ω. .	9,88740 60554 9	R. . . .	— 70437	r	4,89530 981
	9,83728 69395 6	Δ. . . .	9,86103 41401		4,84778 561
sin a. .	9,83727 90816	ω. . . .	8,24187 73676	r.	786
r =	78579 6	p	8,10291 15077	r tang² a.	704
		P	8,38084 32275	R	4,84780 051

$p = 1267\ 39359$
$P = 2403\ 49502.$

$$\varphi = 51^\circ, \quad \omega = 51^\circ \tfrac{1}{2}.$$

c. . . .	9,94988 08840 7	cos a . .	9,85538 30894	tang² a. .	9,97607 828
sin ω. .	9,89354 43700 9	R. . . .	— 28628	r.	4,48070 528
	9,84342 52541 6	Δ	9,85538 02266		4,45678 356
sin a. .	9,84342 22293	ω	8,24187 73676	r.	302
r =	30248 6	p	8,09725 75942	r tang² a.	286
		P. . . .	8,38649 71410	R.	4,45678 944

$p = 1251\ 00082$
$P = 2434\ 98977.$

$$\varphi = 52°, \quad \omega = 52° \tfrac{1}{2}.$$

c. . . .	9,94988 08840 7	$\cos a$ . .	9,84963 23386	$\tang^2 a$. .	9,99941 045
$\sin \omega$. .	9,89946 66546 1	R. . . .	— 99600	r.	4,99882 930
	9,84934 75386 8	Δ. . . .	9,84962 23786		4,99823 975
$\sin a$. .	9,84933 75656	ω. . . .	8,24187 73676	r.	997
$r =$	99730 8	p. . . .	8,09149 97462	$r \tang^2 a$.	996
		P. . . .	8,39225 49890	R	4,99825 968

$p = 1234\ 52459$
$P = 2467\ 48766.$

814. Passé ce terme, l'angle auxiliaire a deviendrait plus grand que 45°, et alors la correction R serait plus grande que r; c'est pourquoi il convient de calculer Δ par la seconde formule. On observera en même temps que les différences quatrièmes $\delta^4 P$ commencent à devenir assez grandes pour qu'il soit convenable d'y avoir égard dans le calcul de δE, et surtout dans celui de δF. Mais pour cela, il faut que la série des auxiliaires P soit avancée d'un terme de plus que la quantité E ou F qu'on veut déterminer par la différence δE ou δF.

Au reste, pour rendre aussi simple qu'il est possible le calcul de la différence δF, on voit par la formule $\delta F = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{o} - \frac{17}{5760}\delta^4 P^{oo}$, qu'il faut prendre, au lieu de $\delta^2 P^{o}$, la différence seconde corrigée.... $\delta^2 P^{o} - \frac{17}{240}\delta^4 P^{oo}$; et alors en appelant cette différence $\delta^2 P^{o} c$, on aura $\delta F = P + \frac{1}{24}\delta^2 P^{o} c$; il en est de même de δE. On fera d'ailleurs attention au signe que $\delta^4 P^{oo}$ doit prendre par rapport à $\delta^2 P^{o}$. Les différences qui vont en augmentant, sont toujours supposées positives, les autres sont négatives. Ainsi, dans la Table construite pour la fonction F, les $\delta^2 P$ allant en augmentant, les $\delta^3 P$ sont positifs par rapport aux $\delta^2 P$; mais les $\delta^3 P$ allant en diminuant (au moins jusqu'à un certain terme), les $\delta^4 P$ sont négatives, ce qui rendra $\delta^2 P^{o} - \frac{17}{240}\delta^4 P^{oo}$ plus grand que $\delta^2 P^{o}$.

$$\varphi = 53°, \quad \omega = 53° \tfrac{1}{2}.$$

$\tang \theta$. .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$. .	9,76101 047
$\cos \omega$ . .	9,77438 75973 2	$\cos a$. . .	9,81328 29020	r	3,79081 978
	0,06722 17165 4		9,84376 38628 5	r'. . . .	3,55182 025
$\tang a$. .	0,06722 23333	R	— 3563	r	— 62
$r =$ —	6177 6	Δ. . . .	9,84376 35065	r'. . . .	+ 36
		ω	8,24187 73676	R. . . .	3,55181 999
$p =$	1217 98201	p. . . .	8,08564 08741		
$P =$	2501 00098	P. . . .	8,39811 38611.		

$\varphi = 54°$, $\omega = 54° \frac{1}{2}$.

tang θ. . 0,29283 41192 2	b. . . . 9,65704 67648 5	sin² a. . 9,75206 594
cos ω . . 9,76395 40365 5	cos a . . 9,81923 32689	r 5,06238 002
0,05678 81557 7	9,83781 34959 5	r′ 4,81444 596
tang a. . 0,05679 97004	R . . . . — 65229	r . . . . — 1 154
r = — 1 15446 3	Δ. . . . 9,83780 69730	r′ . . . . + 652
	a. . . . 8,24187 73676	R. . . . 4,81444 094
p = 1201 39091	p. . . . 8,07968 43406	
P = 2535 53958	P. . . . 8,40407 03946.	

La série des auxiliaires étant ainsi avancée d'un terme de plus, on peut maintenant calculer la différence δF ou δE qui sert à ajouter un nouveau terme à la colonne des fonctions.

Ainsi, 1°. pour avoir le δF qui répond à $\varphi = 52°$, j'observe que relativement à la différence $\delta^2 P^o = 101543$, on a $\delta^4 P^{oo} = - 244$, ce qui donne la différence corrigée $\delta^2 P^o c = 101543 + \frac{17}{240} . 244 = 101560$, et ensuite $\delta F = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^o c = 2467\ 52998$, valeur qui, en supprimant la dernière décimale, se réduit à 2467 5300, ce qui donne pour 53°, $F = 1,04896\ 1980$.

2°. Dans la Table des fonctions E, on a pour $\varphi = 52°$, $\delta^2 p^o = -6635$ et $\delta^4 p^{oo} = +73$, ce qui donne $\delta^2 p^o c = -6640$, $\delta E = p + \frac{1}{24} \delta^2 p^{oo} c$ $= 1234\ 52182$, qui se réduit à 1234 5218.

$\varphi = 55°$, $\omega = 55° \frac{1}{2}$.

tang θ. 0,29283 41192 2	b...... 9,65704 67648 5	sin² a.... 9,74248 801
cos ω.. 9,75312 80269	séc a... 0,17469 96547	r........ 5,26680 818
0,04596 21461 2	R..... + 1 02166	r′....... 5,00929 619
tang a. 0,04594 36616	Δ..... 9,83175 66361	r........ + 1 848
r = 1 84845 2	a...... 8,24187 73676	r′........ — 1 022
	p 8,07363 40037	R....... 5,00930 445
p = 1184 76988	P...... 8,41012 07315	
P = 2571 11044.		

$\varphi = 56°$, $\omega = 56° \frac{1}{2}$.

tang θ. 0,29283 41192 2	b...... 9,65704 67648 5	sin² a.... 9,73231 828
cos ω.. 9,74188 94971 2	séc a... 0,16857 67900	r........ 5,09041 185
0,03472 36163 4	R...... — 66485 1	r′....... 4,82273 013
tang a. 0,03473 59307	Δ...... 9,82561 69063	r........ — 1 231
r = — 1 23143 6	a...... 8,24187 73676	r′....... + 665
	p...... 8,06749 42739	R....... 4,82272 447
p = 1168 13833	P...... 8,41626 04613	
P = 2607 71702.		

$\varphi = 57^\circ, \quad \omega = 57^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ. 0,29283 41192 2	b...... 9,65704 67648 5	sin² a..... 9,72140 405
cos ω.. 9,73021 65240	séc a... 0,16234 31620	r........ 4,73698 738
0,02305 06432 2	R..... + 28734	r'....... 4,45839 143
tang a. 0,02304 51858	Δ...... 9,81939 28002	r........ + 546
r = 54574 2	ω...... 8,24187 73676	r'....... − 287
	p...... 8,06127 01678	R....... 4,45839 402
p = 1151 51651	P...... 8,42248 45674	
P = 2645 35869.		

$\varphi = 58^\circ, \quad \omega = 58^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ... 0,29283 41192 2	b 9,65704 67648 5	sin² a. . . 9,70974 077
cos ω. . 9,71808 51017 9	séc a . . 0,15603 73479	r 5,06016 541
0,01091 92210 1	R 58872 4	r'. 4,76990 618
tang a.. 0,01090 77351	Δ 9,81309 00000	r . . . . . + 1 149
r = 1 14859 1	ω 8,24187 73676	r'. . . . . − 589
	p 8,05496 73676	R 4,76991 178
p = 1134 92554	P. . . . 8,42878 73676	
P = 2684 03001.		

$\varphi = 59^\circ, \quad \omega = 59^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ.. 0,29283 41192 2	b 9,65704 67648 5	sin² a . . . 9,69728 232
cos ω. . 9,70546 88745 5	séc a . . 0,14967 44212	r 5,09989 911
9,99830 29937 7	R. . . . − 62686 6	r'. 4,79718 143
tang a.. 9,99831 55801	Δ. . . . 9,80671 49174	r . . . . . − 1 259
r = − 1 25863 3	ω 8,24187 73676	r'. . . . . + 627
	p 8,04859 22850	R. 4,79717 511
p = 1118 38745	P 8,43516 24502	
P = 2723 71994.		

$\varphi = 60^\circ, \quad \omega = 60^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ . 0,29283 41192 2	b 9,65704 67648 5	sin² a. . . 9,68389 126
cos ω. . 9,69233 88236	séc a . . 0,14322 86353	r 4,12199 294
9,98517 29428 8	R. . . . . − 6395 6	r'. 3,80588 420
tang a. 9,98517 42672	Δ. . . . 9,80027 47606	r . . . . . − 132
r = − 13243 2	ω 8,24187 73676	r'. . . . . + 64
	p 8,04215 21282	R 3,80588 352
p = 1101 92523	P. . . . 8,44160 26070	
P = 2764 41096.		

$\varphi = 61^\circ,\quad \omega = 61^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b. . . .	9,65704 67648 5	sin² a. . .	9,66950 440
cos ω. .	9,67866 29015 4	séc a.. .	0,13671 85770	r.	5,41205 585
	9,97149 70207 6	R. . . .	+ 1 22623 7	r'.	5,08856 025
tang a..	9,97147 07752	Δ. . . .	9,79377 76042	r.	+ 2 625
r =	2 62455 6	a.. . . .	8,24187 73676	r'.	− 1 226
		p. . . .	8,03565 49718	R.	5,08857 424
p =	1085 56285	P. . . .	8,44809 97634		
P =	2806 07816.				

$\varphi = 62^\circ,\quad \omega = 62^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b.	9,65704 67648 5	sin² a . . .	9,65409 859
cos ω. .	9,66440 55998 2	sec. a . .	0,13018 18152	r	4,93490 831
	9,95723 97190 2	R.	38816 1	r'.	4,58900 690
tang a.	9,95723 11109	Δ.	9,78723 24616 6	r.	+ 861
r =	86081 2	a.	8,24187 73676	r'	− 388
		p.	8,02910 98292 6	R.	4,58901 163
p =	1069 32527	P.. . . .	8,45464 49059 4		
P =	2848 68813.				

$\varphi = 63^\circ,\quad \omega = 63^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b.	9,65704 67648 5	sin² a. . .	9,63750 571
cos ω. .	9,64952 74374 0	séc. a.. .	0,12359 79131	r.	5,03287 732
	9,94236 15566 2	R.	46815 5	r'.	4,67038 303
tang a..	9,94235 07702	Δ.	9,78064 93595	r..	+ 1 079
r =	1 07864 2	a.	8,24187 73676	r'.	− 468
		p.. . . .	8,02252 67271	R.	4,67038 914
p =	1053 23850	P.	8,46122 80081		
P =	2892 19791.				

$\varphi = 64^\circ,\quad \omega = 64^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b.. . . .	9,65704 67648 5	sin² a. . .	9,61963 588
cos ω. .	9,63398 43502 6	séc a . .	0,11698 70215	r	5,13052 610
	9,92681 84694 8	R. . . .	56256 1	r'	4,75016 198
tang a.	9,92680 49635	Δ. . . .	9,77403 94119 6	r.	+ 1 351
r =	1 35059 8	a	8,24187 73676	r'	− 563
		p	8,01591 67795 6	R.	4,75016 986
p =	1037 32962	P. . . .	8,46783 79556 4		
P =	2936 55376.				

$$\varphi = 65^\circ,\quad \omega = 65^\circ \tfrac{1}{2}.$$

tang θ.	0,29283 41192 2	b......	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$....	9,60038 902
cos ω..	9,61772 69586 8	séc a...	0,11036 91646	r........	4,41432 142
	9,91056 10779	R......	— 10344 5	r'.......	4,01471 044
tang a.	9,91056 36740	Δ......	9,76741 48950	r........	— 260
$r =$	— 25961	α......	8,24187 73676	r'.......	+ 103
		p......	8,00929 22626	R.......	4,01470 887
$p =$	1021 62677	P......	8,47446 24726		
P $=$	2981 68989.				

$$\varphi = 66^\circ,\quad \omega = 66^\circ \tfrac{1}{2}.$$

tang θ.	0,29283 41192 2	b......	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$....	9,57954 565
cos ω..	9,60069 96819 9	séc a...	0,10373 12683	r........	5,47287 502
	9,89353 38012 1	R......	12833 8	r'.......	5,05242 067
tang a.	9,89350 40931	Δ......	9,76078 93165 3	r........	+ 2 971
$r =$	2 97081 1	α......	8,24187 73676	r'.......	— 1 128
		p......	8,00266 66841 3	R.......	5,05243 910
$p =$	1006 15916	P......	8,48108 80510 7		
P $=$	3027 52718.				

$$\varphi = 67^\circ,\quad \omega = 67^\circ \tfrac{1}{2}.$$

tang θ.	0,29283 41192 2	b.......	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$....	9,55707 886
cos ω..	9,58283 96605 8	séc a...	0,09712 86688	r........	4,75450 123
	9,87567 37798	R......	20492	r'.......	4,31158 009
tang a.	9,87566 80978	Δ......	9,75417 74828 5	r........	+ 568
$r =$	56820	α	8,24187 73676	r'.......	— 205
		p......	7,99605 48504 5	R.......	4,31158 372
$p =$	990 95709	P......	8,48769 98847 5		
P $=$	3073 97184.				

$$\varphi = 68^\circ,\quad \omega = 68^\circ \tfrac{1}{2}.$$

tang θ.	0,29283 41192 2	b......	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$....	9,53272 879
cos ω..	9,56407 54326 1	séc a...	0,09055 06734	r........	4,74181 082
	9,85690 95518 3	R......	— 18816 4	r'.......	4,27453 961
tang a.	9,85691 50702	Δ	9,74759 55566	r........	— 552
$r =$	— 55183 7	α......	8,24187 73676	r'.......	+ 188
		p......	7,98947 29242	R.......	4,27453 597
$p =$	976 05193	P......	8,49428 18110		
P $=$	3120 91407.				

$\varphi = 69^\circ, \quad \omega = 69^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ.	0,29283 41192 2	b......	9,65704 67648 5	sin² a....	9,50625 605
cos ω..	9,54432 52953 9	séc a...	0,08400 62848	r........	5,39972 580
	9,83715 94146 1	R......	+ 80537 6	r'.......	4,90598 185
tang a.	9,83713 43116	Δ.....	9,74106 11034	r........	+ 2 510
r =	2 51030 1	ω......	8,24187 73676	r'........	— 805
		p......	7,98293 84710	R........	4,90599 890
p =	961 47605	P......	8,50081 62642		
P =	3168 22681.				

$\varphi = 70^\circ, \quad \omega = 70^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a..	9,47757 600
cos ω..	9,52349 52565 4	séc a..	0,07754 84976	r.....	4,85249 463
	9,81632 94757 6	R....	— 21382 5	r'....	4,33007 063
tang a..	9,81633 64960	Δ....	9,73459 31242	r.....	— 712
r = —	71202 4	ω....	8,24187 73676	r'....	+ 214
		p....	7,97647 04918	R....	4,33006 565
p =	947 26282	P....	8,50728 42434		
P =	3215 76455.				

$\varphi = 71^\circ, \quad \omega = 71^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a..	9,44625 918
cos ω..	9,50147 64453 6	séc a..	0,07115 92270	r.....	5,33736 500
	9,79431 05645 8	R....	+ 60763 1	r'....	4,78362 418
tang a.	9,79428 88193	Δ....	9,72821 20681 6	r.....	+ 2 175
r =	2 17452 8	ω....	8,24187 73676	r'.....	— 608
		p....	7,97008 94357 6	R....	4,78363 985
p =	933 44651	P....	8,51366 52994 4		
P =	3263 36236.				

$\varphi = 72^\circ, \quad \omega = 72^\circ \tfrac{1}{2}.$

tang θ.	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a...	9,41215 192
cos ω..	9,47814 18041 1	séc a..	0,06489 06520	r.....	4,96896 507
	9,77097 59233 3	R....	+ 24050 5	r'.....	4,38111 699
tang a.	9,77096 66130	Δ....	9,72193 98219	r.....	+ 931
r =	93103 3	ω....	8,24187 73676	r'.....	— 241
		p....	7,96381 71895	R.....	4,38112 389
p =	920 06220	P....	8,51993 75457		
P =	3310 83506.				

$\varphi = 73°, \quad \omega = 73° \tfrac{1}{2}.$

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	9,37485 455
cos ω. .	9,45334 18046 2	séc a . .	0,05875 42277	r	4,74652 989
	9,74617 59238 4	R	— 13224 6	r'	4,12138 444
tang a .	9,74618 15017	Δ	9,71579 96701	r	— 558
r = —	55778 5	ω	8,24187 73676	r'	+ 132
		p	7,95767 70377	R	4,12138 018
p =	907 14568	P	8,52607 76975		
P =	3357 97685.				

$\varphi = 74°, \quad \omega = 74° \tfrac{1}{2}.$

tang θ .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	9,33388 855
cos ω. .	9,42689 88240 2	séc a . .	0,05276 41736	r	5,38908 524
	9,71973 29432 4	R	+ 52843 6	r'	4,72297 379
tang a.	9,71970 84478	Δ	9,70981 62228	r	+ 2 450
r =	2 44954 4	ω	8,24187 73676	r'	— 528
		p	7,95169 35904	R.	4,72299 301
p =	894 73328	P. . .	8,53206 11448		
P =	3404 56120.				

$\varphi = 75°, \quad \omega = 75° \tfrac{1}{2}.$

tang θ .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . .	9,28893 092
cos ω. .	9,39859 96421 3	séc a. . .	0,04696 85938	r	3,46664 523
	9,69143 37613 5	R	— 569 6	r'	2,75557 615
tang a .	9,69143 40542	Δ	9,70401 53017	r	— 29
r = —	2928 5	ω	8,24187 73676	r'	+ 6
		p	7,94589 26693	R	2,75557 592
p =	882 86168	P. . . .	8,53786 20659		
P =	3450 34137.				

$\varphi = 76°, \quad \omega = 76° \tfrac{1}{2}.$

tang θ .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	9,23923 248
cos ω. .	9,36818 52534 1	séc a . .	0,04137 15398	r	5,49956 928
	9,66101 93726 3	R. . . .	+ 54806	r'	4,73880 176
tang a .	9,66098 77812	Δ. . . .	9,69842 37852 5	r	+ 3 159
r =	3 15914 3	ω	8,24187 73676	r'.	= 548
		p	7,94030 11528 5	R.	4,73882 787
p =	871 56775	P. . . .	8,54345 35823 5		
P =	3495 05152.				

$\varphi = 77^\circ$; $\omega = 77^\circ \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a...	9,18425 189
cos ω..	9,33533 67506 1	séc a..	0,03601 86194	r.....	5,42008 502
	9,62817 08698 3	R....	40212 3	r'.....	4,60433 691
tang a.	9,62814 45620	Δ....	9,69306 94055	r.....	+ 2 631
r =	2 63078 3	ω....	8,24187 73676	r'.....	— 402
		p....	7,93494 67731	R.....	4,60435 920
p =	860 88824	P....	8,54880 79621		
P =	3538 40844.				

$\varphi = 78^\circ$, $\omega = 78^\circ \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a..	9,12310 955
cos ω..	9,29965 53093 1	séc a...	0,03093 35881	r....	4,02719 870
	9,59248 94285 3	R....	+ 1413 5	r'....	3,15030 825
tang a.	9,59248 83639	Δ....	9,68798 04943	r....	+ 106
r =	10646 3	ω....	8,24187 73676	r'....	— 14
		p....	7,92985 78619	R....	3,15030 917
p =	850 85952	P....	8,55389 68733		
P =	3580 11414.				

$\varphi = 79^\circ$, $\omega = 79^\circ \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a...	9,05468 158
cos ω..	9,26063 30434 4	séc a..	0,02614 05192	r.....	5,15062 874
	9,55346 71626 6	R....	— 16043 5	r'....	4,20531 032
tang a.	9,55348 13085	Δ....	9,68318 56797	r.....	— 1 415
r = —	1 41458 4	ω....	8,24187 73676	r'....	+ 160
		p....	7,92506 30473	R.....	4,20529 777
p =	841 51730	P....	8,55869 16879		
P =	3619 85928.				

$\varphi = 80^\circ$, $\omega = 80^\circ \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b....	9,65704 67648 5	sin² a..	8,97749 842
cos ω..	9,21760 92289 4	séc a..	0,02166 38944	r.....	5,48066 737
	9,51044 33481 6	R....	+ 28720 5	r'....	4,45816 579
tang a.	9,51041 31022	Δ....	9,67871 35313	r.....	+ 3 025
r =	3 02459 6	ω....	8,24187 73676	r'....	— 287
		p....	7,92059 08989	R.....	4,45819 317
p =	832 89623	P....	8,56316 38363		
P =	3657 32737.				

$\varphi = 81^\circ,\quad \omega = 81^\circ\tfrac{1}{2}.$

tang θ .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	8,89002 032
cos ω . .	9,16970 20867 7	séc a . .	0,01754 70254	r	5,32177 257
	9,46253 62059 9	R. . . .	— 16284 5	r'	4,21179 289
tang a .	9,46255 71844	Δ	9,67459 21618	r	— 2 098
$r =$ —	2 09784 1	ω	8,24187 73676	r'	+ 163
		p	7,91646 95294	R.	4,21177 354
$p =$	825 02960	P	8,56728 52058		
P =	3692 19990.				

$\varphi = 82^\circ,\quad \omega = 82^\circ\tfrac{1}{2}.$

tang θ . .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	8,78951 015
cos ω . .	9,11569 76687 2	séc a . .	0,01380 36847	r	5,43091 090
	9,40853 17879 4	R. . . .	— 16611	r'	4,22042 105
tang a .	9,40855 87598	Δ	9,67084 87884 5	r	— 2 697
$r =$ —	2 69718 6	ω	8,24187 73676	r'	+ 166
		p	7,91272 61560 5	R.	4,22039 574
$p =$	817 94887	P. . . .	8,57102 85791 5		
P =	3724 16213.				

$\varphi = 83^\circ,\quad \omega = 83^\circ\tfrac{1}{2}.$

tang θ . .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . . .	8,67238 127
cos ω . .	9,05385 87563 7	séc a . .	0,01046 05407	r	5,62014 949
	9,34669 28755 9	R	+ 19614 2	r'	4,29253 076
tang a .	9,34665 11743	Δ	9,66750 92669 7	r	+ 4 170
$r =$	4 17012 9	ω	8,24187 73676	r'	— 196
		p	7,90938 66345 7	R	4,29257 050
$p =$	811 68334	P	8,57436 81006 3		
P =	3752 90958.				

$\varphi = 84^\circ,\quad \omega = 84^\circ\tfrac{1}{2}.$

tang θ . .	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a . .	8,53367 039
cos ω . .	8,98157 28715 4	séc a . .	0,00755 01040	r	5,33630 680
	9,27440 69907 6	R	+ 7413 0	r'	3,86997 719
tang a .	9,27438 52984	Δ	9,66459 76101 5	r	+ 2 169
$r =$	2 16923 6	ω	8,24187 73676	r'	— 74
		p	7,90647 49777 5	R	3,86999 814
$p =$	806 25975	P	8,57727 97574 5		
P =	3778 15488.				

$\varphi = 85°$, $\omega = 85° \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$ ..	8,36466 552
cos ω..	8,89464 32984 0	séc a ..	0,00508 74168	r	5,75770 888
	9,18747 74176 2	R	13256 5	r'	4,12237 440
tang a.	9,18742 01764	Δ	9,66213 55073	r	+ 5 724
$r =$	5 72412 2	α	8,24187 73676	r'	— 153
		p	7,90401 28749	R	4,12243 131
$p =$	801 70183	P	8,57974 18603		
P =	3799 63483.				

$\varphi = 86°$, $\omega = 86° \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$...	8,15095 984
cos ω..	8,78567 52787 7	séc a ..	0,00309 60397	r	5,82323 752
	9,07850 93979 9	R	— 9421 8	r'.....	3,97419 736
tang a.	9,07857 59617	Δ....	9,66014 18623 7	r	— 6 656
$r =$ —	6 65637 1	α....	8,24187 73676	r'	+ 94
		p....	7,90201 92299 7	R	3,97413 174
$p =$	798 03002	P....	8,58173 55052 3		
P =	3817 11729.				

$\varphi = 87°$, $\omega = 87° \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$...	7,86161 300
cos ω..	8,63967 95616 1	séc a ..	0,00158 47146	r	6,08802 238
	8,93251 36808 3	R	+ 8907 5	r'	3,94963 538
tang a.	8,93239 12129	Δ....	9,65863 23702	r......	+ 12 247
$r =$	12 24679 3	α....	8,24187 73676	r'	— 89
		p....	7,90050 97378	R.	3,94975 696
$p =$	795 26110	P....	8,58324 49974		
P =	3830 40766				

$\varphi = 88°$, $\omega = 88° \frac{1}{2}$.

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	$\sin^2 a$ ..	7,42056 002
cos ω..	8,41791 90153 9	séc a ..	0,00057 26469	r.	5,99792 778
	8,71075 31346 1	R....	— 2620 5	r'	3,41848 780
tang a.	8,71085 26586	Δ....	9,65761 91497	r	— 9 952
$r =$ —	9 95239 9	α.....	8,24187 73676	r'.....	+ 26
		p.....	7,89949 65173	R	3,41838 854
$p =$	793 40789	P	8,58425 82179		
P =	3839 35454.				

$$\varphi = 89^\circ, \quad \omega = 89^\circ \tfrac{1}{2}.$$

tang θ..	0,29283 41192 2	b	9,65704 67648 5	sin² a ..	6,46665 674
cos ω..	7,94084 18596 8	séc a ..	0,00006 36026	r.	6,45332 491
	8,23367 59789	R	+ 832 3	r'	2,91998 165
tang a.	8,23339 19746	Δ	9,65711 04506 8	r.	+ 28 400
$r =$	28 40043	ω	8,24187 73676	r'	— 8
		p	7,89898 78182 8	R	2,92026 557
$p =$	792 47910	P	8,58476 69169 2		
P =	3843 85429.				

815. Ici se termine le calcul des auxiliaires p et P ; car pour $\varphi = 90^\circ$, on aurait $\omega = 90^\circ \frac{1}{2}$, et les auxiliaires seraient les mêmes que pour ... $\omega = 89^\circ \frac{1}{2}$, ou pour $\varphi = 89^\circ$. De même pour $\varphi = 91^\circ$, les auxiliaires seront les mêmes que pour $\varphi = 88^\circ$; de sorte qu'à 90°, la différence δp ou δP est la même au signe près que pour 88° ; on a donc toutes les données nécessaires pour terminer les deux séries des fonctions E et F, et compléter le tableau ci-joint, qui contient le résultat de tous les calculs précédens.

φ.	E.	δE.	p.	δp.	δ²p.	δ³p.	δ⁴p.
Deg.			1745 27649	00000	42203	19	25
0	0.00000 0000	1745 2589	1745 27649	42203	42184	44	17
1	0.01745 2589	1744 8369	1744 85446	84387	42140	61	22
2	0.03490 0958	1743 9930	1744 01059	1 26527	42079	83	23
3	0.05234 0888	1742 7278 —	1742 74532	1 68606	41996	106	18
4	0.06976 8166	1741 0418	1741 05926	2 10602	41890	124	23
5	0.08717 8584	1738 9358	1738 95324	2 52492	41766	147	20
6	0.10456 7942	1736 4109	1736 42832	2 94258	41619	167	22
7	0.12193 2051	1733 4684	1733 48574	3 35877	41452	189	22
8	0.13926 6735	1730 1097	1730 12697	3 77329	41263	211	20
9	0.15656 7832	1726 3365	1726 35368	4 18592	41052	231	23
10	0.17383 1197	1722 1506 +	1722 16776	4 59644	40821	254	22
11	0.19105 2703	1717 5543	1717 57132	5 00465	40567	276	20
12	0.20822 8246	1712 5498	1712 56667	5 41032	40291	296	25
13	0.22535 3744	1707 1396	1707 15635	5 81323	39995	321	22
14	0.24242 5140	1701 3265 —	1701 34312	6 21318	39674	343	20
15	0.25943 8405	1695 1134	1695 12994	6 60992	39331	363	28
16	0.27638 9539	1688 5036	1688 52002	7 00323	38968	391	18
17	0.29327 4575	1681 5005 +	1681 51679	7 39291	38577	409	28
18	0.31008 9580	1674 1078	1674 12388	7 77868	38168	437	23
19	0.32683 0658	1666 3293	1666 34520	8 16036	37731	460	22
20	0.34349 3951	1658 1691	1658 18484	8 53767	37271	482	29
21	0.36007 5642	1649 6316 +	1649 64717	8 91038	36789	511	23
22	0.37657 1958	1640 7215 —	1640 73679	9 27827	36278	534	25
23	0.39297 9173	1631 4434	1631 45852	9 64105	35744	559	30
24	0.40929 3607	1621 8026	1621 81747	9 99849	35185	589	23
25	0.42551 1633	1611 8043	1611 81898	10 35034	34596	612	31
26	0.44162 9676	1601 4542	1601 46864	10 69630	33984	643	26
27	0.45764 4218	1590 7582	1590 77234	11 03614	33341	669	31
28	0.47355 1800	1579 7223	1579 73620	11 36955	32672	700	30
29	0.48934 9023	1568 3530	1568 36665	11 69627	31972	730	29
30	0.50503 2553	1556 6571 —	1556 67038	12 01599	31242	759	33
31	0.52059 9124	1544 6414	1544 65439	12 32841	30483	792	34
32	0.53604 5538	1532 3133	1532 32598	12 63324	29691	826	32
33	0.55136 8671	1519 6804	1519 69274	12 93015	28865	858	38
34	0.56656 5475	1506 7506	1506 76259	13 21880	28007	896	32
35	0.58163 2981	1493 5321	1493 54379	13 49887	27111	928	42
36	0.59656 8302	1480 0336	1480 04492	13 76998	26183	970	38
37	0.61136 8638	1466 2640	1466 27494	14 03181	25213	1008	40
38	0.62603 1278	1452 2326	1452 24313	14 28394	24205	1048	42
39	0.64055 3604	1437 9491	1437 95919	14 52599	23157	1090	48
40	0.65493 3095	1423 4235 +	1423 43320	14 75756	22067	1138	43
41	0.66916 7330	1408 6665 —	1408 67564	14 97823	20929	1181	49
42	0.68325 3995	1393 6887	1393 69741	15 18752	19748	1230	51
43	0.69719 0882	1378 5017	1378 50989	15 38500	18518	1281	54
44	0.71097 5899	1363 1172	1363 12489	15 57018	17237	1335	53
45	0.72460 7071	1347 5475	1347 55471	15 74255	15902	1388	61

φ.	F.	δF.	P.	δP.	δ²P.	δ³P.	δ⁴P.
Deg.			1745 38201	00000	42217	39	43
0	0.00000 0000	1745 3996	1745 38201	42217	42256	82	39
1	0.01745 3996	1745 8218	1745 80418	84473	42338	121	42
2	0.03491 2214	1746 6665 +	1746 64891	1 26811	42459	163	40
3	0.05237 8879	1747 9347	1747 91702	1 69270	42622	203	42
4	0.06985 8226	1749 6275	1749 60972	2 11892	42825	245	42
5	0.08735 4501	1751 7465	1751 72864	2 54717	43070	287	40
6	0.10487 1966	1754 2938 —	1754 27581	2 97787	43357	327	45
7	0.12241 4904	1757 2717 +	1757 25368	3 41144	43684	372	42
8	0.13998 7621	1760 6833	1760 66512	3 84828	44056	414	44
9	0.15759 4454	1764 5318 —	1764 51340	4 28884	44470	458	44
10	0.17523 9772	1768 8208	1768 80224	4 73354	44928	502	43
11	0.19292 7980	1773 5545	1773 53578	5 18282	45430	545	50
12	0.21066 3525	1778 7375	1778 71860	5 63712	45975	595	41
13	0.22845 0900	1784 3749	1784 35572	6 09687	46570	636	52
14	0.24629 4649	1790 4720	1790 45259	6 56257	47206	688	44
15	0.26419 9369	1797 0348	1797 01516	7 03463	47894	732	52
16	0.28216 9717	1804 0697 +	1804 04979	7 51357	48626	784	47
17	0.30021 0414	1811 5836	1811 56336	7 99983	49410	831	52
18	0.31832 6250	1819 5838	1819 56319	8 49393	50241	883	51
19	0.33652 2088	1828 0781 —	1828 05712	8 99634	51124	934	52
20	0.35480 2869	1837 0748	1837 05346	9 50758	52058	986	54
21	0.37317 3617	1846 5827	1846 56104	10 02816	53044	1040	54
22	0.39163 9444	1856 6113	1856 58920	10 55860	54084	1094	52
23	0.41020 5557	1867 1703	1867 14780	11 09944	55178	1146	59
24	0.42887 7260	1878 2702	1878 24724	11 65122	56324	1205	54
25	0.44765 9962	1889 9219	1889 89846	12 21446	57529	1259	57
26	0.46655 9181	1902 1369	1902 11292	12 78975	58788	1316	58
27	0.48558 0550	1914 9272	1914 90267	13 37763	60104	1374	54
28	0.50472 9822	1928 3053 +	1928 28030	13 97867	61478	1428	59
29	0.52401 2875	1942 2846	1942 25897	14 59345	62906	1487	56
30	0.54343 5721	1956 8786	1956 85242	15 22251	64393	1543	56
31	0.56300 4507	1972 1018	1972 07493	15 86644	65936	1599	55
32	0.58272 5525	1987 9688 +	1987 94137	16 52580	67535	1654	51
33	0.60260 5213	2004 4953	2004 46717	17 20115	69189	1705	52
34	0.62265 0166	2021 6972 —	2021 66832	17 89304	70894	1757	49
35	0.64286 7138	2039 5909	2039 56136	18 60198	72651	1806	42
36	0.66326 3047	2058 1936	2058 16334	19 32849	74457	1848	44
37	0.68384 4983	2077 5229 —	2077 49183	20 07306	76305	1892	29
38	0.70462 0212	2097 5967	2097 56489	20 83611	78197	1921	31
39	0.72559 6179	2118 4336	2118 40100	21 61808	80118	1952	20
40	0.74678 0515	2140 0525	2140 01908	22 41926	82070	1972	7
41	0.76818 1040	2162 4725	2162 43834	23 23996	84042	1979	+ 1
42	0.78980 5765	2185 7133	2185 67830	24 08038	86021	1980	— 17
43	0.81166 2898	2209 7945	2209 75868	24 94059	88001	1963	31
44	0.83376 0843	2234 7359	2234 69927	25 82060	89964	1932	49
45	0.85610 8202	2260 5574 —	2260 51987	26 72024	91896	1883	76

φ.	E.	δE.	p.	δp.	$\delta^2 p$.	$\delta^3 p$.	$\delta^4 p$.
Dég.							
45	0.72460 7071	1347 5475	1347 55471	15 74255	15902	1388	61
46	0.73808 2546	1331 8055	1331 81216	15 90157	14514	1449	59
47	0.75140 0601	1315 9045 +	1315 91059	16 04671	13065	1508	65
48	0.76455 9646	1299 8584	1299 86388	16 17736	11557	1573	65
49	0.77755 8230	1283 6817	1283 68652	16 29293	9984	1638	72
50	0.79039 5047	1267 3894	1267 39359	16 39277	8346	1710	73
51	0.80306 8941	1250 9973 +	1251 00082	16 47623	6635	1783	76
52	0.81557 8914	1234 5218	1234 52459	16 54258	4852	1859	82
53	0.82792 4132	1217 9800	1217 98201	16 59110	2993	1941	84
54	0.84010 3932	1201 3897	1201 39091	16 62103	+1052	2025	87
55	0.85211 7829	1184 7694 +	1184 76988	16 63155	— 973	2112	92
56	0.86396 5523	1168 1387	1168 13833	16 62182	3085	2204	94
57	0.87564 6910	1151 5178	1151 51651	16 59097	5289	2298	99
58	0.88716 2088	1134 9277 +	1134 92554	16 53809	7587	2397	99
59	0.89851 1365	1118 3906	1118 38745	16 46222	9984	2496	105
60	0.90969 5271	1101 9294	1101 92523	16 36238	12480	2601	107
61	0.92071 4565	1085 5681 —	1085 56285	16 23758	15081	2708	106
62	0.93157 0246	1069 3315 +	1069 32527	16 08677	17789	2814	107
63	0.94226 3561	1053 2459	1053 23850	15 90888	20603	2921	109
64	0.95279 6020	1037 3382	1037 32962	15 70285	23524	3030	107
65	0.96316 9402	1021 6366	1021 62677	15 46761	26554	3137	100
66	0.97338 5768	1006 1702	1006 15916	15 20207	29691	3237	100
67	0.98344 7470	990 9695 —	990 95709	14 90516	32928	3337	90
68	0.99335 7165	976 0656 +	976 05193	14 57588	36265	3427	81
69	1.00311 7821	961 4912 —	961 47605	14 21323	39692	3508	71
70	1.01273 2733	947 2793 +	947 26282	13 81631	43200	3579	54
71	1.02220 5526	933 4645	933 44651	13 38431	46779	3633	35
72	1.03154 0171	920 0817	920 06220	12 91652	50412	3668	+ 19
73	1.04074 0988	907 1667	907 14568	12 41240	54080	3687	— 12
74	1.04981 2655	894 7558	894 73328	11 87160	57767	3675	38
75	1.05876 0213	882 8858 —	882 86168	11 29393	61442	3637	66
76	1.06758 9071	871 5933 +	871 56775	10 67951	65079	3571	106
77	1.07630 5004	860 9154 —	860 88824	10 02872	68650	3465	136
78	1.08491 4158	850 8881	850 85952	9 34222	72115	3329	183
79	1.09342 3039	841 5473 +	841 51730	8 62107	75444	3146	216
80	1.10183 8512	832 9277	832 89623	7 86663	78590	2930	256
81	1.11016 7789	825 0624 —	825 02960	7 08073	81520	2674	301
82	1.11841 8413	817 9828 +	817 94887	6 26553	84194	2373	329
83	1.12659 8241	811 7184	811 68334	5 42359	86567	2044	366
84	1.13471 5425	806 2958	806 25975	4 55792	88611	1678	396
85	1.14277 8383	801 7388	801 70183	3 67181	90289	1282	411
86	1.15079 5771	798 0677 —	798 03002	2 76892	91571	871	434
87	1.15877 6448	795 2993	795 26110	1 85321	92442	437	437
88	1.16672 9441	793 4464	793 40789	— 92879	92879	0	
89	1.17466 3905	792 5178	792 47910	0	92879		
90	1.18258 9083		792 47910	+ 92879			

φ.	F.	δF.	P.	δP.	δ²P.	δ³P.	δ⁴P.
Deg.							
45	0.85610 8302	2260 5574 —	2260 51987	26 72024	91896	1883	76
46	0.87871 3776	2287 2784	2287 24011	27 93920	93779	1807	91
47	0.90158 6560	2314 9184	2314 87931	28 57699	95586	1716	130
48	0.92473 5744	2343 4961	2343 45630	29 53285	97302	1586	160
49	0.94817 0705	2373 0297	2372 98915	30 50587	98888	1426	197
50	0.97190 1002	2403 5362	2403 49502	31 49475	1 00314	1229	244
51	0.99593 6364	2435 0316	2434 98977	32 49789	1 01543	985	287
52	1.02028 6680	2467 5300	2467 48766	33 51332	1 02528	698	352
53	1.04496 1980	2501 0437	2501 00098	34 53860	1 03226	+ 346	409
54	1.06997 2417	2535 5826	2535 53958	35 57086	1 03572	— 63	481
55	1.09532 8243	2571 1536	2571 11044	36 60658	1 03509	544	560
56	1.12103 9779	2607 7602	2607 71702	37 64167	1 02965	1104	648
57	1.14711 7381	2645 4016	2645 35869	38 67132	1 01861	1752	739
58	1.17357 1397	2684 0725	2684 03001	39 68993	1 00109	2491	850
59	1.20041 2122	2723 7617	2723 71994	40 69102	97618	3341	955
60	1.22764 9739	2764 4517 —	2764 41096	41 66720	94277	4296	1078
61	1.25529 4256	2806 1175	2806 07816	42 60997	89981	5374	1205
62	1.28335 5431	2848 7256 +	2848 68813	43 50978	84607	6579	1333
63	1.31184 2687	2892 2332	2892 19791	44 35585	78028	7912	1467
64	1.34076 5019	2936 5863	2936 55376	45 13613	70116	9379	1601
65	1.37013 0882	2981 7191 +	2981 68989	45 83729	60737	10980	1726
66	1.39994 8073	3027 5525	3027 52718	46 44466	49757	12706	1845
67	1.43022 3598	3073 9926	3073 97184	46 94223	37051	14551	1942
68	1.46096 3524	3120 9296	3120 91407	47 31274	22500	16493	2025
69	1.49217 2820	3168 2362 +	3168 22681	47 53774	+ 6007	18518	2062
70	1.52385 5182	3215 7671	3215 76455	47 59781	—12511	20580	2073
71	1.55601 2853	3263 3572	3263 36236	47 47270	33091	22653	2021
72	1.58864 6425	3310 8213	3310 88506	47 14179	55744	24674	1910
73	1.62175 4638	3357 9537	3357 97685	46 58435	80418	26584	1737
74	1.65533 4175	3404 5277 —	3404 56120	45 78017	1 07002	28321	1478
75	1.68937 9452	3450 2968	3450 34137	44 71015	1 35323	29799	1135
76	1.72388 2420	3494 9952	3495 05152	43 35692	1 65122	30934	715
77	1.75883 2372	3538 3397	3538 40844	41 70570	1 96056	31649	+ 202
78	1.79421 5769	3580 0325	3580 11414	39 74514	2 27705	31851	— 377
79	1.83001 6094	3619 7644	3619 85928	37 46809	2 59556	31474	1026
80	1.86621 3738	3657 2192	3657 32737	34 87253	2 91030	30448	1711
81	1.90278 5930	3692 0786	3692 19996	31 96223	3 21478	28737	2417
82	1.93970 6716	3724 0281	3724 16213	28 74745	3 50215	26320	3106
83	1.97694 6997	3752 7636	3752 90958	25 24530	3 76535	23214	3754
84	2.01447 4633	3777 9979	3778 15488	21 47995	3 99749	19460	4320
85	2.05225 4612	3799 4682 —	3799 63483	17 48246	4 19209	15140	4776
86	2.09024 9294	3816 9425	3817 11729	13 29037	4 34349	10364	5102
87	2.12841 8719	3830 2265	3830 40766	8 94688	4 44713	5262	5262
88	2.16672 2984	3839 1691	3839 35454	+ 4 49975	4 49975	0	
89	2.20511 2675	3843 6666 +	3843 85429	0	4 49975		
90	2.24354 9341			— 4 49975			

816. On voit par le dernier résultat que la fonction complète F^{I} n'est en erreur que d'une unité du dernier chiffre, et cette erreur se corrigera immédiatement en prenant 3843 6667 pour le δF qui répond à 89°, correction indiquée par la valeur 3843 6666 +.

A l'égard de la fonction complète E^{I}, on voit que le dernier chiffre est trop petit de deux unités ; on a déjà vu qu'à 45° le dernier chiffre de la fonction est trop grand d'une unité. Ces deux légères erreurs se corrigeront fort simplement en retranchant du dernier chiffre des fonctions E une unité de 31° à 51°, les laissant comme elles sont de 52° à 58°, ajoutant une unité de 59° à 62° et deux de 63° à 90°.

Les fonctions E et F étant ainsi corrigées, la Table particulière pour le module sin 63° se trouvera construite telle qu'elle est insérée dans la Table IX.

817. Il est bon de prévenir ceux qui voudraient exécuter de semblables calculs, que lorsque quelqu'erreur se glisse dans le calcul des auxiliaires P, on la reconnaît facilement par les irrégularités que présente alors la colonne des différences quatrièmes $\delta^4 P$, ou même l'une des colonnes précédentes, si l'erreur est considérable.

En effet si, au lieu de la véritable valeur $P = m$, on a trouvé .... $P = m + e$, l'erreur $+ e$ affecte la différence $\delta^4 P$ et les différences précédentes du même ordre ou de la même colonne, de manière qu'en remontant de $\delta^4 P$ à $\delta^4 P^{\circ\circ\circ\circ}$, les nombres de la colonne qui devraient être $\delta^4 m$, $\delta^4 m^{\circ}$, $\delta^4 m^{\circ\circ}$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ}$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ\circ}$, seront respectivement $\delta^4 m + e$, $\delta^4 m^{\circ} - 4e$, $\delta^4 m^{\circ\circ} + 6e$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ} - 4e$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ\circ} + e$. Dans la colonne des différences cinquièmes, les erreurs dues à la même cause seraient en remontant $- e$, $+ 5e$, $- 10\,e$, $+ 10\,e$, $- 5e$, $+ e$; et ainsi dans les autres colonnes, antérieures ou postérieures, suivant les coefficiens des puissances du binome. Lorsqu'on rencontrera donc des inégalités semblables qui supposeront e d'une ou de plusieurs unités, il faudra rechercher quelle doit être la valeur de e pour rétablir la marche ordinaire des différences, et à compter de quel terme il faut appliquer, en remontant dans la colonne, les corrections $- e, + 4e, - 6e, + 4e, - e$. Ce terme sera celui où la valeur de P est fautive et auquel il faut appliquer la correction $- e$. Cette pratique, avec laquelle on se familiarisera aisément, est utile ou même indispensable pour construire avec succès une Table quelconque de quantités dont les différences successives sont décroissantes et finissent par être négligeables.

CHAPITRE XIV.

Des précautions prises pour assurer l'exactitude des résultats dans le calcul de la Table IX.

818. Il faut maintenant faire voir quelles précautions ont été prises pour assurer, autant qu'il est possible, l'exactitude des résultats à mesure que l'angle du module devient plus grand et se rapproche de 90°.

Tant que cet angle θ ne surpasse pas 80°, le calcul des fonctions F peut se faire par la formule

$$\delta F = P + \frac{1}{24}\left(\delta^2 P^{\circ} - \frac{17}{240}\,\delta^4 P^{\circ\circ}\right);$$

mais les derniers termes de chaque table particulière, ceux qui répondent à des amplitudes voisines de 90°, ont besoin d'une correction très petite et facile à déterminer. Cette correction est due au terme suivant de la série, lequel est $+\frac{367}{945}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\delta^6 P^{\circ\circ\circ}$, et la somme de tous les termes semblables est $+\frac{367}{945}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(\delta^5 P^{\circ\circ} - \text{const.})$, où la constante est une des valeurs précédentes de $\delta^5 P^{\circ\circ}$ assez petite pour être négligée.

Il suit de là qu'après avoir formé la série des valeurs de la fonction F, par exemple, depuis $\varphi = 70°$ jusqu'à $\varphi = 90°$, il faut ajouter pour dernière correction, à chaque valeur de F, la quantité correspondante

$$\frac{367}{945}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\delta^5 P^{\circ\circ} \text{ ou environ } \frac{\delta^5 P^{\circ\circ}}{2637}.$$

La différence $\delta^5 P^{\circ\circ}$ est sur la même ligne que $\delta^4 P^{\circ\circ}$ qui est entrée dans le calcul de δF, d'où l'on déduit $F' = F + \delta F$; ainsi cette correction se trouve très simplement en ajoutant une colonne des différences cinquièmes de l'auxiliaire, vers les derniers termes de la Table et seulement à compter du point où la différence cinquième commence à approcher de 2637 unités décimales du dixième ordre.

Il est remarquable que pour le dernier terme de la Table F (90°) ou F', la quantité $\delta^5 P^{oo}$, et par conséquent la correction qui en dépend, est nulle. Car en faisant $\varphi = 89°$,

les valeurs successives.................... 87°, 88°, 89°, 90°, 91°, 92°,
répondent terme à terme aux auxiliaires.... P^{oo}, P^{o}, P, P', P'', P''';
or, on a en général .. $\delta^5 P^{oo} = P''' - 5P'' + 10P' - 10P + 5P^{o} - P^{oo}$,
et en particulier, lorsque $\varphi = 89°$, on a $P' = P$, $P'' = P^{o}$, $P''' = P^{oo}$;
donc $\delta^5 P^{oo} = 0$.

819. Ce que nous venons de dire du calcul des fonctions F s'applique au calcul des fonctions E, d'autant mieux que la correction due aux cinquièmes différences de l'auxiliaire, n'est pas sensible pour les fonctions E, tant que θ ne surpasse pas 80°. En effet, les différences de l'auxiliaire sont beaucoup plus petites, vers la fin de la table (la seule sujette à difficulté), pour les fonctions E que pour les fonctions F; et tandis que la méthode générale ne peut guère s'appliquer sans modification, autre que la correction dont nous avons parlé, que jusqu'à $\theta = 80°$, pour le calcul des fonctions F; cette même méthode pourrait s'appliquer, avec une semblable correction, jusqu'à 87° ou 88° pour le calcul des fonctions E.

Passé le terme $\theta = 80°$, nous avons fait le calcul des derniers termes de chaque table particulière, en faisant varier l'amplitude d'un demi-degré seulement, et le nombre de ces termes a été augmenté progressivement, à mesure que θ est devenu plus grand; de sorte que pour $\theta = 88°$, on a commencé depuis $\varphi = 60°$. Cet expédient réussit complètement et dans toute l'étendue de la Table, pour le calcul des fonctions E; mais il devient encore insuffisant pour le calcul des dernières valeurs de la fonction F; savoir, de celles dont l'amplitude approche beaucoup de 90°. Il ne reste pour celles-ci d'autre ressource que de les calculer directement par les formules générales d'approximation; c'est ce qu'on a fait pour $\theta = 86°$, 87° et 88°, depuis $\varphi = 85°$, jusqu'à $\varphi = 89°$. Il n'y a eu aucun nouveau calcul à faire pour les angles du module 89° et 90°, puisque les résultats sont déjà connus par la Table du n° 731, pour le premier de ces angles, et par les Tables III et IV pour le dernier. Ainsi, à l'exception du petit nombre de termes qu'il a fallu calculer directement pour la fonction F seulement, tous les résultats contenus dans la Table IX ont été déduits de la méthode des ordonnées moyennes, dont l'usage ne saurait être trop recommandé dans les calculs de quadrature qui exigent un grand degré de précision.

820. Ayant expliqué comment les difficultés de calcul ont été vaincues dans la construction de la seconde partie de la Table, pour les angles du module plus grands que 45°, et surtout pour ceux qui approchent de 90°, il ne nous reste que peu de choses à dire sur le calcul de la première partie de la Table, depuis $\theta = 0°$, jusqu'à $\theta = 45°$. Dans celle-ci, l'application de la méthode générale s'est faite sans aucune modification, dans toute l'étendue de chaque table particulière, même pour les valeurs de l'amplitude φ, très rapprochées de 90°. On est d'ailleurs parvenu à abréger notablement les calculs pour les petites valeurs de θ, en déterminant l'auxiliaire de chaque fonction par une série très convergente. Pour cet effet, soit $\sin^2\theta \sin^2\omega = r$, l'auxiliaire pour la fonction F sera

$$P = \alpha(1-r)^{-\frac{1}{2}} = \alpha + \frac{1}{2}\alpha r + \frac{1.3}{2.4}\alpha r^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha r^3 + \text{etc.}$$

Le premier terme de cette suite $\alpha = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\ 329252$; si l'on désigne les termes suivans par (1), (2), (3), etc., en sorte qu'on ait

$$P = \alpha + (1) + (2) + (3) + (4),$$

ces termes se déduiront facilement les uns des autres, et on aura en même temps l'auxiliaire pour la fonction E, savoir :

$$p = \alpha(1-r)^{\frac{1}{2}} = \alpha - (1) - \tfrac{1}{3}(2) - \tfrac{1}{5}(3) - \tfrac{1}{7}(4);$$

or, sans passer le terme (4), on obtiendra, par ces suites, dix décimales exactes, pour toutes les valeurs de φ, si θ n'est que de quelques degrés, et pour un nombre plus ou moins grand de valeurs de φ, lorsque θ sera plus grand.

821. Ces calculs étant faits constamment avec dix décimales, le résultat des 45 premières opérations, qui donne les fonctions E et F pour l'amplitude $\varphi = 45°$, s'est toujours trouvé d'accord avec la Table VIII, soit exactement, soit à la différence d'un très petit nombre d'unités décimales du 10ᵉ ordre, nombre qui est allé rarement jusqu'à 4 et qui n'a pas le plus souvent passé 2. (On ne parle pas ici des grandes erreurs qui sont presque inévitables dans de si longs calculs, et que l'on découvre immédiatement par la comparaison avec la Table VIII). Pour faire disparaître cette différence, voici le moyen qu'on a employé : supposons qu'il y ait trois unités décimales du 10ᵉ ordre à ajouter à la fonction trouvée par le calcul, pour la faire coïncider avec le résultat de la Table VIII; il faudra examiner la dernière série des différences (c'est ordinairement la qua-

trième), et noter les endroits où elles sont le plus irrégulières. On choisira trois de ces endroits, et on verra quelles sont les différences correspondantes du 1[er] ordre qui, étant augmentées chacune d'une unité, rendraient plus uniforme la dernière série des différences. Un peu d'exercice suffit pour apercevoir d'un coup-d'œil celles des différences premières qui satisfont le mieux à cette condition. Corrigeant donc la série des fonctions, d'après celle des différences premières, on aura une nouvelle série de 45 nombres dont les différences marcheront d'une manière plus régulière, et dont le dernier terme s'accordera entièrement avec le résultat exact contenu dans la Table VIII. La même marche et le même mode de correction ont été également employés dans le calcul de la seconde partie de la Table, depuis $\varphi = 45^\circ$ jusqu'à $\varphi = 90^\circ$.

822. L'expérience nous ayant ainsi dirigé dans le calcul des différentes Tables particulières qui ont servi à composer la Table IX, nous avons pensé que tous les résultats devaient être exacts, à une ou deux unités près du dernier chiffre décimal. C'est pourquoi nous avons conservé dix décimales dans toute l'étendue de la première partie de la Table IX, depuis $\theta = 0$, jusqu'à $\theta = 45^\circ$. On aurait pu conserver la dixième décimale bien loin encore au-delà de cette limite; mais les calculs de la seconde partie étaient déjà faits, dans le dessein d'obtenir neuf décimales exactes seulement, et d'ailleurs les grandes variations qu'éprouvent les fonctions E et F, lorsque l'amplitude et l'angle du module s'approchent tous les deux de 90°, ne permettent pas de prétendre à l'exactitude de la dixième décimale dans leur détermination, à moins de calculer les auxiliaires avec une ou deux décimales de plus, ce qui aurait augmenté considérablement la longueur et la difficulté du travail.

CHAPITRE XV.

Interpolation de la Table IX.

Il ne nous reste plus qu'à faire voir, par quelques exemples, comment doit être faite l'interpolation de la Table IX.

823. *Exemple I.* Soit proposé de trouver la fonction $F(\varphi, \theta)$ dont l'amplitude $\varphi = 54^\circ 45'$ et l'angle du module $\theta = 60^\circ 15'$.

Nous regarderons, en général, F comme une fonction de deux quantités désignée par $\psi(\varphi, \theta)$. Cette fonction est censée connue pour des valeurs particulières des variables, telles que $\varphi = \alpha$, $\theta = \mathcal{E}$, et il s'agit de trouver la valeur de la fonction pour des variables peu différentes $\varphi = \alpha + x$, $\theta = \mathcal{E} + y$. On a pour cet effet la formule suivante où A désigne $\psi(\alpha, \mathcal{E})$;

$$\begin{aligned}\psi(\alpha+x, \mathcal{E}+y) = A + x\frac{\delta A}{\delta\varphi} + \frac{x.x-1}{1.2}\cdot\frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2} + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}\cdot\frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^3} + \text{etc.}\\
+ y\frac{\delta A}{\delta\theta} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{\delta^2 A}{\delta\varphi\delta\theta} + \frac{x.x-1}{1.2}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^2\delta\theta} + \text{etc.}\\
+ \frac{y.y-1}{1.2}\cdot\frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y.y-1}{1.2}\cdot\frac{\delta^3 A}{\delta\varphi\delta\theta^2} + \text{etc.}\\
+ \frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}\cdot\frac{\delta^3 A}{\delta\theta^3} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Dans cette formule les différences successives relatives à l'amplitude φ, sont désignées par $\frac{\delta A}{\delta\varphi}$, $\frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2}$, $\frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^3}$, etc., en prenant pour unité la différence constante $\delta\varphi$ qui, dans le cas de la Table IX, est égale à 1° ou $\frac{\pi}{180}$. De même les différences relatives à l'angle du module θ, sont désignées par $\frac{\delta A}{\delta\theta}$, $\frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2}$, $\frac{\delta^3 A}{\delta\theta^3}$, etc.; on voit en même temps ce que doivent signifier les notations $\frac{\delta^2 A}{\delta\theta\delta\varphi}$, $\frac{\delta^3 A}{\delta\theta^2\delta\varphi}$, $\frac{\delta^3 A}{\delta\theta\delta\varphi^2}$, etc.

824. Dans l'exemple proposé, nous aurons $\alpha = 54°$, $x = \frac{3}{4}$, $\text{6} = 60°$, $y = \frac{1}{4}$; il faut donc prendre dans la Table IX la fonction F dont l'amplitude est 54° et l'angle du module 60°, et les autres termes nécessaires pour former les différences qui entrent dans la formule. Voici ces termes :

φ.	60°.	61°.	62°.	63°.
54°	1.06018 2905	1.06346 3234	1.06672 8358	1.06997 2417
55	1.08479 4340	1.08833 0959	1.09183 4359	
56	1.10971 2368	1.11350 1120		
57	1.13494 4421			

Par les différences prises dans la première ligne verticale, on trouve

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} = 2461\ 1435,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta \varphi^2} = 30\ 6593,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^3} = 7432.$$

Par les différences prises dans la première ligne horizontale, on a

$$\frac{\delta A}{\delta \theta} = 328\ 0329,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta \theta^2} = -1\ 5205,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \theta^3} = -5860.$$

Par les différences prises dans la seconde ligne verticale, on a

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} + \frac{\delta^2 A}{\delta \theta \delta \varphi} = 2485\ 7725,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta \varphi^2} + \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^2 \delta \theta} = 32\ 2436,$$

donc

$$\frac{\delta^2 A}{\delta \theta \delta \varphi} = 24\ 6290,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \theta \delta \varphi^2} = 1\ 5843.$$

Enfin, par les différences prises dans la seconde ligne horizontale, on trouve $\frac{\delta^3 A}{\delta \theta^2 \delta \varphi} = 1986.$

Cela posé, si l'on se borne aux différences du premier ordre, on aura $F = A + \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta A}{\delta \varphi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta A}{\delta \theta} = 1.07946\ 15635$. Ajoutant les termes du second ordre, savoir : $-\frac{3}{32} \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta \varphi^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta \theta \delta \varphi} - \frac{3}{32} \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta \theta^2} = 1\ 88617$, on aura $F = 1.07948\ 04522$; enfin, ajoutant encore les termes du troisième ordre, savoir : $\frac{5}{128} \cdot \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^3} - \frac{3}{128} \cdot \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^2 \delta \theta} - \frac{9}{128} \cdot \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi \delta \theta^2} + \frac{7}{128} \cdot \frac{\delta^3 A}{\delta \theta^3} = -5411$, on aura plus exactement $F = 1.07947\ 98841$.

Pour calculer semblablement la fonction E, on prendra dans la Table IX les résultats suivans :

φ.	60°.	61°.	62°.	63°.
54°	0.84640 8389	0.84427 0773	0.84216 8257	0.84010 3932
55	0.85878 5614	0.85652 5377	0.85430 1687	
56	0.87101 0552	0.86862 3064		
57	0.88308 3348			

d'où l'on tire les différences successives :

$$\frac{\delta A}{\delta\varphi} = \quad 1237\ 7225,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2} = -\ 15\ 2287,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^3} = 145$$

$$\frac{\delta A}{\delta\theta} = -\ 213\ 7616,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2} = \quad 3\ 5100,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta\theta^3} = 3091$$

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\theta\delta\varphi} = -\ 12\ 2621,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta\theta\delta\varphi^2} = -\ 4630,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta\theta^2\delta\varphi} = 1447$$

Substituant ces valeurs dans la formule générale, on aura

par les termes du premier ordre.......... $E = 0.85515\ 69038$,
par les termes du premier et du second ordre, $E = 0.85514\ 48986$,
enfin par les termes des trois premiers ordres. $E = 0.85514\ 50801$.

825. Pour vérifier ces résultats par la méthode des modules croissans, on commencera par former l'échelle des modules qui convient à l'angle $\theta = 60°15'$: elle est la même, aux notations près, que celle qui convient au complément $29°45'$, et on la trouvera comme il suit :

c....	9.93861 91884 8	b....	9.69567 12043 9
c'...	9.99891 64980 4	b'....	8.84849 62248 0
c''...	9.99999 96621 0	b''....	7.09601 52844 4
K...	0.03014 84858 3	b'''...	3.58997 09154 6.

Faisant ensuite $\varphi = 54°15'$, on trouvera par les formules connues

$$\begin{aligned} z' &= 49°\ 57'\ 7''\ 556664 \\ z'' &= 49.\ 52.\ 2,\ 356394 \\ z''' &= 49.\ 52.\ 2,\ 261216. \end{aligned}$$

Le dernier terme z''' pouvant être pris pour la limite Φ, on aura $45° + \frac{1}{2}\Phi = 69°56'\ 1''.130608$; $H = \log \tang (45° + \frac{1}{2}\Phi) = 0.43737\ 14021$, et calculant Fz d'après l'équation $Fz = KMH$, on aura

$$\log Fz = 0.03321\ 45573\ 3,\quad Fz = 1.07947\ 98929.$$

26..

Enfin, pour calculer $E\varphi$ on a l'équation $E\varphi = L'F\varphi + Pc \sin \varphi$, dans laquelle $L' = \frac{1}{2} b^2 (1 + \frac{1}{2} b' + \frac{1}{4} b'b'')$, $P = P'.\, 2c^{\frac{1}{2}} \sin \varphi' - c \sin \varphi$, $P' = \frac{2}{r'^2} - 1$, $\log P' = -2 \log r'' = -2 \log.\, (c'' \cos \omega'') = 0.00000\ 162663$. Il en résulte les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
P'.\, 2c^{\frac{1}{2}} \sin \varphi' & = & 1.42656\ 07198\ 4 & L'F\varphi & = & 0.13759\ 15932\ 6 \\
c \sin \varphi & & 0.70900\ 72300\ 5 & Pc \sin \varphi & & 0.71755\ 34897\ 9 \\
\hline
Pc \sin \varphi & = & 0.71755\ 34897\ 9 & E\varphi & = & 0.85514\ 50830\ 5.
\end{array}$$

On voit donc que la valeur de $F\varphi$ trouvée par l'interpolation de la Table IX, n'est en erreur que d'environ une unité décimale du huitième ordre, et que celle de $E\varphi$ n'est en erreur que de trois unités décimales du neuvième ordre. Le résultat de l'interpolation serait un peu plus exact encore, si on avait égard aux termes du quatrième ordre ; mais un si petit avantage ne vaut guère la peine qu'on prendrait pour l'obtenir, et il paraît convenable de s'en tenir, comme nous l'avons fait, aux termes du troisième ordre, ou même à ceux du second, si on se contente de six ou sept décimales exactes ; et alors le calcul de l'interpolation pourra s'abréger beaucoup, puisqu'il ne faudra que six données de la Table pour faire connaître les différences jusqu'au second ordre inclusivement.

Exemple II.

826. Supposons qu'on a $\theta = 54°4'12''$, et $\tang \varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta)}}$, ou $\varphi = 52°32'\ 48''95776$, il s'agit de trouver la valeur correspondante de la fonction F.

Il faudra prendre dans la Table la fonction F dont l'amplitude est 52°, et l'angle du module 54° ; cette fonction que nous appelons A doit être jointe aux autres termes de la Table qui servent à trouver les différences successives de A, comme on le voit ici :

φ.	54°	55°	56°	57°
52°	0.99474 1696	0.99758 5559	1.00043 7770	1.00329 4449.
53	1.01750 1833	1.02054 9415	1.02360 8238	
54	1.04047 7478	1.04374 0340		
55	1.06367 2482			

Par le moyen de ces termes on trouvera comme ci-dessus les différences successives de la fonction A, savoir:

$$\frac{\delta A}{\delta\varphi} = 2276\ 0137, \quad \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2} = 21\ 5508, \quad \frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^3} = 3851,$$

$$\frac{\delta A}{\delta\theta} = 284\ 3863, \quad \frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2} = 8348, \quad \frac{\delta^3 A}{\delta\theta^3} = -\ 3880,$$

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\theta\,\delta\varphi} = 20\ 3719, \quad \frac{\delta^3 A}{\delta\varphi^2\delta\theta} = 1\ 1561, \quad \frac{\delta^3 A}{\delta\varphi\,\delta\theta^2} = 2893.$$

On a d'ailleurs dans cet exemple $x = 0.546932711$, $y = 0.07$; substituant toutes ces valeurs dans la formule générale, on aura

Par les seules différences du premier ordre,	F = 1.00738 90298
Corrcction due aux différences du deuxième ordre,	— 1 91734
	F = 1.00736 98564.
Correction due aux différences du troisième ordre,	— 19
Donc par les trois ordres de différences,	F = 1.00736 98545.

827. Comme la valeur de φ a été prise de manière que $F\varphi = \frac{1}{2}F^1$, ce résultat peut être vérifié par la Table des fonctions complètes d'où l'on déduit $F^1 = 2.01473\ 97308$, et par conséquent $F\varphi = 1.00736\ 98654$; ainsi on voit que la valeur trouvée pour F par l'interpolation, est en erreur d'une unité décimale du huitième ordre, erreur assez légère sans doute; mais ce qui est remarquable, c'est que la correction due aux troisièmes différences n'a fait que rendre un peu plus défectueux le résultat des secondes différences. Pour expliquer cette espèce de paradoxe, on a eu recours aux différences quatrièmes qu'on a obtenues en ajoutant un terme de plus aux lignes des données tirées de la table; on a trouvé ainsi :

$$\frac{\delta^4 A}{\delta\varphi^4} = -\ 182, \quad \frac{\delta^4 A}{\delta\varphi^3\delta\theta} = 499, \quad \frac{\delta^4 A}{\delta\varphi^2\delta\theta^2} = 440, \quad \frac{\delta^4 A}{\delta\varphi\,\delta\theta^3} = -\ 226, \quad \frac{\delta^4 A}{\delta\theta^4} = -\ 220,$$

ce qui donne $+ 165$ pour la correction due aux quatrièmes différences, et pour la valeur corrigée $F = 1.00736\ 98710$. De cette manière l'erreur n'est plus que de 5 ou 6 unités décimales du neuvième rang; c'est tout le degré d'exactitude qu'on peut obtenir d'une Table dans laquelle les nombres ne peuvent être tout-à-fait exempts d'erreur dans le dernier chiffre décimal.

Au reste, si la correction $+ 165$ qu'on a tirée dans cet exemple des quatrièmes différences, est plus grande que la correction $- 19$ due aux troisièmes différences, contre la loi générale, cette anomalie est due à ce que la différence première $\frac{\delta A}{\delta \theta}$ parvient presque à son *maximum*, dans une des données tirées de la Table; cette circonstance rend les différences secondes irrégulières et plus petites dans un certain intervalle que les différences troisièmes. Mais il demeure toujours constant que jamais on n'aura besoin des différences quatrièmes, qui compliqueraient beaucoup les calculs d'interpolation, et que même il est assez inutile dans la plupart des cas de tenir compte des différences troisièmes, ainsi que nous l'avons déjà dit.

828. Soit proposé maintenant de trouver dans le même exemple la valeur de la fonction Eφ : on prendra dans la Table IX les données nécessaires pour former les différences jusqu'au troisième ordre comme il suit :

φ.	54°.	55°.	56°.	57°.
52°	0.83315 6567	0.83111 4636	0.82908 8601	0.82708 1154
53	0.84654 0479	0.84437 9823	0.84223 5511	
54	0.85979 8853	0.85751 5129		
55	0.87293 1842			

Il en résulte les valeurs suivantes des différences

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} = 1338\ 3912,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta \varphi^2} = -12\ 5538,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^3} = 153,$$

$$\frac{\delta A}{\delta \theta} = -204\ 1931,\quad \frac{\delta^2 A}{\delta \theta^2} = 1\ 5896,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \theta^3} = 2692,$$

$$\frac{\delta^2 A}{\delta \theta \delta \varphi} = -11\ 8725,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi^2 \delta \theta} = 4843,\quad \frac{\delta^3 A}{\delta \varphi \delta \theta^2} = 448.$$

Substituant ces valeurs dans la formule générale, on a par les premières différences................................ E = 0.84033 37311

Correction des secondes différences........... + 1 04912

0.84034 42223

Correction des troisièmes différences.......... +176

0.84034 42399.

La vraie valeur se déduira de l'équation $2E\varphi - E' = 1 - b = \ldots\ldots$ 0.41320 358685; or par la Table II on a $\log E' = 0.10294\ 2841082$, $E' = 1.26748\ 503703$, donc $E\varphi = 0.84034\ 43119$; ainsi l'erreur n'est que de sept unités décimales du huitième ordre. Si on s'en était tenu aux différences secondes, l'erreur n'eût pas été de neuf unités décimales du même ordre.

829. Nous ne dissimulerons pas qu'il y a des cas où l'interpolation de la Table IX ne donnerait pas des résultats aussi exacts que dans les exemples précédens; ce sont ceux où l'amplitude et l'angle du module seraient tous deux plus près de $90°$ que de $45°$, car alors les différences des fonctions, surtout celles de la fonction F décroissent si lentement, qu'il faudrait dans la formule, tenir compte des termes du 4[ième] ordre et même de ceux du 5[ième], pour que l'erreur ne se fît sentir que vers la 7[ième] ou la 8[ième] décimale. Mais cet inconvénient est inhérent à la nature des choses, et on pourra toujours l'éviter, soit par les formules de bissection, soit par les formules des fonctions complémentaires, en ramenant la détermination des fonctions E et F à celle de deux autres fonctions dont l'amplitude sera beaucoup plus petite.

En général l'usage le plus ordinaire de la Table IX sera de faire trouver la valeur des fonctions avec quatre ou cinq décimales seulement, et pour cela on n'aura besoin que des différences premières que l'on pourra toujours prendre à vue. C'est ce qui suffira dans beaucoup de questions particulières. Supposons, par exemple, que pour le module $c = \sin 75°$, on veuille connaître la fonction $F\varphi$, dont l'amplitude est donnée par l'équation $\tang \frac{1}{2}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; on trouvera d'après cette équation $\varphi = 74° 27' 27''96 = 74°.45777$; ensuite comme l'angle du module se trouve exactement dans la Table, il n'y aura d'interpolation à faire qu'à l'égard de l'amplitude; on trouve donc par la seule première différence $F\varphi = 1.84556$, et en tenant compte de la seconde différence $F\varphi = 1.845374$. Je suppose maintenant qu'on a voulu calculer $F\varphi$, pour savoir si $F\varphi$ n'est pas commensurable avec la fonction complète $F^1 = 2.768063$; il faudra chercher par les fractions continues le rapport de $F\varphi$ à F^1. Ce rapport se trouve $\frac{2}{3}$ presqu'exactement; car les $\frac{2}{3}$ de F^1 sont 1.845375, ainsi il est extrêmement probable que la valeur de φ qui satisfait à l'équation $\tang \frac{1}{2}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, satisfait aussi exactement à l'équation $F\varphi = \frac{2}{3}F^1$, et c'est ce que les formules connues pour la trisection de la fonction F^1, confirment pleinement. Ce résultat aurait été également mis en évidence par la première valeur moins approchée 1.84556, qui résulte des seules premières différences.

CHAPITRE XVI.

Des cas où l'on voudrait pousser l'approximation au-delà de quatorze décimales, dans le calcul des fonctions E *et* F.

830. Le nombre de quatorze décimales dans les logarithmes, ou celui de quatorze chiffres significatifs, dans les nombres, est la limite que nous n'avons pu passer jusqu'à présent dans le calcul des fonctions E et F, parce que les Tables trigonométriques les plus étendues ne comportent pas un plus grand degré de précision. S'il devenait donc nécessaire dans quelques cas de pousser plus loin l'approximation, on pourrait toujours faire usage des formules générales qui sont susceptibles d'un degré d'exactitude indéfini; mais il faudrait recourir à des moyens particuliers pour déterminer avec la précision nécessaire les élémens qui entrent dans ces formules.

Soit proposé, par exemple, de calculer avec vingt décimales les logarithmes des fonctions complètes F^1c, E^1c, qui répondent au module $c = \sin 45°$. Il faudra pour cet effet évaluer jusqu'à vingt décimales, les logarithmes des modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ\circ}$, et ceux de leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ\circ}$; ce nombre de termes suffit, quand même on voudrait pousser la précision jusqu'à vingt-huit décimales.

831. D'abord puisque $c = b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, on a immédiatement

$$lc = lb = 9.84948\ 50021\ 68009\ 40239\ 313;$$

en second lieu on a $c^\circ = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$; ainsi il faut calculer le logarithme de $\sqrt{2}+1$ avec vingt décimales au moins. Pour cela j'observe qu'en faisant $(1+\sqrt{2})^n = p + q\sqrt{2}$, on a $p^2 - 2q^2 = (-1)^n$, et $p + q\sqrt{2} = p + \sqrt{(p^2 \mp 1)}$; d'un autre côté

$$\log[p + \sqrt{(p^2 \mp 1)}] = \log 2p \mp \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2p^2} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{m}{4p^4} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{m}{6p^6} - \text{etc.};$$

or en faisant $n = 15$, on a $p = 275807 = 7.31^2.41$, $q = 195025$, $p^2 - 2q^2 = -1$; donc $15 \log(1 + \sqrt{2}) = \log 2p + \frac{1}{2}.\frac{m}{2p^2} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{m}{4p^4}$. Par la table connue qui donne jusqu'à 25 décimales ou plus les logarithmes des nombres de 1 à 1100, on trouve $\log 2p$, auquel il suffit d'ajouter la correction $\frac{m}{4p^2}$ facile à calculer, ce qui donnera les résultats suivans :

$\log 2p$.........	=	5.74163 52800 66518 87976 87
$m : 4p^2$........		1427 29502 20
$15 \log(1 + \sqrt{2})$.	=	5.74163 52800 67946 17479 07
$\log(1 + \sqrt{2})$.		0.38277 56853 37863 07831 938
$2 \log(1 + \sqrt{2})$.		0.76555 13706 75726 15633 876
$\log c^\circ$..	=	9.23444 86293 24273 84366 124.

Ensuite par la valeur $b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}$, on trouvera

$$\log b^\circ = 9.99351\ 18092\ 42113\ 41569\ 78.$$

832. Il faut maintenant calculer $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, ce qui se fera par les formules $b^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{b^\circ}}{1+b^\circ}$, $c^{\circ\circ} = \frac{c^{\circ 2}}{(1+b^\circ)^2}$; ainsi tout se réduit à trouver ..... $\log(1 + b^\circ)$. Or une valeur approchée de b° étant $a = \frac{1063}{1079}$, on connaît par les Tables le logarithme de a et celui de $1 + a = \frac{2142}{1079}$, ce qui permettra de calculer $\log(1 + b^\circ)$ comme il suit :

b°	9.99351 18092 42113 41569 78
a.	9.99351 18198 40386 08392 38
r.	105 98272 66822 60

$\mathcal{L}A = \mathcal{L}a - r$, $r' = \frac{r}{1+a}$, $R = ar'(1 - \frac{1}{2}Mr')$

$\mathcal{L}(1 + A) = \mathcal{L}(1 + a) - R$.

$1 + a$......		0.29779 80218 12926 15600 789
1).........		— 52 69553 61641 094
		80165 53372 53959 695
2).........		+ 3232 708
$\mathcal{L}(1+b^\circ)$	=	0.29779 80165 53372 57192 403
c°.........		9.23444 86293 24273 84366 124
		8.93665 06127 70901 27143 721
$\mathcal{L}c^{\circ\circ}$	=	7.87330 12255 41802 54287 442

$2\sqrt{b^\circ}$...		0.29778 59002 85037 90306 264
$1 + b^\circ$...		0.29779 80165 53372 57192 403
$\mathcal{L}b^{\circ\circ}$	=	9.99998 78837 31665 33113 861

$\frac{1}{2}c^\circ$.	7.57227 12298 77821 34766 068
	5.14454 24597 55642 69532 136
$b^{\circ\circ}$.	9.99998 78837 31665 33113 861
p...	5.14455 45760 23977 36418 275

833. Ces premiers termes étant connus, on pourra calculer les modules suivans c^{ooo}, b^{ooo}, par les formules ordinaires $p = (\frac{1}{2} c^{oo})^2 \cdot \frac{1}{b^{oo}}$, ... $P = mp^2 - \frac{3}{2} mp^4$, $\mathcal{L}c^{ooo} = lp - P$, $lb^{ooo} = -\frac{1}{2}P$; voici ce calcul :

mp^2..	84507 15154 866	p.......	5.14455 45760 23977 36418 275
$\frac{3}{2} mp^4$.	2 466	P.......	— 84507 15152 400
P =	84507 15152 400	$l\, c^{ooo} =$	5.14455 45759 39470 21265 875
		$l\, b^{ooo} =$ —	42253 57576 200

On obtient ensuite très facilement les modules c^{oooo}, b^{oooo}, comme il suit :

$\frac{1}{2} c^{ooo}$.....	4.84352 45802 75489 01744 511		
son quarré.	$\bar{9}$.68704 91605 50978 03489 022		
1 : b^{ooo}....	42253 57576 200		
p	$\bar{9}$.68704 91605 93231 61065 222	p^2. . .	$\bar{\bar{9}}$.37409 832
P	— 103	m. . .	9.63778 431
$\mathcal{L}c^{oooo}$. =	$\bar{9}$.68704 91605 93231 61065 119 (*)	P....	$\bar{\bar{9}}$.01188 263
$\mathcal{L}b^{oooo}$. =	— 051.		

834. On voit qu'en s'en tenant à vingt décimales, il n'est pas nécessaire de prolonger la série des modules au-delà de c^{oooo} et b^{ooo}; car $\log b^{oooo}$ n'est que d'une demi-unité décimale du vingt-unième ordre. Cependant le calcul étant amené à ce point, on peut sans peine avoir deux décimales de plus, en prenant la valeur suivante de $\log c^{ooooo}$:

c^{o4}. . .	$\bar{9}$.68704 91605 93231 61065 119
2. . . .	0.30102 99956 63981 19521 374
	$\bar{9}$.38601 91649 29250 41543 745
	$\bar{\bar{8}}$.77203 83298 58500 83087 490
1 : b^{o4}.	51
$\mathcal{L}c^{ooooo} =$	$\bar{\bar{8}}$.77203 83298 58500 83087 541.

(*) Nous rappellerons ici un usage qui est commode à suivre dans le calcul des fractions très petites. La caractéristique 9 place le premier chiffre d'un nombre au premier rang des décimales, la caractéristique $\bar{9}$ le place au onzième rang, la caractéristique $\bar{\bar{9}}$ au vingt-unième rang, et ainsi de suite.

D'après ces élémens, le calcul de $K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} b^{\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ} b^{\circ\circ\circ\circ}\right)}$ et celui de.. $F^1 c = \frac{\pi}{2} K$, donnent les résultats suivans :

$\log K =$	0.07200 73453 81757 88434 038
$\frac{1}{2}\pi$. . . .	0.19611 98770 30152 65913 753
$\mathcal{L}F^1 c =$	0.26812 72224 11910 54347 791.

835. Maintenant pour avoir la valeur de $E^1 c = LF^1 c$, il faut calculer le coefficient L par la formule

$$L = \frac{b}{b^{\circ 2}}\left(1 - \tfrac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} - \tfrac{1}{4} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ} - \tfrac{1}{8} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ} c^{\circ\circ\circ\circ}\right).$$

Pour cela soit $r = \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}\left[1 + \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ}\left(1 + \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ\circ}\right)\right]$, on aura d'abord. . . $L = \frac{b}{b^{\circ 2}}(1 - r)$; soit ensuite $r' = \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ}\left(1 + \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ\circ}\right) = \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ}\sqrt{(1 + c^{\circ\circ\circ\circ})}$ $= \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ}\left(\frac{1}{b^{\circ\circ\circ}}\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $r = \frac{1}{2} c^{\circ\circ}(c^{\circ})^2(1 + r')$, d'où $\log r$ . . . . $= \log\left(\frac{1}{2} c^{\circ\circ}\right) + 2 \log c^{\circ} + mr' - \frac{1}{2} mr'^2 + \frac{1}{3} mr'^3$; voici le calcul de cette formule :

$\frac{1}{2} c^{\circ\circ}$. . .	7.57227 12298 77821 34766
$(c^{\circ})^2$. . .	8.46889 72586 48547 68672
(1). . +	30290 67083 5444
(2). . —	10563 3939
(3). . +	491
$\log r =$	6.04117 15175 82889 2340

$\frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ}$. . .	4.84352 45802 75489
$1 : (b^{\circ\circ\circ})^{\frac{1}{2}}$	10563
r'	4.84352 45802 8605
m	9.63778 43113 0054
(1). . . .	4.48130 88915 8659
$\frac{1}{2} r'$. . . .	4.54249 45846
2).	9.02380 3476
$\frac{2}{3} r'$. . . .	4.66743 32
3).	3.69123 7.

D'après cette valeur de $\log r$, il faut calculer $\log(1 - r)$ par la suite $-mr$ $(1 + \frac{1}{2}r + \text{etc.})$ dont cinq termes suffisent; on obtiendra ainsi

$\log(1 - r) = -$	0.00004 77506 95768 98769 62
$\frac{b}{b^{\circ 2}}$	9.86246 13836 83782 57099 75
$\log L =$	9.86241 36329 88013 58330 13
$F^1 c$.	0.26812 72224 11910 54347 79
$\log E^1 c\ldots =$	0.13054 08553 99924 12677 92.

836. Cette valeur de E^1c peut être vérifiée comme ci-dessus par l'équation $E^1 = \frac{1}{2}F^1(1+A)$ dans laquelle $A = \frac{1}{KF^1}$, en voici le calcul :

KF^1...	0.34013 43677 93668 42781 829	$a = \frac{865}{1893}$, $1 + a = \frac{2758}{1893}$
A	9.65986 56322 06331 57218 171	
a	9.65986 54935 01017 46903 483	$\mathcal{L}A = \mathcal{L}a - r$, $r' = \frac{r}{1+a}$
$r =$	612 94685 89685 312	$\mathcal{L}(1+A) = \mathcal{L}(1+a) - R$
		$R = ar' - \frac{1}{2}aMr'^2$.

Le terme ar' se calculera plus facilement sans le secours des logarithmes par la valeur $\frac{ar}{1+a} = \frac{865}{2758}r$, et on aura $ar' =$ 192 24040 35561 202

l'autre partie $\frac{1}{2}aMr'^2$ calculée par logarithmes = 93112 831

$R =$	192 24039 42448 371
$\mathcal{L}(1+a) =$	0.16344 36478 76034 20298 574
$\mathcal{L}(1+A) =$	0.16344 36286 51994 77850 203
$\frac{1}{2}F^1c$.....	9.96709 72267 47929 34826 417
$\log E^1c$ ... $=$	0.13054 08553 99924 12676 62.

Ces deux résultats ne diffèrent entre eux que d'une unité décimale du 20° ordre : le dernier semble devoir être le plus exact.

837. Quant à la valeur de F^1c, on peut la vérifier aussi par les formules $F^1c = KMH$, $H = \frac{1}{32}\log\frac{4}{c^{00000}} = 0.68218\ 81769\ 20920\ 67373\ 6$. Or, en faisant $a = \frac{3^9 . 119 . 233}{8 . 10^{11}} = 0.68218\ 81762\ 5$, $H = a + x$, $x = 0.00000\ 00006\ 70920\ 67373\ 6$, et appliquant les formules $\mathcal{L}(a+x) = \mathcal{L}a + R$, $\mathcal{L}R = \mathcal{L}\frac{mx}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{mx}{a}$, on aura les résultats suivans :

a...	9.83390 41879 03568 08145 556	x...	0.82667 11744 23391
R...	+ 4 27121 36680 055	m...	9.63778 43113 00537
H...	9.83390 41883 30689 44825 611	$1:a$.	0.16609 58120 96432
M...	0.36221 56886 99463 21087 710	$\frac{mx}{a}$..	0.63055 12978 20360
K...	0.07200 73453 81757 88434 038	$\frac{1}{2}\frac{mx}{a}$..	− 2 13561
$\mathcal{L}F^1c =$	0.26812 72224 11910 54347 36	$\mathcal{L}R =$	0.63055 12976 0680.

On voit que cette valeur ne diffère de celle qu'on a déjà trouvée que de quatre unités décimales du vingt-unième ordre, ce qui confirme pleinement tous ces calculs.

858. Connaissant ainsi les fonctions complètes, si on se propose de déterminer avec un pareil degré d'exactitude les fonctions $E\varphi$, $F\varphi$, pour une amplitude donnée φ, le calcul présentera de plus grandes difficultés, parce que les Tables connues de log. sinus ne passent pas quatorze décimales, au lieu que les logarithmes des nombres jusqu'à 1100, sont donnés avec un beaucoup plus grand nombre de décimales par la Table de *Sharp*, et se trouvent dans plusieurs autres recueils, ce qui permet de suppléer aux limites des Tables, en employant des réductions et des artifices de calcul tels que ceux dont nous avons donné des exemples. Voici, au reste, quelle serait la marche qu'on pourrait suivre, si on entreprenait de semblables calculs.

Supposons qu'étant donnée la valeur de φ, on veuille déterminer, avec vingt décimales exactes, la fonction $F\varphi$ ou son logarithme, il faudra commencer par chercher, avec une semblable précision, la valeur de tang φ ou celle de son logarithme, c'est ce qu'on trouvera par les formules connues dans la théorie des fonctions angulaires. Ensuite il faudra procéder au calcul des angles croissans φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ}$, etc., où à celui des angles décroissans φ', φ'', φ''', etc., selon que le module sera plus petit ou plus grand que sin $45°$.

Dans le premier cas, pour déterminer φ° par le moyen de φ, on ne doit plus employer l'équation succincte $\tang(\varphi^\circ - \varphi) = b \tang \varphi$ qui suppose l'usage des tables de sinus, mais il faudra déterminer simplement la valeur numérique de tang φ° par la formule

$$\tang \varphi^\circ = \frac{(1+b)\tang \varphi}{1 - b \tang^2 \varphi}.$$

On aura soin cependant de noter la valeur approchée de φ°, en degrés et minutes seulement, afin de ne pas confondre le véritable arc φ° dont on a besoin, avec les autres arcs qui peuvent avoir la même tangente; on se rappellera pour cet effet, qu'en vertu de l'équation $\sin(2\varphi - \varphi^\circ) = c^\circ \sin \varphi^\circ$, la valeur de $2\varphi - \varphi^\circ$ doit toujours être contenue entre les limites θ° et $-\theta^\circ$, θ° étant le plus petit arc qui a pour sinus c°.

On connaît déjà $l \tang \varphi$, on connaît $\mathcal{L}(1+b) = \mathcal{L}\frac{2\sqrt{b}}{b^\circ}$, ainsi pour avoir $l \tang \varphi^\circ$, il faut faire $b \tang^2 \varphi = A$, et du logarithme connu de A déduire celui de $1 - A$, ce qui se fait par les formules dont nous avons donné beaucoup d'exemples.

Il est visible maintenant qu'un semblable calcul servira à déduire $\varphi^{\circ\circ}$ de φ°, et ainsi de suite. On continuera donc le calcul des amplitudes croissantes φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ}$, etc., jusqu'à la limite où un terme ne diffère plus sensiblement du double du précédent; cette limite aura lieu lorsque le b correspondant au dernier φ pourra être pris pour l'unité; dans l'exemple précédent, c'était $b^{\circ\circ\circ}$. Ainsi, lorsqu'on voudra avoir vingt décimales exactes et que c ne surpassera pas sin 45°, il ne faudra pas prolonger la suite φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, etc., au-delà du quatrième terme $\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$, et pour des modules au-dessous de sin 26°, il suffirait d'aller jusqu'à $\varphi^{\circ\circ\circ}$.

Connaissant tang $\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$ et sachant toujours d'avance, à très peu près, combien l'arc $\varphi^{\circ 4}$ contient de degrés et de minutes, il restera à trouver l'arc lui-même qui répond à cette tangente, c'est ce qu'on trouvera par les formules qui ont servi à trouver tang φ par le moyen de φ.

L'angle $\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$ étant connu et réduit en parties du rayon, on fera $\Phi = \frac{1}{16}\varphi^{\circ\circ\circ\circ}$, et on aura la fonction cherchée $F\varphi = K\Phi$. L'application de la même formule, répétée quatre fois consécutives, suffira donc pour obtenir vingt décimales exactes; on en obtiendrait le double avec un terme de plus, mais alors il faudrait calculer aussi, avec quarante décimales, les logarithmes des modules et ceux des différentes tangentes, ce qui serait un travail presque insurmontable.

839. La même méthode peut être suivie, quand même l'angle du module s'éléverait jusqu'à 70 ou 75 degrés; mais, passé cette limite, il est préférable de suivre la méthode des modules croissans.

Ayant donc calculé les termes de l'échelle des modules d'où se déduisent les fonctions complètes E^1c, F^1c, on procédera au calcul des amplitudes décroissantes φ', φ'', etc., de la manière suivante :

Il faudra d'abord tirer la valeur de tang φ' de l'équation......... tang $\varphi = \frac{(1+b')\tang\varphi'}{1-b'\tang^2\varphi'}$, laquelle donne

$$\cot\varphi' = \frac{1+b'}{2}\cot\varphi + \sqrt{\left[\left(\frac{1+b'}{2}\right)^2\cot^2\varphi + b'\right]};$$

et comme on a $1+b' = \frac{2\sqrt{b'}}{b} = \frac{c'}{\sqrt{c}}$, la valeur de tang φ' pourra être mise sous cette forme

$$\tang\varphi' = \frac{\sqrt{c}}{c'}\cdot\frac{2\tang\varphi}{1+\sqrt{(1+b^2\tang^2\varphi)}}.$$

Mais, lorsque b sera très petit, on pourra substituer à cette formule la suite fort convergente,

$$\mathcal{L}\,\text{tang}\,\varphi' = \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{c}}{c'}\,\text{tang}\,\varphi\right) - \frac{m}{4}\left(b^2\,\text{tang}^2\varphi - \tfrac{3}{4}.\frac{b^4\,\text{tang}^4\varphi}{2} + \frac{3.5}{4.6}.\frac{b^6\,\text{tang}^6\varphi}{3} - \text{etc.}\right).$$

On déduira semblablement tang φ'' de tang φ', tang φ''' de tang φ'', etc.; d'ailleurs on voit que la suite $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, etc., va toujours en diminuant jusqu'à une limite qu'elle ne tarde pas à atteindre sensiblement.

Appelant donc Φ le dernier terme de la suite $\varphi, \varphi', \varphi''$, etc., on aura en logarithmes hyperboliques $F\varphi = K \log \text{tang}(45° + \frac{1}{2}\Phi)$, ou en logarithmes vulgaires

$$F\varphi = KM \log \text{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\Phi) = KM \log [(\text{tang}\,\Phi + \sqrt{(1 + \text{tang}^2\Phi)})]$$

840. Pour avoir dans le même cas la valeur de la fonction $E\varphi$, il faut recourir aux formules de l'art. 763 qui peuvent donner tel degré d'approximation qu'on voudra. Si on se borne à 20 décimales, le quarré de b'''' sera toujours négligeable, même en supposant l'angle du module peu au-dessus de 45°; on pourra donc supposer $c''''=1$, et faisant $P = \frac{4}{r'r''r'''^2} - \frac{2}{r'} - 1$, on aura $E\varphi = L'F\varphi + Pc \sin \varphi$. Dans beaucoup de cas, on pourra faire $c''' = 1$, alors on aurait simplement $P = \frac{2}{r'r''^2} - 1$. Quant aux valeurs de $\cos \omega', \cos \omega'', \cos \omega'''$, par lesquelles on a $r' = c' \cos \omega'$, $r'' = c'' \cos \omega''$, $r''' = c''' \cos \omega'''$, elles se calculeront sans connaître la valeur en degrés des angles ω, par les formules $\text{tang}\,\omega' = b'\,\text{tang}\,\varphi'$, $\text{tang}\,\omega'' = b''\,\text{tang}\,\varphi''$, $\text{tang}\,\omega''' = b'''\,\text{tang}\,\varphi'''$; ainsi on aura directement

$$r' = \frac{c'}{\sqrt{(1 + b'^2\,\text{tang}^2\varphi')}}, \quad r'' = \frac{c''}{\sqrt{(1 + b''^2\,\text{tang}^2\varphi'')}}, \quad r''' = \frac{c'''}{\sqrt{(1 + b'''^2\,\text{tang}^2\varphi''')}}.$$

841. Si on renonce au calcul par logarithmes qui devient très pénible, lorsqu'on leur donne plus de quatorze décimales, on pourra néanmoins, par le calcul ordinaire, parvenir à tel degré d'exactitude qu'on voudra dans la détermination des fonctions F et E. Mais il y a un choix de formules à faire, pour parvenir, avec le moins de travail possible, à un degré d'approximation déterminé.

S'il est question d'abord de calculer les fonctions complètes F^1c, E^1c, on pourra recourir aux séries de l'art. 48, lesquelles peuvent donner un degré d'exactitude indéfini. Mais ces séries ne sont bonnes à employer que lorsque le module ne surpasse pas sin 15°, ou lorsqu'il est plus grand que sin 75°; dans tous les autres cas, ces séries sont trop peu convergentes, et on parviendra plus facilement aux résultats cherchés par le calcul des différens termes de l'échelle des modules. Ce calcul pourra toujours se faire par les opérations ordinaires de l'Arithmétique.

841. En effet étant donnée la valeur numérique du module c, on en déduira d'abord son complément $b=\sqrt{(1-c^2)}$; on aura ensuite les deux termes c°, b°, par les formules $c^{\circ}=\frac{1-b}{1+b}$, $b^{\circ}=\frac{2\sqrt{b}}{1+b}$, les deux termes $c^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ}$, par les formules $c^{\circ\circ}=\frac{1-b^{\circ}}{1+b^{\circ}}$, $b^{\circ\circ}=\frac{2\sqrt{b^{\circ}}}{1+b^{\circ}}$, et ainsi de suite. Lorsqu'on sera parvenu à un c très petit, le suivant désigné par c°, et son complément b°, se calculeront plus facilement par les suites convergentes

$$c^{\circ}=\tfrac{1}{4}c^2+\frac{1.3}{4.6}c^4+\frac{1.3.5}{4.6.8}c^6+\text{etc.}$$

$$\begin{aligned} b^{\circ} &= 1-\frac{7c^4}{64}\left(1+\frac{11}{16}c^2+\frac{11.15}{16.20}c^4+\frac{11.15.19}{16.20.24}c^6+\text{etc.}\right),\\ &\quad+\frac{5c^4}{64}\left(1+\frac{9}{16}c^2+\frac{9.13}{16.20}c^4+\frac{9.13.17}{16.20.24}c^6+\text{etc.}\right); \end{aligned}$$

la dernière résulte du développement de la formule................
$b^{\circ}=\frac{2\sqrt{b}}{1+b}=\frac{2}{c^2}(1-c^2)^{\frac{1}{4}}-\frac{2}{c^2}(1-c^2)^{\frac{3}{4}}$.

Il faudra prolonger le calcul des modules c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., jusqu'à un terme dont le quarré soit négligeable; soit ce terme $c^{(n)}$, la série des complémens sera de même terminée à $b^{(n)}$, ou plutôt à $b^{(n-1)}$, car dans ce cas, on pourrait supposer $b^{(n)}=1$.

Cela posé, la fonction complète F^1c se calculera assez facilement par la formule

$$F^1c=\frac{\pi}{2}(1+c^{\circ})\,(1+c^{\circ\circ})\,(1+c^{\circ\circ\circ})\ldots\ldots(1+c^{(n)});$$

quant à la fonction complète E^1c, elle ne paraît pas pouvoir être calculée plus simplement que par la formule

$$E^1c=F^1c\left(1-\frac{c^2}{2}-\frac{c^2c^{\circ}}{4}-\frac{c^2c^{\circ}c^{\circ\circ}}{8}-\frac{c^2c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{16}-\text{etc.}\right);$$

on obtiendra de cette manière tel degré d'exactitude qu'on voudra, par le calcul de deux séries composées du moindre nombre de termes possible.

842. Supposons maintenant qu'on veuille déterminer les fonctions $F\varphi$, $E\varphi$ qui répondent à une amplitude donnée; il faudra d'abord déduire φ° de φ au moyen de la formule

$$\cot\varphi^\circ = \tfrac{1}{2}(\cot\varphi - \text{tang}\,\varphi) + \tfrac{1}{2}c^\circ(\cot\varphi + \text{tang}\,\varphi),$$

dont le calcul est assez facile, pourvu qu'on connaisse à la fois cot φ et tang φ; il faudra par la même raison déduire tang φ° de cot φ°, et on calculera semblablement l'angle $\varphi^{\circ\circ}$ par la formule

$$\cot\varphi^{\circ\circ} = \tfrac{1}{2}(\cot\varphi^\circ - \text{tang}\,\varphi^\circ) + \tfrac{1}{2}c^{\circ\circ}(\cot\varphi^\circ + \text{tang}\,\varphi^\circ).$$

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne au terme $\varphi^{(n)}$ de même rang que $c^{(n)}$, et dans chacun de ces calculs, on aura soin de noter, comme il a été dit art. 838, la valeur approchée de l'arc dont on a calculé la cotangente. Connaissant donc le nombre total de degrés contenus dans le dernier terme $\varphi^{(n)}$, la valeur exacte de cet arc pourra être déduite de sa tangente connue avec toute la précision nécessaire. Réduisant ensuite cet arc en parties du rayon, et faisant $\Phi = \frac{\varphi^{(n)}}{2^n}$, on aura $F\varphi = K\Phi$.

Il reste à calculer $E\varphi$, ce qu'on fera par l'équation $E\varphi = LF\varphi + Pc\sin\varphi$, dans laquelle on a

$$L = 1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2c^\circ}{4} - \frac{c^2c^\circ c^{\circ\circ}}{8} - \text{etc.},$$

$$P = \frac{c}{2}\cos\omega + \frac{cc^\circ}{4}\cos\omega\cos\omega^\circ + \frac{cc^\circ c^{\circ\circ}}{8}\cos\omega\cos\omega^\circ\cos\omega^{\circ\circ} + \text{etc.};$$

d'ailleurs les angles ω, ω°, $\omega^{\circ\circ}$, etc., se déduisent des angles φ, φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, etc., par les formules $\text{tang}\,\omega = b\,\text{tang}\,\varphi$, $\text{tang}\,\omega^\circ = b^\circ\,\text{tang}\,\varphi^\circ$, $\text{tang}\,\omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ}\,\text{tang}\,\varphi^{\circ\circ}$, etc.; et comme on connaît tang φ, tang φ°, etc., on aura immédiatement

$$c\cos\omega = \frac{c}{\sqrt{(1 + b^2\,\text{tang}^2\varphi)}},\quad c^\circ\cos\omega^\circ = \frac{c^\circ}{\sqrt{(1 + b^{\circ 2}\,\text{tang}^2\varphi^\circ)}},\ \text{etc.}$$

Cette méthode, que nous employons ordinairement depuis $c = 0$ jusqu'à sin 45°, peut être étendue beaucoup plus loin, jusqu'à $c = \sin 81°$, parce que dans cette dernière limite les séries n'ont qu'un terme de plus que pour la limite $c = \sin 45°$. Mais depuis $c = \sin 81°$, jusqu'à $c = 1$, la seconde méthode mérite la préférence, à raison du moindre nombre de termes dont les séries sont composées, et le calcul devra être fait comme il suit.

843. On formera d'abord la série des modules croissans c, c', c'', ... et celle de leurs complémens b, b', b''.... par les mêmes formules que dans l'art. 841, ayant soin seulement d'échanger entr'elles les lettres b et c,

ainsi que les signes ° et ′. La suite b, b', b''... étant donc prolongée jusqu'à un terme $b^{(n)}$ dont le quarré soit négligeable, relativement au degré d'approximation qu'on a en vue, on aura en logarithmes hyperboliques $F^1c = \frac{K}{2^n} \log \frac{4}{b^{(n)}}$, ou en logarithmes vulgaires, $F^1c = \frac{KM}{2^n} \log \frac{4}{b^{(n)}}$, d'ailleurs le coefficient K a pour valeur

$$K = (1 + b')\ (1 + b'')\ (1 + b''') \ldots\ldots (1 + b^{(n)});$$

on calculera en même temps la fonction E^1c par les formules

$$E^1c = L'F^1c + \frac{1}{K},$$
$$L' = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{b'}{2} + \frac{b'b''}{4} + \frac{b'b''b'''}{8} + \text{etc.}\right).$$

Dans cette méthode, il reste à calculer le logarithme de $\frac{4}{b^{(n)}}$, avec le degré de précision requis.

Si ensuite il s'agit de calculer les fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, qui répondent à une amplitude donnée, on suivra les formules ordinaires, lesquelles ne sont guère susceptibles d'être simplifiées, si ce n'est la formule principale qu'il convient de mettre sous la forme

$$\cot \varphi' = \frac{1 + b'}{2} \cot \varphi + \sqrt{\left[\left(\frac{1 + b'}{2}\right)^2 \cot^2 \varphi + b'\right]};$$

elle servira à déduire $\cot \varphi'$ de $\cot \varphi$; on déduira de même $\cot \varphi''$ de $\cot \varphi'$, et ainsi de suite.

844. En terminant ces recherches, nous croyons devoir faire observer que par la simple méthode de bissection qui n'exige que des extractions de racine quarrée, on peut calculer jusqu'à tel nombre de décimales qu'on voudra, les fonctions F et E correspondantes à des valeurs données du module et de l'amplitude.

Remarquons d'abord que pour la bissection des simples arcs de cercle, on a les formules

$$\sin \tfrac{1}{2} \varphi = \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \varphi)} - \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \varphi)},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} \varphi = \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \varphi)} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \varphi)};$$

ainsi le sinus et le cosinus de l'arc $\frac{1}{2}\varphi$ se déduisent à la fois de la valeur donnée de $\sin \varphi$. Partant donc d'un sinus connu tel que $\sin 45°$, $\sin 30°$, ou en général $\sin \alpha$, on peut, par des bissections continuelles, parvenir au sinus d'un arc très petit arc ω, qui sera sensiblement égal à l'arc ; et de cet arc ou de ce sinus, on déduira la valeur de l'arc proposé $\alpha = 2^n\omega$, n étant le nombre des bissections.

On procédera d'une manière semblable pour déterminer par des bissections continuelles, la fonction $F\alpha$ dont l'amplitude est donnée. Soit en général $F\varphi$ un terme quelconque de la bissection et $F\varphi'$ le terme suivant, en sorte qu'on ait $F\varphi' = \frac{1}{2}F\varphi$, on déduira φ' de φ par la formule

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)}}:$$

or on peut mettre $\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi)}$ sous la forme $\frac{1}{2}\sqrt{(1+c\sin\varphi)}\ldots + \frac{1}{2}\sqrt{(1-c\sin\varphi)}$; ainsi on aura en général, pour déduire φ' de φ, la formule très simple

$$\sin\varphi' = \frac{\sqrt{(1+\sin\varphi)}-\sqrt{(1-\sin\varphi)}}{\sqrt{(1+c\sin\varphi)}+\sqrt{(1-c\sin\varphi)}}.$$

Cette formule servira à continuer aussi loin qu'on voudra la suite des bissections ; lorsqu'on sera parvenu à une valeur très petite de $\sin\varphi$, celle du terme suivant $\sin\varphi'$ se trouvera plus facilement par la formule

$$\sin\varphi' = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(1+\frac{1.3}{4.6}c^2\sin^2\varphi+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}c^4\sin^4\varphi+\frac{1.3\ldots 11}{4.6\ldots 14}c^6\sin^6\varphi+\text{etc.}\right);$$

on aurait en même temps

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\left(1+\frac{1.3}{4.6}\sin^2\varphi+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}\sin^4\varphi+\frac{1.3\ldots 11}{4.6\ldots 14}\sin^6\varphi+\text{etc.}\right);$$

enfin si l'on fait les calculs par logarithmes, on préférera les formules suivantes dont la loi n'est pas moins simple,

$$l\sin\varphi' = l\sin\tfrac{1}{2}\varphi+\frac{mc^2\sin^2\varphi}{8}\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{c^2\sin^2\varphi}{2}+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{c^4\sin^4\varphi}{3}+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{c^6\sin^6\varphi}{4}+\text{etc.}\right),$$

$$l\sin\tfrac{1}{2}\varphi = l\left(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\right)+\frac{m\sin^2\varphi}{8}\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{\sin^4\varphi}{3}+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{\sin^6\varphi}{4}+\text{etc.}\right).$$

Supposons qu'après un nombre n de bissections, on parvienne à un arc très petit ω qui sera la dernière des valeurs de φ ; alors en supposant seulement ω^7 négligeable, on aura avec une exactitude suffisante

$$F\omega = \omega+\frac{c^2}{6}\omega^3-\frac{c^2}{120}(4-9c^2)\omega^5,$$

$$E\omega = \omega-\frac{c^3}{6}\omega^3+\frac{c^2}{120}(4-3c^2)\omega^5;$$

connaissant $F\omega$, on en déduira immédiatement $F\alpha = 2^nF\omega$, n étant le nombre des bissections. Quant à la valeur de Eα, elle se déduira de toutes les équations de la forme $E\varphi = 2E\varphi' - c^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi'$, et on aura en général $E\alpha = 2^n E\omega - c^2 Z$, Z étant la somme des n termes $\sin^2 \varphi \sin \varphi' + 2 \sin^2 \varphi' \sin \varphi'' + 4 \sin^2 \varphi'' \sin \varphi''' +$ etc., formés avec toutes les valeurs de φ, en partant de la première α jusqu'à la dernière ω.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette méthode, parce que malgré sa simplicité apparente et l'élégance des formules, la longueur des calculs qu'elle exige, la rendrait presqu'impraticable, dans les cas où l'on voudrait obtenir une très grande approximation.

TABLE I,

CONTENANT

LES LOGARITHMES DES FONCTIONS COMPLÈTES $F^{\prime}c$, $E^{\prime}c$,

Calculés pour tous les angles du module de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 90°, avec 14 décimales pour les 15 premiers et les 15 derniers degrés du quadrant, et 12 décimales pour tous les autres angles de 15 à 75 degrés.

On y a joint les différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes de ces Logarithmes, terminés uniformément à 12 décimales.

L'angle du module qui sert d'argument est désigné par θ.

TABLE I.

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
0°0	0.196 119 877 030.15	330 734	661 468	0	0.196 119 877 030.15	330 734	661 470	4
0.1	0.196 119 546 296.02	992 202	661 468	3	0.196 120 207 764.42	992 204	661 474	6
0.2	0.196 118 554 093.84	1 653 670	661 465	0	0.196 121 199 968.48	1 653 678	661 480	8
0.3	0.196 116 900 424.39	2 315 135	661 465	3	0.196 122 853 646.11	2 315 158	661 488	12
0.4	0.196 114 585 288.93	2 976 600	661 462	3	0.196 125 168 803.61	2 976 646	661 500	14
0.5	0.196 111 608 689.19	3 638 062	661 459	3	0.196 128 145 449.79	3 638 146	661 514	16
0.6	0.196 107 970 627.54	4 299 521	661 456	4	0.196 131 783 595.98	4 299 660	661 530	20
0.7	0.196 103 671 106.64	4 960 977	661 452	4	0.196 136 083 256.04	4 961 190	661 550	20
0.8	0.196 098 710 129.83	5 622 429	661 448	5	0.196 141 044 446.35	5 622 740	661 570	24
0.9	0.196 093 087 700.84	6 283 877	661 443	5	0.196 146 667 185.80	6 284 310	661 594	28
1.0	0.196 086 803 823.97	6 945 320	661 438	7	0.196 152 951 495.81	6 945 904	661 622	27
1.1	0.196 079 858 503.87	7 606 758	661 431	4	0.196 159 897 400.35	7 607 526	661 649	33
1.2	0.196 072 251 746.30	8 268 189	661 427	9	0.196 167 504 925.74	8 269 275	661 682	33
1.3	0.196 063 983 556.62	8 929 616	661 418	6	0.196 175 774 101.10	8 930 857	661 715	37
1.4	0.196 055 053 941.25	9 591 034	661 412	9	0.196 184 704 957.89	9 592 572	661 752	40
1.5	0.196 045 462 907.07	10 252 446	661 403	7	0.196 194 297 530.11	10 254 324	661 792	40
1.6	0.196 035 210 461.31	10 913 849	661 396	10	0.196 204 551 854.35	10 916 116	661 832	44
1.7	0.196 024 296 611.89	11 575 245	661 386	8	0.196 215 467 969.65	11 577 948	661 876	48
1.8	0.196 012 721 367.12	12 236 631	661 378	12	0.196 227 045 917.60	12 239 824	661 924	48
1.9	0.196 000 484 735.83	12 898 009	661 366	8	0.196 239 285 742.35	12 901 748	661 972	53
2.0	0.195 987 586 727.42	13 559 375	661 358	13	0.196 252 187 490.54	13 563 720	662 025	54
2.1	0.195 974 027 351.73	14 220 733	661 345	10	0.196 265 751 211.33	14 225 745	662 079	56
2.2	0.195 959 806 619.19	14 882 078	661 335	12	0.196 279 976 956.47	14 887 824	662 135	60
2.3	0.195 944 924 540.65	15 543 413	661 323	13	0.196 294 864 780.17	15 549 959	662 195	61
2.4	0.195 929 381 127.52	16 204 736	661 310	13	0.196 310 414 739.20	16 212 154	662 256	65
2.5	0.195 913 176 391.74	16 866 046	661 297	13	0.196 326 626 892.86	16 874 410	662 321	67
2.6	0.195 896 310 345.75	17 527 343	661 284	15	0.196 343 501 303.00	17 536 731	662 388	69
2.7	0.195 878 783 002.50	18 188 627	661 269	13	0.196 361 038 033.99	18 199 119	662 457	72
2.8	0.195 860 594 375.47	18 849 896	661 256	15	0.196 379 237 152.72	18 861 576	662 529	75
2.9	0.195 841 744 478.65	19 511 152	661 241	17	0.196 398 098 728.66	19 524 105	662 604	76
3.0	0.195 822 233 326.59	20 172 393	661 224	15	0.196 417 622 833.76	20 186 709	662 680	81
3.1	0.195 802 060 934.20	20 833 617	661 209	18	0.196 437 809 542.58	20 849 389	662 761	82
3.2	0.195 781 227 317.18	21 494 826	661 191	15	0.196 458 658 932.16	21 512 150	662 843	83
3.3	0.195 759 732 491.48	22 156 017	661 176	19	0.196 480 171 082.15	22 174 993	662 926	90
3.4	0.195 737 576 473.79	22 817 193	661 157	18	0.196 502 346 074.66	22 837 919	663 016	87
3.5	0.195 714 759 281.23	23 478 350	661 139	19	0.196 525 183 994.43	23 500 935	663 103	94
3.6	0.195 691 280 931.40	24 139 489	661 120	19	0.196 548 684 928.69	24 164 038	663 197	95
3.7	0.195 667 141 442.50	24 800 609	661 101	19	0.196 572 848 967.25	24 827 235	663 292	97
3.8	0.195 642 340 833.30	25 461 710	661 082	22	0.196 597 676 202.46	25 490 527	663 389	100
3.9	0.195 616 879 122.95	26 122 792	661 060	19	0.196 623 166 729.25	26 153 916	663 489	103
4.0	0.195 590 756 331.28	26 783 852	661 041	22	0.196 649 320 645.08	26 817 405	663 592	104
4.1	0.195 563 972 478.62	27 444 893	661 019	22	0.196 676 138 049.96	27 480 997	663 696	109
4.2	0.195 536 527 585.73	28 105 912	660 997	23	0.196 703 619 046.50	28 144 693	663 805	109
4.3	0.195 508 421 674.06	28 766 909	660 974	23	0.196 731 763 739.84	28 808 498	663 914	115
4.4	0.195 479 654 765.50	29 427 883	660 951	23	0.196 760 572 237.68	29 472 412	664 029	113
4.5	0.195 450 226 882.48	30 088 834	660 928	24	0.196 790 044 650.35	30 136 441	664 142	119
4.6	0.195 420 138 048.15	30 749 762	660 904	25	0.196 820 181 090.64	30 800 583	664 261	122
4.7	0.195 389 388 285.96	31 410 666	660 879	25	0.196 850 981 674.00	31 464 844	664 383	120
4.8	0.195 357 977 619.94	32 071 545	660 854	26	0.196 882 446 518.46	32 129 227	664 503	129
4.9	0.195 325 906 074.82	32 732 399	660 828	26	0.196 914 575 744.55	32 793 730	664 632	126
5.0	0.195 293 173 675.78	33 393 227	660 802	27	0.196 947 369 475.26	33 458 362	664 758	132

Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
0.195 293 173 675.78	33 393 227	660 802	27	0.196 947 369 475.26	33 458 362	664 758	132
0.195 259 780 448.55	34 054 029	660 775	27	0.196 980 827 836.82	34 123 120	664 890	133
0.195 225 726 419.56	34 714 804	660 748	28	0.197 014 950 957.06	34 788 010	665 023	137
0.195 191 011 615.52	35 375 552	660 720	30	0.197 049 738 967.06	35 453 033	665 160	138
0.195 155 636 063.67	36 036 272	660 690	27	0.197 085 192 000.40	36 118 193	665 298	141
0.195 119 599 792.43	36 696 962	660 663	32	0.197 121 310 193.01	36 783 491	665 439	144
0.195 082 902 829.80	37 357 625	660 631	28	0.197 158 093 683.74	37 448 930	665 583	147
0.195 045 545 205.38	38 018 256	660 603	31	0.197 195 542 613.73	38 114 513	665 730	149
0.195 007 526 948.53	38 678 859	660 572	33	0.197 233 657 126.96	38 780 243	665 879	151
0.194 968 848 089.62	39 339 431	660 539	31	0.197 272 437 369.88	39 446 122	666 030	155
0.194 929 508 659.37	39 999 970	660 508	33	0.197 311 883 491.58	40 112 152	666 185	157
0.194 889 508 689.40	40 660 478	660 475	32	0.197 351 995 643.79	40 778 337	666 342	159
0.194 848 848 211.39	41 320 953	660 443	35	0.197 392 773 980.85	41 444 679	666 501	163
0.194 807 527 257.95	41 981 396	660 408	33	0.197 434 218 659.68	42 111 180	666 664	164
0.194 765 545 862.25	42 641 804	660 375	36	0.197 476 329 839.83	42 777 844	666 828	167
0.194 722 904 057.95	43 302 179	660 339	36	0.197 519 107 683.50	43 444 672	666 995	172
0.194 679 601 879.40	43 962 518	660 303	34	0.197 562 552 355.51	44 111 667	667 167	171
0.194 635 639 361.46	44 622 821	660 269	38	0.197 606 664 023.26	44 778 834	667 338	176
0.194 591 016 539.58	45 283 090	660 231	37	0.197 651 442 856.88	45 446 172	667 514	178
0.194 545 733 449.71	45 943 321	660 194	38	0.197 696 889 029.11	46 113 686	667 692	181
0.194 499 790 128.70	46 603 515	660 156	38	0.197 743 002 715.22	46 781 378	667 873	182
0.194 453 186 613.79	47 263 671	660 118	40	0.197 789 784 093.26	47 449 251	668 055	188
0.194 405 922 942.78	47 923 789	660 078	39	0.197 837 233 343.87	48 117 306	668 243	186
0.194 357 999 154.26	48 583 867	660 039	41	0.197 885 350 650.34	48 785 549	668 429	194
0.194 309 415 287.11	49 243 906	659 998	40	0.197 934 136 198.68	49 453 978	668 623	192
0.194 260 171 381.16	49 903 904	659 958	42	0.197 983 590 177.48	50 122 601	668 815	198
0.194 210 267 476.70	50 563 862	659 916	41	0.198 033 712 778.02	50 791 416	669 013	198
0.194 159 703 614.66	51 223 778	659 875	45	0.198 084 504 194.25	51 460 429	669 211	203
0.194 108 479 836.52	51 883 653	659 830	43	0.198 135 964 622.85	52 129 640	669 414	204
0.194 056 596 184.47	52 543 483	659 787	43	0.198 188 094 263.08	52 799 054	669 618	208
0.194 004 052 701.49	53 203 270	659 744	44	0.198 240 893 316.89	53 468 672	669 826	209
0.193 950 849 430.81	53 863 014	659 700	48	0.198 294 361 989.02	54 138 498	670 035	214
0.193 896 986 416.53	54 522 714	659 652	44	0.198 348 500 486.81	54 808 533	670 249	215
0.193 842 463 703.39	55 182 366	659 608	46	0.198 403 309 020.33	55 478 782	670 464	218
0.193 787 281 336.76	55 841 974	659 562	50	0.198 458 787 802.27	56 149 246	670 682	221
0.193 731 439 362.58	56 501 536	659 512	46	0.198 514 937 048.15	56 819 928	670 903	224
0.193 674 937 827.48	57 161 048	659 466	48	0.198 571 756 976.14	57 490 831	671 127	225
0.193 617 776 778.87	57 820 514	659 418	51	0.198 629 247 807.05	58 161 958	671 352	230
0.193 559 956 264.56	58 479 932	659 367	49	0.198 687 409 764.55	58 833 310	671 582	232
0.193 501 476 333.01	59 139 299	659 318	50	0.198 746 243 074 98	59 504 892	671 814	235
0.193 442 337 033.72	59 798 617	659 268	53	0.198 805 747 967.31	60 176 706	672 049	235
0.193 382 538 416.62	60 457 885	659 215	50	0.198 865 924 673.35	60 848 755	672 284	243
0 193 322 080 532.26	61 117 100	659 165	54	0.198 926 773 427.60	61 521 039	672 527	240
0.193 260 963 431.80	61 776 265	659 111	53	0.198 988 294 467.35	62 193 566	672 767	247
0.193 199 187 167.27	62 435 376	659 058	54	0.199 050 488 032.59	62 866 333	673 014	249
0.193 136 751 791.27	63 094 434	659 004	54	0.199 113 354 366.09	63 539 347	673 263	249
0.193 073 657 357.24	63 753 438	658 950	57	0.199 176 893 713.33	64 212 610	673 512	255
0.193 009 903 919.11	64 412 388	658 893	55	0.199 241 106 322.58	64 886 122	673 767	257
0.192 945 491 531.47	65 071 281	658 838	56	0.199 305 992 444.96	65 559 889	674 024	258
0.192 880 420 249.87	65 730 119	658 782	59	0.199 371 552 334.20	66 233 913	674 282	264
0.192 814 690 130.52	66 388 901	658 723	57	0.199 437 786 246.87	66 908 195	674 546	264

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III
10° 0	0.192 814 690 130.52	66 388 901	658 723	57	0.199 437 786 246.87	66 908 195	674 546	264
10.1	0.192 748 301 230.05	67 047 624	658 666	60	0.199 504 694 442.43	67 582 741	674 810	267
10.2	0.192 681 253 605.85	67 706 290	658 606	60	0.199 572 277 183.09	68 257 551	675 077	272
10.3	0.192 613 547 316.27	68 364 896	658 546	58	0.199 640 534 733.75	68 932 628	675 349	273
10.4	0.192 545 182 420.29	69 023 442	658 488	64	0.199 709 467 362.18	69 607 977	675 622	275
10.5	0.192 476 158 977.59	69 681 930	658 424	60	0.199 779 075 338.98	70 283 599	675 897	281
10.6	0.192 406 477 048.46	70 340 354	658 364	64	0.199 849 358 937.54	70 959 496	676 178	280
10.7	0.192 336 136 694.11	70 998 718	658 300	62	0.199 920 318 434.08	71 635 674	676 458	286
10.8	0.192 265 137 976.43	71 657 018	658 238	65	0.199 991 954 107.60	72 312 132	676 744	287
10.9	0.192 193 480 958.04	72 315 256	658 173	64	0.200 064 266 239.94	72 988 876	677 031	291
11.0	0.192 121 165 702.08	72 973 429	658 109	67	0.200 137 255 115.91	73 665 907	677 322	292
11.1	0.192 048 192 272.99	73 631 538	658 042	65	0.200 210 921 022.96	74 343 229	677 614	297
11.2	0.191 974 560 735.41	74 289 580	657 977	68	0.200 285 264 251.52	75 020 843	677 911	299
11.3	0.191 900 271 154.98	74 947 557	657 909	67	0.200 360 285 094.87	75 698 754	678 210	302
11.4	0.191 825 323 598.12	75 605 466	657 842	70	0.200 435 983 849.07	76 376 964	678 512	304
11.5	0.191 749 718 131.92	76 263 308	657 772	69	0.200 512 360 813.16	77 055 476	678 816	309
11.6	0.191 673 454 824.38	76 921 080	657 703	70	0.200 589 416 289.00	77 734 292	679 125	309
11.7	0.191 596 533 744.18	77 578 783	657 633	71	0.200 667 150 581.29	78 413 417	679 434	314
11.8	0.191 518 954 960.80	78 236 416	657 562	72	0.200 745 563 997.70	79 092 851	679 748	316
11.9	0.191 440 718 544.69	78 893 978	657 490	72	0.200 824 656 848.71	79 772 599	680 064	321
12.0	0.191 361 824 566.65	79 551 468	657 418	75	0.200 904 429 447.80	80 452 663	680 385	320
12.1	0.191 282 273 098.54	80 208 886	657 343	73	0.200 984 882 111.37	81 133 048	680 705	326
12.2	0.191 202 064 213.03	80 866 229	657 270	76	0.201 066 015 158.67	81 813 753	681 031	328
12.3	0.191 121 197 983.88	81 523 499	657 194	76	0.201 147 828 911.77	82 494 784	681 359	331
12.4	0.191 039 674 485.29	82 180 693	657 118	76	0.201 230 323 695.83	83 176 143	681 690	334
12.5	0.190 957 493 792.36	82 837 811	657 042	78	0.201 313 499 838.93	83 857 833	682 024	337
12.6	0.190 874 655 980.97	83 494 853	656 964	79	0.201 397 357 672.04	84 539 857	682 361	340
12.7	0.190 791 161 128.05	84 151 817	656 885	78	0.201 481 897 529.12	85 222 218	682 701	342
12.8	0.190 707 009 311.07	84 808 702	656 807	81	0.201 567 119 747.11	85 904 919	683 043	347
12.9	0.190 622 200 608.55	85 465 509	656 726	81	0.201 653 024 665.87	86 587 962	683 390	348
13.0	0.190 536 735 099.87	86 122 235	656 645	82	0.201 739 612 628.24	87 271 352	683 738	352
13.1	0.190 450 612 865.02	86 778 880	656 563	83	0.201 826 883 980.09	87 955 090	684 090	356
13.2	0.190 363 833 985.17	87 435 443	656 480	83	0.201 914 839 070.22	88 639 180	684 446	356
13.3	0.190 276 398 542.28	88 091 923	656 397	85	0.202 003 478 250.43	89 323 626	684 802	361
13.4	0.190 188 306 619.14	88 748 320	656 312	85	0.202 092 801 875.58	90 008 428	685 163	365
13.5	0.190 099 558 299.07	89 404 632	656 227	87	0.202 182 810 303.55	90 693 591	685 528	36
13.6	0.190 010 153 666.89	90 060 859	656 140	86	0.202 273 503 895.16	91 379 119	685 895	36
13.7	0.189 920 092 807.90	90 716 999	656 054	89	0.202 364 883 014.36	92 065 014	686 264	37
13.8	0.189 829 375 808.54	91 373 053	655 965	89	0.202 456 948 028.02	92 751 278	686 638	37
13.9	0.189 738 002 755.87	92 029 018	655 876	90	0.202 549 699 306.18	93 437 916	687 013	38
14.0	0.189 645 973 738.18	92 684 894	655 786	91	0.202 643 137 221.85	94 124 929	687 393	38
14.1	0.189 553 288 844.38	93 340 680	655 695	92	0.202 737 262 151.14	94 812 322	687 775	38
14.2	0.189 459 948 164.42	93 996 375	655 603	92	0.202 832 074 473.25	95 500 097	688 161	38
14.3	0.189 365 951 789.31	94 651 978	655 511	94	0.202 927 574 570.41	96 188 258	688 548	39
14.4	0.189 271 299 810.82	95 307 489	655 417	94	0.203 023 762 827.94	96 876 806	688 941	39
14.5	0.189 175 992 321.62	95 962 906	655 323	97	0.203 120 639 634.36	97 565 747	689 335	39
14.6	0.189 080 029 415.60	96 618 229	655 226	96	0.203 218 205 381.15	98 255 082	689 733	40
14.7	0.188 983 411 187.28	97 273 455	655 130	98	0.203 316 460 463.02	98 944 815	690 133	40
14.8	0.188 886 137 732.31	97 928 585	655 032	100	0.203 415 405 277.75	99 634 948	690 539	40
14.9	0.188 788 209 147.27	98 583 617	654 932	98	0.203 515 040 226.25	100 325 487	690 944	41
15.0	0.188 689 625 529.78	99 238 552	654 834	101	0.203 615 365 712.62	101 016 431	691 356	41

8.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
15°0	0.188 689 625 530	99 238 552	654 834	101	0.203 615 365 713	101 016 431	691 356	413
15.1	0.188 590 386 978	99 893 386	654 733	100	0.203 716 382 144	101 707 787	691 769	417
15.2	0.188 490 493 592	100 548 119	654 633	103	0.203 818 089 931	102 399 556	692 186	419
15.3	0.188 389 945 473	101 202 752	654 530	104	0.203 920 489 487	103 091 742	692 605	424
15.4	0.188 288 742 721	101 857 282	654 426	105	0.204 023 581 229	103 784 347	693 029	427
15.5	0.188 186 885 439	102 511 708	654 321	106	0.204 127 365 576	104 477 376	693 456	428
15.6	0.188 084 373 731	103 166 029	654 217	107	0.204 231 842 952	105 170 832	693 884	433
15.7	0.187 981 207 702	103 820 246	654 110	109	0.204 337 013 784	105 864 716	694 317	437
15.8	0.187 877 387 456	104 474 356	654 001	107	0.204 442 878 500	106 559 033	694 754	438
15.9	0.187 772 913 100	105 128 357	653 894	112	0.204 549 437 533	107 253 787	695 192	444
16.0	0.187 667 784 743	105 782 251	653 782	109	0.204 656 691 320	107 948 979	695 636	445
16.1	0.187 562 002 492	106 436 033	653 673	113	0.204 764 640 299	108 644 615	696 081	449
16.2	0.187 455 566 459	107 089 706	653 560	113	0.204 873 284 914	109 340 696	696 530	453
16.3	0.187 348 476 753	107 743 266	653 447	113	0.204 982 625 610	110 037 226	696 983	455
16.4	0.187 240 733 487	108 396 713	653 334	116	0.205 092 662 836	110 734 209	697 438	459
16.5	0.187 132 336 774	109 050 047	653 218	116	0.205 203 397 045	111 431 647	697 897	463
16.6	0.187 023 286 727	109 703 265	653 102	119	0.205 314 828 692	112 129 544	698 360	464
16.7	0.186 913 583 462	110 356 367	652 983	116	0.205 426 958 236	112 827 904	698 824	471
16.8	0.186 803 227 095	111 009 350	652 867	122	0.205 539 786 140	113 526 728	699 295	471
16.9	0.186 692 217 745	111 662 217	652 745	119	0.205 653 312 868	114 226 023	699 766	477
17.0	0.186 580 555 528	112 314 962	652 626	123	0.205 767 538 891	114 925 789	700 243	478
17.1	0.186 468 240 566	112 967 588	652 503	122	0.205 882 464 680	115 626 032	700 721	483
17.2	0.186 355 272 978	113 620 091	652 381	126	0.205 998 090 712	116 326 753	701 204	485
17.3	0.186 241 652 887	114 272 472	652 255	124	0.206 114 417 465	117 027 957	701 689	491
17.4	0.186 127 380 415	114 924 727	652 131	128	0.206 231 445 422	117 729 646	702 180	491
17.5	0.186 012 455 688	115 576 858	652 003	127	0.206 349 175 068	118 431 826	702 671	497
17.6	0.185 896 878 830	116 228 861	651 876	128	0.206 467 606 894	119 134 497	703 168	499
17.7	0.185 780 649 969	116 880 737	651 748	132	0.206 586 741 391	119 837 665	703 667	503
17.8	0.185 663 769 232	117 532 485	651 616	129	0.206 706 579 056	120 541 332	704 170	507
17.9	0.185 546 236 747	118 184 101	651 487	134	0.206 827 120 388	121 245 502	704 677	511
18.0	0.185 428 052 646	118 835 588	651 353	137	0.206 948 365 890	121 950 179	705 188	512
18.1	0.185 309 217 058	119 486 941	651 216	134	0.207 070 316 069	122 655 367	705 700	517
18.2	0.185 189 730 117	120 138 157	651 082	133	0.207 192 971 436	123 361 067	706 217	522
18.3	0.185 069 591 960	120 789 239	650 949	139	0.207 316 332 503	124 067 284	706 739	523
18.4	0.184 948 802 721	121 440 188	650 810	140	0.207 440 399 787	124 774 023	707 262	527
18.5	0.184 827 362 533	122 090 998	650 670	139	0.207 565 173 810	125 481 285	707 789	533
18.6	0.184 705 271 535	122 741 668	650 531	143	0.207 690 655 095	126 189 074	708 322	533
18.7	0.184 582 529 867	123 392 199	650 388	141	0.207 816 844 169	126 897 396	708 855	539
18.8	0.184 459 137 668	124 042 587	650 247	145	0.207 943 741 565	127 606 251	709 394	542
18.9	0.184 335 095 081	124 692 834	650 102	146	0.208 071 347 816	128 315 645	709 936	546
19.0	0.184 210 402 247	125 342 936	649 956	146	0.208 199 663 461	129 025 581	710 482	548
19.1	0.184 085 059 311	125 992 892	649 810	148	0.208 328 689 042	129 736 063	711 030	553
19.2	0.183 959 066 419	126 642 702	649 662	151	0.208 458 425 105	130 447 093	711 583	557
19.3	0.183 832 423 717	127 292 364	649 513	152	0.208 588 872 198	131 158 676	712 140	560
19.4	0.183 705 131 353	127 941 877	649 361	151	0.208 720 030 874	131 870 816	712 700	564
19.5	0.183 577 189 476	128 591 238	649 210	154	0.208 851 901 690	132 583 516	713 264	567
19.6	0.183 448 598 238	129 240 448	649 056	154	0.208 984 485 206	133 296 780	713 831	572
19.7	0.183 319 357 790	129 889 504	648 902	158	0.209 117 781 986	134 010 611	714 403	574
.8	0.183 189 468 286	130 538 406	648 744	156	0.209 251 792 597	134 725 014	714 977	579
.9	0.183 058 929 880	131 187 150	648 588	161	0.209 386 517 611	135 439 991	715 556	583
.0	0.182 927 742 730	131 835 738	648 427	159	0.209 521 957 602	136 155 547	716 139	585

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
20°0	0.182 927 742 730	131 835 738	648 427	159	0.209 521 957 602	136 155 547	716 139	585
20.1	0.182 795 906 992	132 484 165	648 268	162	0.209 658 113 149	136 871 686	716 724	590
20.2	0.182 663 422 827	133 132 433	648 106	164	0.209 794 984 835	137 588 410	717 314	595
20.3	0.182 530 290 394	133 780 539	647 942	165	0.209 932 573 245	138 305 724	717 909	596
20.4	0.182 396 509 855	134 428 481	647 777	166	0.210 070 878 969	139 023 633	718 505	603
20.5	0.182 262 081 374	135 076 258	647 611	167	0.210 209 902 602	139 742 138	719 108	604
20.6	0.182 127 005 116	135 723 869	647 444	170	0.210 349 644 740	140 461 246	719 712	609
20.7	0.181 991 281 247	136 371 313	647 274	171	0.210 490 105 986	141 180 958	720 321	614
20.8	0.181 854 909 934	137 018 587	647 103	172	0.210 631 286 944	141 901 279	720 935	616
20.9	0.181 717 891 347	137 665 690	646 931	174	0.210 773 188 223	142 622 214	721 551	620
21.0	0.181 580 225 657	138 312 621	646 757	175	0.210 915 810 437	143 343 765	722 171	626
21.1	0.181 441 913 036	138 959 378	646 582	178	0.211 059 154 202	144 065 936	722 797	627
21.2	0.181 302 953 658	139 605 960	646 404	177	0.211 203 220 138	144 788 733	723 424	634
21.3	0.181 163 347 698	140 252 364	646 227	181	0.211 348 008 871	145 512 157	724 058	635
21.4	0.181 023 095 334	140 898 591	646 046	181	0.211 493 521 028	146 236 215	724 693	642
21.5	0.180 882 196 743	141 544 637	645 865	184	0.211 639 757 243	146 960 908	725 335	644
21.6	0.180 740 652 106	142 190 502	645 681	184	0.211 786 718 151	147 686 243	725 979	648
21.7	0.180 598 461 604	142 836 183	645 497	186	0.211 934 404 394	148 412 222	726 627	652
21.8	0.180 455 625 421	143 481 680	645 311	189	0.212 082 816 616	149 138 849	727 279	657
21.9	0.180 312 143 741	144 126 991	645 122	189	0.212 231 955 465	149 866 128	727 936	661
22.0	0.180 168 016 750	144 772 113	644 933	188	0.212 381 821 593	150 594 064	728 597	665
22.1	0.180 023 244 637	145 417 046	644 741	193	0.212 532 415 657	151 322 661	729 262	668
22.2	0.179 877 827 591	146 061 787	644 548	194	0.212 683 738 318	152 051 923	729 930	672
22.3	0.179 731 765 804	146 706 335	644 354	197	0.212 835 790 241	152 781 853	730 602	678
22.4	0.179 585 059 460	147 350 689	644 157	197	0.212 988 572 094	153 512 455	731 280	682
22.5	0.179 437 708 780	147 994 846	643 960	201	0.213 142 084 549	154 243 735	731 962	684
22.6	0.179 289 713 934	148 638 806	643 759	201	0.213 296 328 284	154 975 697	732 646	689
22.7	0.179 141 075 128	149 282 565	643 558	202	0.213 451 303 981	155 708 343	733 335	693
22.8	0.178 991 792 563	149 926 123	643 356	204	0.213 607 012 324	156 441 678	734 030	697
22.9	0.178 841 866 440	150 569 479	643 152	210	0.213 763 454 002	157 175 708	734 724	703
23.0	0.178 691 296 961	151 212 631	642 942	209	0.213 920 629 710	157 910 435	735 430	706
23.1	0.178 540 084 330	151 855 573	642 733	209	0.214 078 540 145	158 645 865	736 136	711
23.2	0.178 388 228 757	152 498 306	642 524	213	0.214 237 186 010	159 382 001	736 847	714
23.3	0.178 235 730 451	153 140 830	642 311	213	0.214 396 568 011	160 118 848	737 561	720
23.4	0.178 082 589 621	153 783 141	642 098	214	0.214 556 686 859	160 856 409	738 281	724
23.5	0.177 928 806 480	154 425 239	641 884	216	0.214 717 543 268	161 594 690	739 005	727
23.6	0.177 774 381 241	155 067 123	641 668	221	0.214 879 137 958	162 333 695	739 732	733
23.7	0.177 619 314 118	155 708 791	641 447	222	0.215 041 471 653	163 073 427	740 465	736
23.8	0.177 463 605 327	156 350 238	641 225	225	0.215 204 545 080	163 813 892	741 201	742
23.9	0.177 307 255 089	156 991 463	641 000	224	0.215 368 358 972	164 555 093	741 943	745
24.0	0.177 150 263 626	157 632 463	640 776	227	0.215 532 914 065	165 297 036	742 688	751
24.1	0.176 992 631 163	158 273 239	640 549	227	0.215 698 211 101	166 039 724	743 439	753
24.2	0.176 834 357 924	158 913 788	640 322	233	0.215 864 250 825	166 783 163	744 192	760
24.3	0.176 675 444 136	159 554 110	640 089	232	0.216 031 033 988	167 527 355	744 952	763
24.4	0.176 515 890 026	160 194 199	639 857	234	0.216 198 561 343	168 272 307	745 715	768
24.5	0.176 355 695 827	160 834 056	639 623	237	0.216 366 833 650	169 018 022	746 483	773
24.6	0.176 194 861 771	161 473 679	639 386	240	0.216 535 851 672	169 764 505	747 256	777
24.7	0.176 033 388 092	162 113 065	639 146	239	0.216 705 616 177	170 511 761	748 033	782
24.8	0.175 871 275 027	162 752 211	638 907	243	0.216 876 127 938	171 259 794	748 815	786
24.9	0.175 708 522 816	163 391 118	638 664	246	0.217 047 287 732	172 008 609	749 601	790
25.0	0.175 545 131 698	164 029 782	638 418	245	0.217 219 396 341	172 758 210	750 391	798

	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
25°.0	0.175 545 131 698	164 029 782	638 418	245	0.217 219 396 341	172 758 210	750 391	798
25.1	0.175 381 101 916	164 668 200	638 173	250	0.217 392 154 551	173 508 601	751 189	799
25.2	0.175 216 433 716	165 306 373	637 923	251	0.217 565 663 152	174 259 790	751 988	804
25.3	0.175 051 127 343	165 944 296	637 672	252	0.217 739 922 942	175 011 778	752 792	811
25.4	0.174 885 183 047	166 581 968	637 420	256	0.217 914 934 720	175 764 570	753 603	815
25.5	0.174 718 601 079	167 219 388	637 164	258	0.218 090 699 290	176 518 173	754 418	819
25.6	0.174 551 381 691	167 856 552	636 906	258	0.218 267 217 463	177 272 591	755 237	823
25.7	0.174 383 525 139	168 493 458	636 648	262	0.218 444 490 054	178 027 828	756 060	829
25.8	0.174 215 031 681	169 130 106	636 386	264	0.218 622 517 882	178 783 888	756 889	835
25.9	0.174 045 901 575	169 766 492	636 122	266	0.218 801 301 770	179 540 777	757 724	838
26.0	0.173 876 135 083	170 402 614	635 856	268	0.218 980 842 547	180 298 501	758 562	843
26.1	0.173 705 732 469	171 038 470	635 588	270	0.219 161 141 048	181 057 063	759 405	849
26.2	0.173 534 693 999	171 674 058	635 318	273	0.219 342 198 111	181 816 468	760 254	853
26.3	0.173 363 019 941	172 309 376	635 045	274	0.219 524 014 579	182 576 722	761 107	859
26.4	0.173 190 710 565	172 944 421	634 771	279	0.219 706 591 301	183 337 829	761 966	862
26.5	0.173 017 766 144	173 579 192	634 492	278	0.219 889 929 130	184 099 795	762 828	869
26.6	0.172 844 186 952	174 213 684	634 214	283	0.220 074 028 925	184 862 623	763 697	873
26.7	0.172 669 973 268	174 847 898	633 931	282	0.220 258 891 548	185 626 320	764 570	879
26.8	0.172 495 125 370	175 481 829	633 649	288	0.220 444 517 868	186 390 890	765 449	882
26.9	0.172 319 643 541	176 115 478	633 361	288	0.220 630 908 758	187 156 339	766 331	891
27.0	0.172 143 528 063	176 748 839	633 073	291	0.220 818 065 097	187 922 670	767 222	892
27.1	0.171 966 779 224	177 381 912	632 782	294	0.221 005 987 767	188 689 892	768 114	899
27.2	0.171 789 397 312	178 014 694	632 488	295	0.221 194 677 659	189 458 006	769 013	904
27.3	0.171 611 382 618	178 647 182	632 193	299	0.221 384 135 665	190 227 019	769 917	910
27.4	0.171 432 735 436	179 279 375	631 894	301	0.221 574 362 684	190 996 936	770 827	914
27.5	0.171 253 456 061	179 911 269	631 593	302	0.221 765 359 620	191 767 763	771 741	919
27.6	0.171 073 544 792	180 542 862	631 291	307	0.221 957 127 383	192 539 504	772 660	925
27.7	0.170 893 001 930	181 174 153	630 984	308	0.222 149 666 887	193 312 164	773 585	931
27.8	0.170 711 827 777	181 805 137	630 676	310	0.222 342 979 051	194 085 749	774 516	937
27.9	0.170 530 022 640	182 435 813	630 366	314	0.222 537 064 800	194 860 265	775 453	939
28.0	0.170 347 586 827	183 066 179	630 052	315	0.222 731 925 065	195 635 718	776 392	947
28.1	0.170 164 520 648	183 696 231	629 737	318	0.222 927 560 783	196 412 110	777 339	952
28.2	0.169 980 824 417	184 325 968	629 419	322	0.223 123 972 893	197 189 449	778 291	957
28.3	0.169 796 498 449	184 955 387	629 097	323	0.223 321 162 342	197 967 740	779 248	964
28.4	0.169 611 543 062	185 584 484	628 774	326	0.223 519 130 082	198 746 988	780 212	968
28.5	0.169 425 958 578	186 213 258	628 448	329	0.223 717 877 070	199 527 200	781 180	974
28.6	0.169 239 745 320	186 841 706	628 119	331	0.223 917 404 270	200 308 380	782 154	978
28.7	0.169 052 903 614	187 469 825	627 788	332	0.224 117 712 650	201 090 534	783 132	987
28.8	0.168 865 433 789	188 097 613	627 454	337	0.224 318 803 184	201 873 666	784 119	989
28.9	0.168 677 336 176	188 725 067	627 117	340	0.224 520 676 850	202 657 785	785 108	998
29.0	0.168 488 611 109	189 352 184	626 777	342	0.224 723 334 635	203 442 893	786 106	1001
29.1	0.168 299 258 925	189 978 961	626 435	345	0.224 926 777 528	204 228 999	787 107	1008
29.2	0.168 109 279 964	190 605 396	626 090	347	0.225 131 006 527	205 016 106	788 115	1013
29.3	0.167 918 674 568	191 231 486	625 743	351	0.225 336 022 633	205 804 221	789 128	1020
29.4	0.167 727 443 082	191 857 229	625 392	354	0.225 541 826 854	206 593 349	790 148	1025
29.5	0.167 535 585 853	192 482 621	625 038	356	0.225 748 420 203	207 383 497	791 173	1032
29.6	0.167 343 103 232	193 107 659	624 682	359	0.225 955 803 700	208 174 670	792 205	1035
29.7	0.167 149 995 573	193 732 341	624 323	361	0.226 163 978 370	208 966 875	793 240	1043
.8	0.166 956 263 232	194 356 664	623 962	366	0.226 372 945 245	209 760 115	794 283	1050
.9	0.166 761 906 568	194 980 626	623 596	367	0.226 582 705 360	210 554 398	795 333	1054
.0	0.166 566 925 942	195 604 222	623 229	372	0.226 793 259 758	211 349 731	796 387	1060

θ.	Log. E¹.	Diff. I.	II.	III.	Log. F¹.	Diff. I.	II.	II
30°0	0.166 566 925 942	195 604 222	623 229	372	0.226 793 259 758	211 349 731	796 387	1
30.1	0.166 371 321 720	196 227 451	622 857	372	0.227 004 609 489	212 146 118	797 447	1
30.2	0.166 175 094 269	196 850 308	622 485	377	0.227 216 755 607	212 943 565	798 515	1
30.3	0.165 978 243 961	197 472 793	622 108	380	0.227 429 699 172	213 742 080	799 587	1
30.4	0.165 780 771 168	198 094 901	621 728	383	0.227 643 441 252	214 541 667	800 666	1
30.5	0.165 582 676 267	198 716 629	621 345	385	0.227 857 982 919	215 342 333	801 751	1
30.6	0.165 383 959 638	199 337 974	620 960	389	0.228 073 325 252	216 144 084	802 843	1
30.7	0.165 184 621 664	199 958 934	620 571	392	0.228 289 469 336	216 946 927	803 939	11
30.8	0.164 984 662 730	200 579 505	620 179	395	0.228 506 416 263	217 750 866	805 043	11
30.9	0.164 784 083 225	201 199 684	619 784	397	8.228 724 167 129	218 555 909	806 153	11
31.0	0.164 582 883 541	201 819 468	619 387	403	0.228 942 723 038	219 362 062	807 271	11
31.1	0.164 381 064 073	202 438 855	618 984	404	0.229 162 085 100	220 169 333	808 392	11
31.2	0.164 178 625 218	203 057 839	618 580	406	0.229 382 254 433	220 977 725	809 521	11
31.3	0.163 975 567 379	203 676 419	618 174	412	0.229 603 232 158	221 787 246	810 657	11
31.4	0.163 771 890 960	204 294 593	617 762	415	0.229 825 019 404	222 597 903	811 799	11
31.5	0.163 567 596 367	204 912 355	617 347	417	0.230 047 617 307	223 409 702	812 946	11
31.6	0.163 362 684 012	205 529 702	616 930	419	0.230 271 027 009	224 222 648	814 103	11
31.7	0.163 157 154 310	206 146 632	616 511	425	0.230 495 249 657	225 036 751	815 263	11
31.8	0.162 951 007 678	206 763 143	616 086	427	0.230 720 286 408	225 852 014	816 431	11
31.9	0.162 744 244 535	207 379 229	615 659	432	0.230 946 138 422	226 668 445	817 605	11
32.0	0.162 536 865 306	207 994 888	615 227	433	0.231 172 806 867	227 486 050	818 789	11
32.1	0.162 328 870 418	208 610 115	614 794	437	0.231 400 292 917	228 304 839	819 977	11
32.2	0.162 120 260 303	209 224 909	614 357	442	0.231 628 597 756	229 124 816	821 170	12
32.3	0.161 911 035 394	209 839 266	613 915	443	0.231 857 722 572	229 945 986	822 373	12
32.4	0.161 701 196 128	210 453 181	613 472	449	0.232 087 668 558	230 768 359	823 581	12
32.5	0.161 490 742 947	211 066 653	613 023	451	0.232 318 436 917	231 591 940	824 796	12
32.6	0.161 279 676 294	211 679 676	612 572	455	0.232 550 028 857	232 416 736	826 019	12
32.7	0.161 067 996 618	212 292 248	612 117	457	0.232 782 445 593	233 242 755	827 248	12
32.8	0.160 855 704 370	212 904 365	611 660	463	0.233 015 688 348	234 070 003	828 484	12
32.9	0.160 642 800 005	213 516 025	611 197	467	0.233 249 758 351	234 898 487	829 728	12
33.0	0.160 429 283 980	214 127 222	610 730	467	0.233 484 656 838	235 728 215	830 980	12
33.1	0.160 215 156 758	214 737 952	610 263	474	0.233 720 385 053	236 559 195	832 235	12
33.2	0.160 000 418 806	215 348 215	609 789	477	0.233 956 944 248	237 391 430	833 501	12
33.3	0.159 785 070 591	215 958 004	609 312	479	0.234 194 335 678	238 224 931	834 773	12
33.4	0.159 569 112 587	216 567 316	608 833	485	0.234 432 560 609	239 059 704	836 052	12
33.5	0.159 352 545 271	217 176 149	608 348	488	0.234 671 620 313	239 895 756	837 339	12
33.6	0.159 135 369 122	217 784 497	607 860	491	0.234 911 516 069	240 733 095	838 633	13
33.7	0.158 917 584 625	218 392 357	607 369	496	0.235 152 249 164	241 571 728	839 934	13
33.8	0.158 699 192 268	218 999 726	606 873	498	0.235 393 820 892	242 411 662	841 242	13
33.9	0.158 480 192 542	219 606 599	606 375	505	0.235 636 232 554	243 252 904	842 559	13
34.0	0.158 260 585 943	220 212 974	605 870	505	0.235 879 485 458	244 095 463	843 883	13
34.1	0.158 040 372 969	220 818 844	605 365	512	0.236 123 580 921	244 939 346	845 215	13
34.2	0.157 819 554 125	221 424 209	604 853	514	0.236 368 520 267	245 784 561	846 552	13
34.3	0.157 598 129 916	222 029 062	604 339	520	0.236 614 304 828	246 631 113	847 900	13
34.4	0.157 376 108 854	222 633 401	603 819	522	0.236 860 935 941	247 479 013	849 254	13
34.5	0.157 153 467 453	223 237 220	603 297	528	0.237 108 414 954	248 328 267	850 617	13
34.6	0.156 930 230 233	223 840 517	602 769	530	0.237 356 743 221	249 178 884	851 985	13
34.7	0.156 706 389 716	224 443 286	602 239	535	0.237 605 922 105	250 030 869	853 365	13
34.8	0.156 481 946 430	225 045 525	601 704	539	0.237 855 952 974	250 884 234	854 749	[illegible]
34.9	0.156 256 900 905	225 647 229	601 165	545	0.238 106 837 208	251 738 983	856 144	[illegible]
35.0	0.156 031 253 676	226 248 394	600 620	546	0.238 358 576 191	252 595 127	857 545	1

	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
35.0	0.156 031 253 676	226 248 394	600 620	546	0.238 358 576 191	252 595 127	857 545	1410
35.1	0.155 805 005 282	226 849 014	600 074	552	0.238 611 171 318	253 452 672	858 955	1417
35.2	0.155 578 156 268	227 449 088	599 522	556	0.238 864 623 990	254 311 627	860 372	1427
35.3	0.155 350 707 180	228 048 610	598 966	561	0.239 118 935 617	255 171 999	861 799	1434
35.4	0.155 122 658 570	228 647 576	598 405	563	0.239 374 107 616	256 033 798	863 233	1443
35.5	0.154 894 010 994	229 245 981	597 842	569	0.239 630 141 414	256 897 031	864 676	1450
35.6	0.154 664 765 013	229 843 823	597 273	575	0.239 887 038 445	257 761 707	866 126	1460
35.7	0.154 434 921 190	230 441 096	596 698	575	0.240 144 800 152	258 627 833	867 586	1467
35.8	0.154 204 480 094	231 037 794	596 123	584	0.240 403 427 985	259 495 419	869 053	1476
35.9	0.153 973 442 300	231 633 917	595 539	586	0.240 662 923 404	260 364 472	870 529	1486
36.0	0.153 741 808 383	232 229 456	594 953	591	0.240 923 287 876	261 235 001	872 015	1492
36.1	0.153 509 578 927	232 824 409	594 362	595	0.241 184 522 877	262 107 016	873 507	1501
36.2	0.153 276 754 718	233 418 771	593 767	601	0.241 446 629 893	262 980 523	875 008	1512
36.3	0.153 043 335 747	234 012 538	593 166	604	0.241 709 610 416	263 855 531	876 520	1519
36.4	0.152 809 323 209	234 605 704	592 562	609	0.241 973 465 947	264 732 051	878 039	1529
36.5	0.152 574 717 505	235 198 266	591 953	614	0.242 238 197 998	265 610 090	879 568	1536
36.6	0.152 339 519 239	235 790 219	591 339	618	0.242 503 808 088	266 489 658	881 104	1547
36.7	0.152 103 729 020	236 381 558	590 721	624	0.242 770 297 746	267 370 762	882 651	1554
36.8	0.151 867 347 462	236 972 279	590 097	627	0.243 037 668 508	268 253 413	884 205	1564
36.9	0.151 630 375 183	237 562 376	589 470	634	0.243 305 921 921	269 137 618	885 769	1574
37.0	0.151 392 812 807	238 181 846	588 836	637	0.243 575 059 539	270 023 387	887 343	1583
37.1	0.151 154 660 961	238 740 682	588 199	642	0.243 845 082 927	270 910 730	888 926	1589
37.2	0.150 915 920 279	239 328 881	587 557	648	0.244 115 993 657	271 799 656	890 515	1603
37.3	0.150 676 591 398	239 916 438	586 909	651	0.244 387 793 313	272 690 171	892 118	1609
37.4	0.150 436 674 960	240 503 347	586 258	659	0.244 660 483 484	273 582 289	893 727	1622
37.5	0.150 196 171 613	241 089 605	585 599	660	0.244 934 065 773	274 476 016	895 349	1627
37.6	0.149 955 082 008	241 675 204	584 939	667	0.245 208 541 789	275 371 365	896 976	1638
37.7	0.149 713 406 804	242 260 143	584 272	673	0.245 483 913 154	276 268 341	898 614	1650
37.8	0.149 471 146 661	242 844 415	583 599	677	0.245 760 181 495	277 166 955	900 264	1657
37.9	0.149 228 302 246	243 428 014	582 922	683	0.246 037 348 450	278 067 219	901 921	1669
38.0	0.148 984 874 232	244 010 936	582 239	687	0.246 315 415 669	278 969 140	903 590	1677
38.1	0.148 740 863 296	244 593 175	581 552	692	0.246 594 384 809	279 872 730	905 267	1686
38.2	0.148 496 270 121	245 174 727	580 860	699	0.246 874 257 539	280 777 997	906 953	1699
38.3	0.148 251 095 394	245 755 587	580 161	702	0.247 155 035 536	281 684 950	908 652	1707
38.4	0.148 005 339 807	246 335 748	579 459	710	0.247 436 720 486	282 593 602	910 359	1717
38.5	0.147 759 004 059	246 915 207	578 749	712	0.247 719 314 088	283 503 961	912 076	1728
38.6	0.147 512 088 852	247 493 956	578 037	719	0.248 002 818 049	284 416 037	913 804	1738
38.7	0.147 264 594 896	248 071 993	577 318	726	0.248 287 234 086	285 329 841	915 542	1747
38.8	0.147 016 522 903	248 649 311	576 592	729	0.248 572 563 927	286 245 383	917 289	1759
38.9	0.146 767 873 592	249 225 903	575 863	736	0.248 858 809 310	287 162 672	918 048	1771
39.0	0.146 518 647 689	249 801 766	575 127	740	0.249 145 971 982	288 081 720	920 819	1778
39.1	0.146 268 845 923	250 376 893	574 387	748	0.249 434 053 702	289 002 539	922 597	1789
39.2	0.146 018 469 030	250 951 280	573 639	750	0.249 723 056 241	289 925 136	924 386	1801
39.3	0.145 767 517 750	251 524 919	572 889	759	0.250 012 981 377	290 849 522	926 187	1813
39.4	0.145 515 992 831	252 097 808	572 130	765	0.250 303 830 899	291 775 709	928 000	1821
39.5	0.145 263 895 023	252 669 938	571 365	767	0.250 595 606 608	292 703 709	929 821	1833
39.6	0.145 011 225 085	253 241 303	570 598	775	0.250 888 310 317	293 633 530	931 654	1843
39.7	0.144 757 983 782	253 811 901	569 823	781	0.251 181 943 847	294 565 184	933 497	1855
.8	0.144 504 171 881	254 381 724	569 042	787	0.251 476 509 031	295 498 683	935 352	1868
.9	0.144 249 790 157	254 950 766	568 255	792	0.251 772 007 714	296 434 035	937 220	1879
.0	0.143 994 839 391	255 519 021	567 463	798	0.252 068 441 749	297 371 255	939 099	1886

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.
40° 0	0.143 994 839 391	255 519 021	567 463	798	0.252 068 441 749	297 371 255	939 0
40.1	0.143 739 320 370	256 086 484	566 665	805	0.252 365 813 004	298 310 354	940 9
40.2	0.143 483 233 886	256 653 149	565 860	809	0.252 664 123 358	299 251 339	942 8
40.3	0.143 226 580 737	257 219 009	565 051	817	0.252 963 374 697	300 194 225	944 7
40.4	0.142 969 361 728	257 784 060	564 234	823	0.253 263 568 922	301 139 023	946 7
40.5	0.142 711 577 668	258 348 294	563 411	828	0.253 564 707 945	302 085 744	948 6
40.6	0.142 453 229 374	258 911 705	562 583	834	0.253 866 793 689	303 034 399	950 6
40.7	0.142 194 317 669	259 474 288	561 749	841	0.254 169 828 088	303 985 002	952 5
40.8	0.141 934 843 381	260 036 037	560 908	847	0.254 473 813 090	304 937 561	954 5
40.9	0.141 674 807 344	260 596 945	560 061	855	0.254 778 750 651	305 892 091	956 5
41.0	0.141 414 210 399	261 157 006	559 206	858	0 255 084 642 742	306 848 603	958 5
41.1	0.141 153 053 393	261 716 212	558 348	867	0.255 391 491 345	307 807 110	960 5
41.2	0.140 891 337 181	262 274 560	557 481	872	0.255 699 298 455	308 767 622	962 5
41.3	0.140 629 062 621	262 832 041	556 609	879	0.256 008 066 077	309 730 152	964 5
41.4	0.140 366 230 580	263 388 650	555 730	886	0.256 317 796 229	310 694 713	966 6
41.5	0.140 102 841 930	263 944 380	554 844	890	0.256 628 490 942	311 661 318	968 6
41.6	0.139 838 897 550	264 499 224	553 954	901	0.256 940 152 260	312 629 978	970 7
41.7	0.139 574 398 326	265 053 178	553 053	904	0.257 252 782 238	313 600 706	972 8
41.8	0.139 309 345 148	265 606 231	552 149	912	0.257 566 382 944	314 573 515	974 9
41.9	0.139 043 738 917	266 158 380	551 237	920	0.257 880 956 459	315 548 417	977 0
42.0	0.138 777 580 537	266 709 617	550 317	924	0.258 196 504 876	316 525 426	979 1
42.1	0.138 510 870 920	267 259 934	549 393	934	0.258 513 030 302	317 504 555	981 2
42.2	0.138 243 610 986	267 809 327	548 459	937	0.258 830 534 857	318 485 817	983 4
42.3	0.137 975 801 659	268 357 786	547 522	948	0.259 149 020 674	319 469 223	985 5
42.4	0.137 707 443 873	268 905 308	546 574	952	0 259 468 489 897	320 454 789	987 7
42.5	0.137 438 538 565	269 451 882	545 622	962	0.259 788 944 686	321 442 527	989 9
42.6	0.137 169 086 683	269 997 504	544 660	964	0.260 110 387 213	322 432 452	992 1
42.7	0.136 899 089 179	270 542 164	543 696	977	0 260 432 819 665	323 424 575	994 3
42.8	0.136 628 547 015	271 085 860	542 719	980	0.260 756 244 240	324 418 911	996 5
42.9	0.136 357 461 155	271 628 579	541 739	990	0.261 080 663 151	325 415 473	998 8
43.0	0.136 085 832 576	272 170 318	540 749	995	0.261 406 078 624	326 414 277	1001 0
43.1	0.135 813 662 258	272 711 067	539 754	1004	0.261 732 492 901	327 415 337	1003 3
43.2	0.135 540 951 191	273 250 821	538 750	1009	0.262 059 908 238	328 418 665	1005 6
43.3	0.135 267 700 370	273 789 571	537 741	1019	0.262 388 326 903	329 424 275	1007 9
43.4	0.134 993 910 799	274 327 312	536 722	1027	0.262 717 751 178	330 432 182	1010 2
43.5	0.134 719 583 487	274 864 034	535 695	1031	0.263 048 183 360	331 442 402	1012 5
43.6	0.134 444 719 453	275 399 729	534 664	1042	0.263 379 625 762	332 454 949	1014 8
43.7	0.134 169 319 724	275 934 393	533 622	1047	0.263 712 080 711	333 469 836	1017 2
43.8	0.133 893 385 331	276 468 015	532 575	1056	0.264 045 550 547	334 487 078	1019 6
43.9	0.133 616 917 316	277 000 590	531 519	1065	0.264 380 037 625	335 506 691	1022 0
44.0	0.133 339 916 726	277 532 109	530 454	1071	0.264 715 544 316	336 528 691	1024 4
44.1	0.133 062 384 617	278 062 563	529 383	1077	0.265 052 073 007	337 553 091	1026 8
44.2	0.132 784 322 054	278 591 946	528 306	1090	0.265 389 626 098	338 579 907	1029 2
44.3	0.132 505 730 108	279 120 252	527 216	1094	0.265 728 206 005	339 609 154	1031 6
44.4	0.132 226 609 856	279 647 468	526 122	1103	0.266 067 815 159	340 640 848	1034 1
44.5	0.131 946 962 388	280 173 590	525 019	1111	0.266 408 456 007	341 675 005	1036 63
44.6	0.131 666 788 798	280 698 609	523 908	1120	0.266 750 131 012	342 711 641	1039 13
44.7	0.131 386 090 189	281 222 517	522 788	1126	0.267 092 842 653	343 750 772	1041 63
44.8	0.131 104 867 672	281 745 305	521 662	1137	0.267 436 593 425	344 792 411	1044 16
44.9	0.130 823 122 367	282 266 967	520 525	1143	0.267 781 385 836	345 836 576	1046 71
45.0	0.130 540 855 400	282 787 492	519 382	1153	0.268 127 222 412	346 883 286	1049 26

ε.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
45°.0	0.130 540 855 400	282 787 492	519 382	1153	0.268 127 222 412	346 883 286	1049 267	2576
45.1	0.130 258 067 908	283 306 874	518 229	1160	0.268 474 105 698	347 932 553	1051 843	2592
45.2	0.129 974 761 034	283 825 103	517 069	1169	0.268 822 038 251	348 984 396	1054 435	2609
45.3	0.129 690 935 931	284 342 172	515 900	1177	0.269 171 022 647	350 038 831	1057 044	2626
45.4	0.129 406 593 759	284 858 072	514 723	1188	0.269 521 061 478	351 095 875	1059 670	2643
45.5	0.129 121 735 687	285 372 795	513 535	1193	0.269 872 157 353	352 155 545	1062 313	2660
45.6	0.128 836 362 892	285 886 330	512 342	1204	0.270 224 312 898	353 217 858	1064 973	2679
45.7	0.128 550 476 562	286 398 472	511 138	1212	0.270 577 530 756	354 282 831	1067 652	2693
45.8	0.128 264 077 890	286 909 810	509 926	1220	0.270 931 813 587	355 350 483	1070 345	2714
45.9	0.127 977 168 080	287 419 736	508 706	1232	0.271 287 164 070	356 420 828	1073 059	2730
46.0	0.127 689 748 344	287 928 442	507 474	1238	0.271 643 584 898	357 493 887	1075 789	2749
46.1	0.127 401 819 902	288 435 916	506 236	1247	0.272 001 078 785	358 569 676	1078 538	2765
46.2	0.127 113 383 986	288 942 152	504 989	1256	0.272 359 648 461	359 648 214	1081 303	2787
46.3	0.126 824 441 834	289 447 141	503 733	1267	0.272 719 296 675	360 729 517	1084 090	2802
46.4	0.126 534 994 693	289 950 874	502 466	1276	0.273 080 026 192	361 813 607	1086 892	2821
46.5	0.126 245 043 819	290 453 340	501 190	1282	0.273 441 839 799	362 900 499	1089 713	2843
46.6	0.125 954 590 479	290 954 530	499 908	1294	0.273 804 740 298	363 990 212	1092 556	2857
46.7	0.125 663 635 949	291 454 438	498 614	1304	0.274 168 730 510	365 082 768	1095 413	2879
46.8	0.125 372 181 511	291 953 052	497 310	1312	0.274 533 813 278	366 178 181	1098 292	2898
46.9	0.125 080 228 459	292 450 362	495 998	1321	0.274 899 991 459	367 276 473	1101 190	2917
47.0	0.124 787 778 097	292 946 360	494 677	1332	0.275 267 267 932	368 377 663	1104 107	2936
47.1	0.124 494 831 737	293 441 037	493 345	1341	0.275 635 645 595	369 481 770	1107 043	2956
47.2	0.124 201 390 700	293 934 382	492 004	1350	0.276 005 127 365	370 588 813	1109 999	2977
47.3	0.123 907 456 318	294 426 386	490 654	1361	0.276 375 716 178	371 698 812	1112 976	2995
47.4	0.123 613 029 932	294 917 040	489 293	1370	0.276 747 414 990	372 811 788	1115 971	3018
47.5	0.123 318 112 892	295 406 333	487 923	1381	0.277 120 226 778	373 927 759	1118 989	3036
47.6	0.123 022 706 559	295 894 256	486 542	1388	0.277 494 154 537	375 046 748	1122 025	3057
47.7	0.122 726 812 313	296 380 798	485 154	1401	0.277 869 201 285	376 168 773	1125 082	3078
47.8	0.122 430 431 505	296 865 952	483 753	1410	0.278 245 370 058	377 293 855	1128 160	3099
47.9	0.122 133 565 553	297 349 705	482 343	1421	0.278 622 663 913	378 422 015	1131 259	3121
48.0	0.121 836 215 848	297 832 048	480 922	1429	0.279 001 085 928	379 553 274	1134 380	3140
48.1	0.121 538 383 800	298 312 970	479 493	1442	0.279 380 639 202	380 687 654	1137 520	3164
48.2	0.121 240 070 830	298 792 463	478 051	1450	0.279 761 326 856	381 825 174	1140 684	3185
48.3	0.120 941 278 367	299 270 514	476 601	1462	0.280 143 152 030	382 965 858	1143 869	3206
48.4	0.120 642 007 853	299 747 115	475 139	1473	0.280 526 117 888	384 109 727	1147 075	3227
48.5	0.120 342 260 738	300 222 254	473 666	1482	0.280 910 227 615	385 256 802	1150 302	3252
48.6	0.120 042 038 484	300 695 920	472 184	1493	0.281 295 484 417	386 407 104	1153 554	3273
48.7	0 119 741 342 564	301 168 104	470 691	1503	0.281 681 891 521	387 560 658	1156 827	3296
48.8	0.119 440 174 460	301 638 795	469 188	1516	0.282 069 452 179	388 717 485	1160 123	3319
48.9	0.119 138 535 665	302 107 983	467 672	1527	0.282 458 169 664	389 877 608	1163 442	3343
49.0	0.118 836 427 682	302 575 655	466 145	1535	0.282 848 047 272	391 041 050	1166 785	3365
49.1	0.118 533 852 027	303 041 800	464 610	1548	0.283 239 088 322	392 207 835	1170 150	3388
49.2	0.118 230 810 227	303 506 410	463 062	1558	0.283 631 296 157	393 377 985	1173 538	3412
49.3	0.117 927 303 817	303 969 472	461 504	1570	0.284 024 674 142	394 551 523	1176 950	3431
49.4	0.117 623 334 345	304 430 976	459 934	1583	0.284 419 225 665	395 728 473	1180 387	3461
49.5	0.117 318 903 369	304 890 910	458 351	1590	0.284 814 954 138	396 908 860	1183 848	3485
49.6	0.117 014 012 459	305 349 261	456 761	1605	0.285 211 862 998	398 092 708	1187 333	3508
.7	0.116 708 663 198	305 806 022	455 156	1615	0.285 609 955 706	399 280 041	1190 841	3536
.8	0.116 402 857 176	306 261 178	453 541	1627	0.286 009 235 747	400 470 882	1194 377	3559
.9	0.116 096 595 998	306 714 719	451 914	1638	0.286 409 706 629	401 665 259	1197 936	3584
.0	0.115 789 881 279	307 166 633	450 276	1651	0.286 811 371 888	402 863 195	1201 520	3610

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
50° 0	0.115 789 881 279	307 166 633	450 276	1651	0.286 811 371 888	402 863 195	1201 520	3610
50.1	0.115 482 714 646	307 616 909	448 625	1662	0.287 214 235 083	404 064 715	1205 130	3637
50.2	0.115 175 097 737	308 065 534	446 963	1673	0.287 618 299 798	405 269 845	1208 767	3662
50.3	0.114 867 032 203	308 512 497	445 290	1686	0.288 023 569 643	406 478 612	1212 429	3688
50.4	0.114 558 519 706	308 957 787	443 604	1699	0.288 430 048 255	407 691 041	1216 117	3714
50.5	0.114 249 561 919	309 401 391	441 905	1709	0.288 837 739 296	408 907 158	1219 831	3743
50.6	0.113 940 160 528	309 845 296	440 196	1723	0.289 246 646 454	410 126 989	1223 574	3769
50.7	0.113 630 317 232	310 283 492	438 473	1733	0.289 656 773 443	411 350 563	1227 343	3794
50.8	0.113 320 033 740	310 721 965	436 740	1748	0.290 068 124 006	412 577 906	1231 137	3824
50.9	0.113 009 311 775	311 158 705	434 992	1759	0.290 480 701 912	413 809 043	1234 961	3851
51.0	0.112 698 153 070	311 593 697	433 233	1772	0.290 894 510 955	415 044 004	1238 812	3880
51.1	0.112 386 559 373	312 026 930	431 461	1784	0.291 309 554 959	416 282 816	1242 692	3907
51.2	0.112 074 532 443	312 458 391	429 677	1798	0.291 725 837 775	417 525 508	1246 599	3936
51.3	0.111 762 074 052	312 888 068	427 879	1809	0.292 143 363 283	418 772 107	1250 535	3965
51.4	0.111 449 185 984	313 315 947	426 070	1823	0.292 562 135 390	420 022 642	1254 500	3994
51.5	0.111 135 870 037	313 742 017	424 247	1837	0.292 982 158 032	421 277 142	1258 494	4023
51.6	0.110 822 128 020	314 166 264	422 410	1847	0.293 403 435 174	422 535 636	1262 517	4055
51.7	0.110 507 961 756	314 588 674	420 563	1863	0.293 825 970 810	423 798 153	1266 572	4082
51.8	0.110 193 373 082	315 009 237	418 700	1876	0.294 249 768 963	425 064 725	1270 654	4114
51.9	0.109 878 363 845	315 427 937	416 824	1887	0.294 674 833 688	426 335 379	1274 768	4144
52.0	0.109 562 935 908	315 844 761	414 937	1903	0.295 101 169 067	427 610 147	1278 912	4175
52.1	0.109 247 091 147	316 259 698	413 034	1916	0.295 528 779 214	428 889 059	1283 087	4207
52.2	0.108 930 831 449	316 672 732	411 118	1928	0.295 957 668 273	430 172 146	1287 294	4238
52.3	0.108 614 158 717	317 083 850	409 190	1944	0.296 387 840 419	431 459 440	1291 532	4269
52.4	0.108 297 074 867	317 493 040	407 246	1956	0.296 819 299 859	432 750 972	1295 801	4302
52.5	0.107 979 581 827	317 900 286	405 290	1970	0.297 252 050 831	434 046 773	1300 103	4334
52.6	0.107 661 681 541	318 305 576	403 320	1985	0.297 686 097 604	435 346 876	1304 437	4368
52.7	0.107 343 375 965	318 708 896	401 335	1999	0.298 121 444 480	436 651 313	1308 805	4400
52.8	0.107 024 667 069	319 110 231	399 336	2013	0.298 558 095 793	437 960 118	1313 205	4434
52.9	0.106 705 556 838	319 509 567	397 323	2026	0.298 996 055 911	439 273 323	1317 639	4467
53.0	0.106 386 047 271	319 906 890	395 297	2041	0.299 435 329 234	440 590 962	1322 106	4501
53.1	0.106 066 140 381	320 302 187	393 256	2057	0.299 875 920 196	441 913 068	1326 607	4537
53.2	0.105 745 838 194	320 695 443	391 199	2071	0.300 317 833 264	443 239 675	1331 144	4572
53.3	0.105 425 142 751	321 086 642	389 128	2084	0.300 761 072 939	444 570 819	1335 716	4605
53.4	0.105 104 056 109	321 475 770	387 044	2100	0.301 205 643 758	445 906 535	1340 321	4642
53.5	0.104 782 580 339	321 862 814	384 944	2115	0.301 651 550 293	447 246 856	1344 963	4678
53.6	0.104 460 717 525	322 247 758	382 829	2130	0.302 098 797 149	448 591 819	1349 641	4715
53.7	0.104 138 469 767	322 630 587	380 699	2145	0.302 547 388 968	449 941 460	1354 356	4749
53.8	0.103 815 839 180	323 011 286	378 554	2159	0.302 997 330 428	451 295 816	1359 105	4788
53.9	0.103 492 827 894	323 389 840	376 395	2176	0.303 448 626 244	452 654 921	1363 893	4827
54.0	0.103 169 438 054	323 766 235	374 219	2190	0 303 901 281 165	454 018 814	1368 720	4862
54.1	0.102 845 671 819	324 140 454	372 029	2206	0.304 355 299 979	455 387 534	1373 582	4901
54.2	0.102 521 531 365	324 512 483	369 823	2223	0.304 810 687 513	456 761 116	1378 483	4940
54.3	0.102 197 018 882	324 882 306	367 600	2236	0.305 267 448 629	458 139 599	1383 423	4980
54.4	0.101 872 136 576	325 249 906	365 364	2255	0.305 725 588 228	459 523 022	1388 403	5017
54.5	0.101 546 886 670	325 615 270	363 109	2267	0.306 185 111 250	460 911 425	1393 420	5060
54.6	0.101 221 271 400	325 978 379	360 842	2287	0.306 646 022 675	462 304 845	1398 480	5097
54.7	0.100 895 293 021	326 339 221	358 555	2300	0.307 108 327 520	463 703 325	1403 577	5141
54.8	0.100 568 953 800	326 697 776	356 255	2319	0.307 572 030 845	465 106 902	1408 718	5181
54.9	0.100 242 256 024	327 054 031	353 936	2333	0.308 037 137 747	466 515 629	1413 898	5222
55.0	0.099 915 201 993	327 407 967	351 603	2351	0.308 503 653 367	467 929 518	1419 120	5264

Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
0.099 915 201 993	327 407 967	351 603	2351	0.308 503 653 367	467 929 518	1419 120	5264
0.099 587 794 026	327 759 570	349 252	2367	0.308 971 582 885	469 348 638	1424 384	5307
0.099 260 034 456	328 108 822	346 885	2383	0.309 440 931 523	470 773 022	1429 691	5351
0.098 931 925 634	328 455 707	344 502	2402	0.309 911 704 545	472 202 713	1435 042	5392
0.098 603 469 927	328 800 209	342 100	2416	0.310 383 907 258	473 637 755	1440 434	5437
0.098 274 669 718	329 142 309	339 684	2435	0.310 857 545 013	475 078 189	1455 871	5482
0.097 945 527 409	329 481 993	337 249	2451	0.311 332 623 202	476 524 060	1451 353	5526
0.097 616 045 416	329 819 242	334 798	2471	0.311 809 147 262	477 975 413	1456 879	5572
0.097 286 226 174	330 154 040	332 327	2486	0.312 287 122 675	479 432 292	1462 451	5618
0.096 956 072 134	330 486 367	329 841	2502	0.312 766 554 967	480 894 743	1468 069	5664
0.096 625 585 767	330 816 208	327 339	2523	0.313 247 449 710	482 362 812	1473 733	5710
0.096 294 769 559	331 143 547	324 816	2539	0.313 729 812 522	483 836 545	1479 443	5759
0.095 963 626 012	331 468 363	322 277	2557	0.314 213 649 067	485 315 988	1485 202	5807
0.095 632 157 649	331 790 640	319 720	2576	0.314 698 965 055	486 801 190	1491 009	5854
0.095 300 367 009	332 110 360	317 144	2594	0.315 185 766 245	488 292 199	1496 863	5904
0.094 968 256 649	332 427 504	314 550	2610	0.315 674 058 444	489 789 062	1502 767	5955
0.094 635 829 145	332 742 054	311 940	2631	0.316 163 847 506	491 291 829	1508 722	6002
0.094 303 087 091	333 053 994	309 309	2649	0.316 655 139 335	492 800 551	1514 724	6055
0.093 970 033 097	333 363 303	306 660	2667	0.317 147 939 886	494 315 275	1520 779	6106
0.093 636 669 794	333 669 963	303 993	2686	0.317 642 255 161	495 836 054	1526 885	6156
0.093 302 999 831	333 973 956	301 307	2704	0.318 138 091 215	497 362 939	1533 041	6212
0.092 969 025 875	334 275 263	298 603	2724	0.318 635 454 154	498 895 980	1539 253	6262
0.092 634 750 612	334 573 866	295 879	2744	0.319 134 350 134	500 435 233	1545 515	6317
0.092 300 176 746	334 869 745	293 135	2763	0.319 634 785 367	501 980 748	1551 832	6371
0.091 965 307 001	335 162 880	290 372	2780	0.320 136 766 115	503 532 580	1558 203	6427
0.091 630 144 121	335 453 252	287 592	2803	0.320 640 298 695	505 090 783	1564 630	6482
0.091 294 690 869	335 740 844	284 789	2820	0.321 145 389 478	506 655 413	1571 112	6538
0.090 958 950 025	336 025 633	281 969	2842	0.321 652 044 891	508 226 525	1577 650	6594
0.090 622 924 392	336 307 602	279 127	2861	0.322 160 271 416	509 804 175	1584 244	6653
0.090 286 616 790	336 586 729	276 266	2880	0.322 670 075 591	511 388 419	1590 897	6710
0.089 950 030 061	336 862 995	273 386	2902	0.323 181 464 010	512 979 316	1597 607	6770
0.089 613 167 066	337 136 381	270 484	2922	0.323 694 443 326	514 576 923	1604 377	6830
0.089 276 030 685	337 406 865	267 562	2942	0.324 209 020 249	516 181 300	1611 207	6890
0.088 938 623 820	337 674 427	264 620	2963	0.324 725 201 549	517 792 507	1618 097	6949
0.088 600 949 393	337 939 047	261 657	2984	0.325 242 994 056	519 410 604	1625 046	7014
0.088 263 010 346	338 200 704	258 673	3004	0.325 762 404 660	521 035 650	1632 060	7076
0.087 924 809 642	338 459 377	255 669	3027	0.326 283 440 310	522 667 710	1639 136	7137
0.087 586 350 265	338 715 046	252 642	3046	0.326 806 108 020	524 306 846	1646 273	7203
0.087 247 635 219	338 967 688	249 596	3070	0.327 330 414 866	525 953 119	1653 476	7268
0.086 908 667 531	339 217 284	246 526	3089	0.327 856 367 985	527 606 595	1660 744	7332
0.086 569 450 247	339 463 810	243 437	3112	0.328 383 974 580	529 267 339	1668 076	7400
0.086 229 986 437	339 707 247	240 325	3133	0.328 913 241 919	530 935 415	1675 476	7467
0.085 890 279 190	339 947 572	237 192	3158	0.329 444 177 334	532 610 891	1682 943	7535
0.085 550 331 618	340 184 764	234 034	3177	0.329 976 788 225	534 293 834	1690 478	7604
0.085 210 146 854	340 418 798	230 857	3199	0.330 511 082 059	535 984 312	1698 082	7673
0.084 869 728 056	340 649 655	227 658	3224	0.331 047 066 371	537 682 394	1705 755	7745
0.084 529 078 401	340 877 313	224 434	3244	0.331 584 748 765	539 388 149	1713 500	7816
0.084 188 201 088	341 101 747	221 190	3270	0.332 124 136 914	541 101 649	1721 316	7889
0.083 847 099 341	341 322 937	217 920	3291	0.332 665 238 563	542 822 965	1729 205	7960
0.083 505 776 404	341 540 857	214 629	3313	0.333 208 061 528	544 552 170	1737 165	8037
0.083 164 235 547	341 755 486	211 316	3337	0.333 752 613 698	546 289 336	1745 201	8113

θ.	Log. E′.	Diff. I.	II.	III.	Log. F′.	Diff. I.	II.	III.
60° 0	0.083 164 235 547	341 755 486	211 316	3337	0.333 752 613 698	546 289 336	1745 201	8 11
60.1	0.082 822 480 061	341 966 802	207 979	3363	0.334 298 903 034	548 034 537	1753 314	8 18
60.2	0.082 480 513 259	342 174 781	204 616	3384	0.334 846 937 571	549 787 851	1761 501	8 26
60.3	0.082 138 338 478	342 379 397	201 232	3408	0.335 396 725 422	551 549 352	1769 764	8 34
60.4	0.081 795 959 081	342 580 629	197 824	3433	0.335 948 274 774	553 319 116	1778 109	8 42
60.5	0.081 453 378 452	342 778 453	194 391	3456	0.336 501 593 890	555 097 225	1786 531	8 50
60.6	0.081 110 599 999	342 972 844	190 935	3481	0.337 056 691 115	556 883 756	1795 032	8 58
60.7	0.080 767 627 155	343 163 779	187 454	3504	0.337 613 574 871	558 678 788	1803 615	8 66
60.8	0.080 424 463 376	343 351 233	183 950	3531	0.338 172 253 659	560 482 403	1812 282	8 74
60.9	0.080 081 112 143	343 535 183	180 419	3556	0.338 732 736 062	562 294 685	1821 030	8 83
61.0	0.079 737 576 960	343 715 602	176 863	3578	0.339 295 030 747	564 115 715	1829 864	8 91
61.1	0.079 393 861 358	343 892 465	173 285	3604	0.339 859 146 462	565 945 579	1838 783	9 00
61.2	0.079 049 968 893	344 065 750	169 681	3632	0.340 425 092 041	567 784 362	1847 789	9 09
61.3	0.078 705 903 143	344 235 431	166 049	3656	0.340 992 876 403	569 632 151	1856 881	9 18
61.4	0.078 361 667 712	344 401 480	162 393	3679	0.341 562 508 554	571 489 032	1866 065	9 27
61.5	0.078 017 266 232	344 563 873	158 714	3708	0.342 133 997 586	573 355 097	1875 336	9 36
61.6	0.077 672 702 359	344 722 587	155 006	3734	0.342 707 352 683	575 230 433	1884 701	9 45
61.7	0.077 327 979 772	344 877 593	151 272	3760	0.343 282 583 116	577 115 134	1894 158	9 54
61.8	0.076 983 102 179	345 028 865	147 512	3786	0.343 859 698 250	579 009 292	1903 707	9 64
61.9	0.076 638 073 314	345 176 377	143 726	3811	0.344 438 707 542	580 912 999	1913 354	9 74
62.0	0.076 292 896 937	345 320 103	139 915	3841	0.345 019 620 541	582 826 353	1923 095	9 84
62.1	0.075 947 576 834	345 460 018	136 074	3866	0.345 602 446 894	584 749 448	1932 936	9 93
62.2	0.075 602 116 816	345 596 092	132 208	3894	0.346 187 196 342	586 682 384	1942 873	10 04
62.3	0.075 256 520 724	345 728 300	128 314	3921	0.346 773 878 726	588 625 257	1952 914	10 14
62.4	0.074 910 792 424	345 856 614	124 393	3949	0.347 362 503 983	590 578 171	1963 054	10 24
62.5	0.074 564 935 810	345 981 007	120 444	3975	0.347 953 082 154	592 541 225	1973 298	10 34
62.6	0.074 218 954 803	346 101 451	116 469	4005	0.348 545 623 379	594 514 523	1983 647	10 45
62.7	0.073 872 853 352	346 217 920	112 464	4033	0.349 140 137 902	596 498 170	1994 102	10 56
62.8	0.073 526 635 432	346 330 384	108 431	4062	0.349 736 636 072	598 492 272	2004 664	10 67
62.9	0.073 180 305 048	346 438 815	104 369	4088	0.350 335 128 344	600 496 936	2015 336	10 78
63.0	0.072 833 866 233	346 543 184	100 281	4119	0.350 935 625 280	602 512 272	2026 119	10 89
63.1	0.072 487 323 049	346 643 465	96 162	4148	0.351 538 137 552	604 538 391	2037 012	11 01
63.2	0.072 140 679 584	346 739 627	92 014	4176	0.352 142 675 943	606 575 403	2048 022	11 12
63.3	0.071 793 939 957	346 831 641	87 838	4207	0.352 749 251 346	608 623 425	2059 143	11 24
63.4	0.071 447 108 316	346 919 479	83 631	4235	0.353 357 874 771	610 682 568	2070 386	11 35
63.5	0.071 100 188 837	347 003 110	79 396	4266	0.353 968 557 339	612 752 954	2081 745	11 47
63.6	0.070 753 185 727	347 082 506	75 130	4295	0.354 581 310 293	614 834 699	2093 223	11 60
63.7	0.070 406 103 221	347 157 636	70 835	4327	0.355 196 144 992	616 927 922	2104 826	11 72
63.8	0.070 058 945 585	347 228 471	66 508	4357	0.355 813 072 914	619 032 748	2116 552	11 85
63.9	0.069 711 717 114	347 294 979	62 151	4386	0.356 432 105 662	621 149 300	2128 405	11 97
64.0	0.069 364 422 135	347 357 130	57 765	4418	0.357 053 254 962	623 277 705	2140 383	12 11
64.1	0.069 017 065 005	347 414 895	53 347	4450	0.357 676 532 667	625 418 088	2152 493	12 23
64.2	0.068 669 650 110	347 468 242	48 897	4482	0.358 301 950 755	627 570 581	2164 732	12 37
64.3	0.068 322 181 868	347 517 139	44 415	4512	0.358 929 521 336	629 735 313	2177 106	12 51
64.4	0.067 974 664 729	347 561 554	39 903	4544	0.359 559 256 649	631 912 419	2189 616	12 64
64.5	0.067 627 103 175	347 601 457	35 359	4575	0.360 191 169 068	634 102 035	2202 261	12 78
64.6	0.067 279 501 718	347 636 816	30 784	4611	0.360 825 271 103	636 304 296	2215 048	12 92
64.7	0.066 931 864 902	347 667 600	26 173	4641	0.361 461 575 399	638 519 344	2227 974	13 07
64.8	0.066 584 197 302	347 693 773	21 532	4675	0.362 100 094 743	640 747 318	2241 046	13 21
64.9	0.066 236 503 529	347 715 305	16 857	4706	0.362 740 842 061	642 988 364	2254 263	13 36
65.0	0.065 888 788 224	347 732 162	12 151	4742	0.363 383 830 425	645 242 627	2267 627	13 51

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
65°.0	0.065 888 788 224	347 732 162	12 151	4742	0.363 383 830 425	645 242 627	2267 627	13 515
65.1	0.065 541 056 062	347 744 313	7 409	4772	0.364 029 073 052	647 510 254	2281 142	13 669
65.2	0.065 193 311 749	347 751 722	+2 637	4811	0.364 676 583 306	649 791 396	2294 811	13 822
65.3	0.064 845 560 027	347 754 359	−2 174	4842	0.365 326 374 702	652 086 207	2308 633	13 981
65.4	0.064 497 805 668	347 752 185	7 016	4874	0.365 978 460 909	654 394 840	2322 614	14 139
65.5	0.064 150 053 483	347 745 169	11 890	4913	0.366 632 855 749	656 717 454	2336 753	14 304
65.6	0.063 802 308 314	347 733 279	16 803	4946	0.367 289 573 203	659 054 207	2351 057	14 467
65.7	0.063 454 575 035	347 716 476	21 749	4980	0.367 948 627 410	661 405 264	2365 524	14 634
65.8	0.063 106 858 559	347 694 727	26 729	5018	0.368 610 032 674	663 770 788	2380 158	14 806
65.9	0.062 759 163 832	347 667 998	31 747	5051	0.369 273 803 462	666 150 946	2394 964	14 978
66.0	0.062 411 495 834	347 636 251	36 798	5088	0.369 939 954 408	668 545 910	2409 942	15 152
66.1	0.062 063 859 583	347 599 453	41 886	5124	0.370 608 500 318	670 955 852	2425 094	15 334
66.2	0.061 716 260 130	347 557 567	47 010	5160	0.371 279 456 170	673 380 946	2440 428	15 512
66.3	0.061 368 702 563	347 510 557	52 170	5200	0.371 952 837 116	675 821 374	2455 940	15 699
66.4	0.061 021 192 006	347 458 387	57 370	5233	0.372 628 658 490	678 277 314	2471 639	15 884
66.5	0.060 673 733 619	347 401 017	62 603	5271	0.373 306 935 804	680 748 953	2487 523	16 075
66.6	0.060 326 332 602	347 338 416	67 874	5309	0.373 987 684 757	683 236 476	2503 598	16 268
66.7	0.059 978 994 186	347 270 542	73 183	5347	0.374 670 921 233	685 740 074	2519 866	16 467
66.8	0.059 631 723 644	347 197 359	78 530	5387	0.375 356 661 307	688 259 940	2536 333	16 664
66.9	0.059 284 526 285	347 118 829	83 917	5421	0.376 044 921 247	690 796 273	2552 997	16 868
67.0	0.058 937 407 456	347 034 912	89 338	5461	0.376 735 717 520	693 349 270	2569 865	17 076
67.1	0.058 590 372 544	346 945 574	94 799	5504	0.377 429 066 790	695 919 135	2586 941	17 283
67.2	0.058 243 426 970	346 850 775	100 303	5540	0.378 124 985 925	698 506 076	2604 224	17 500
67.3	0.057 896 576 195	346 750 472	105 843	5580	0.378 823 492 001	701 110 300	2621 724	17 716
67.4	0.057 549 825 723	346 644 629	111 423	5621	0.379 524 602 301	703 732 024	2639 440	17 934
67.5	0.057 203 181 094	346 533 206	117 044	5660	0.380 228 334 325	706 371 464	2657 374	18 161
67.6	0.056 856 647 888	346 416 162	122 704	5701	0.380 934 705 789	709 028 838	2675 535	18 392
67.7	0.056 510 231 726	346 293 458	128 405	5742	0.381 643 734 627	711 704 373	2693 927	18 620
67.8	0.056 163 938 268	346 165 053	134 147	5783	0.382 355 439 000	714 398 300	2712 547	18 860
67.9	0.055 817 773 215	346 030 906	139 930	5824	0.383 069 837 300	717 110 847	2731 407	19 098
68.0	0.055 471 742 309	345 890 976	145 754	5867	0.383 786 948 147	719 842 254	2750 505	19 344
68.1	0.055 125 851 333	345 745 222	151 621	5909	0.384 506 790 401	722 592 759	2769 849	19 594
68.2	0.054 780 106 111	345 593 601	157 530	5951	0.385 229 383 160	725 362 608	2789 443	19 845
68.3	0.054 434 512 510	345 436 071	163 481	5994	0.385 954 745 768	728 152 051	2809 288	20 106
68.4	0.054 089 076 439	345 272 590	169 475	6036	0.386 682 897 819	730 961 339	2829 394	20 364
68.5	0.053 743 803 849	345 103 115	175 511	6082	0.387 413 859 158	733 790 733	2849 758	20 634
68.6	0.053 398 700 734	344 927 604	181 593	6124	0.388 147 649 891	736 640 491	2870 392	20 906
68.7	0.053 053 773 130	344 746 011	187 717	6170	0.388 884 290 382	739 510 883	2891 298	21 184
68.8	0.052 709 027 119	344 558 294	193 887	6212	0.389 623 801 265	742 402 181	2912 482	21 466
68.9	0.052 364 468 825	344 364 407	200 099	6259	0.390 366 203 446	745 314 663	2933 948	21 750
69.0	0.052 020 104 418	344 164 308	206 358	6303	0.391 111 518 109	748 248 611	2955 698	22 046
69.1	0.051 675 940 110	343 957 950	212 661	6351	0.391 859 766 720	751 204 309	2977 744	22 341
69.2	0.051 331 982 160	343 745 289	219 012	6395	0.392 610 971 029	754 182 053	3000 085	22 646
69.3	0.050 988 236 871	343 526 277	225 407	6441	0.393 365 153 082	757 182 138	3022 731	22 955
69.4	0.050 644 710 594	343 300 870	231 848	6488	0.394 122 335 220	760 204 869	3045 686	23 266
69.5	0.050 301 409 724	343 069 022	238 336	6537	0.394 882 540 089	763 250 555	3068 952	23 589
69.6	0.049 958 340 702	342 830 686	244 873	6583	0.395 645 790 644	766 319 507	3092 541	23 918
69.7	0.049 615 510 016	342 585 813	251 456	6631	0.396 412 110 151	769 412 048	3116 459	24 249
69.8	0.049 272 924 203	342 334 357	258 087	6679	0.397 181 522 199	772 528 507	3140 708	24 589
69.9	0.048 930 589 846	342 076 270	264 766	6730	0.397 954 050 706	775 669 215	3165 297	24 933
70.0	0.048 588 513 576	341 811 504	271 496	6778	0.398 729 719 921	778 834 512	3190 230	25 284

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
70°0	0.048 588 513 576	341 811 504	271 496	6 778	49
70.1	0.048 246 702 072	341 540 008	278 274	6 827	49
70.2	0.047 905 162 064	341 261 734	285 101	6 876	52
70.3	0.047 563 900 330	340 976 633	291 977	6 928	51
70.4	0.047 222 923 697	340 684 656	298 905	6 979	50
70.5	0.046 882 239 041	340 385 751	305 884	7 029	52
70.6	0.046 541 853 290	340 079 867	312 913	7 081	54
70.7	0.046 201 773 423	339 766 954	319 994	7 135	50
70.8	0.045 862 006 469	339 446 960	327 129	7 185	55
70.9	0.045 522 559 509	339 119 831	334 314	7 240	53
71.0	0.045 183 439 678	338 785 517	341 554	7 293	54
71.1	0.044 844 654 161	338 443 963	348 847	7 347	54
71.2	0.044 506 210 198	338 095 116	356 194	7 401	54
71.3	0.044 168 115 082	337 738 922	363 595	7 455	57
71.4	0.043 830 376 160	337 375 327	371 050	7 512	57
71.5	0.043 493 000 833	337 004 277	378 562	7 569	53
71.6	0.043 155 996 556	336 625 715	386 131	7 622	60
71.7	0.042 819 370 841	336 239 584	393 753	7 682	55
71.8	0.042 483 131 257	335 845 831	401 435	7 737	59
71.9	0.042 147 285 426	335 444 396	409 172	7 796	59
72.0	0.041 811 841 030	335 035 224	416 968	7 855	58
72.1	0.041 476 805 806	334 618 256	424 823	7 913	61
72.2	0,041 142 187 550	334 193 433	432 736	7 974	58
72.3	0,040 807 994 117	333 760 697	440 710	8 032	61
72.4	0.040 474 233 420	333 319 987	448 742	8 093	6 53
72.5	0.040 140 913 433	332 871 245	456 835	8 156	61
72.6	0.039 808 042 188	332 414 410	464 991	8 217	60
72.7	0.039 475 627 778	331 949 419	473 208	8 277	65
72.8	0.039 143 678 359	331 476 211	481 485	8 342	64
72.9	0,038 812 202 148	330 994 726	489 827	8 406	64
73.0	0.038 481 207 422	330 504 899	498 233	8 470	63
73.1	0.038 150 702 523	330 006 666	506 703	8 533	67
73.2	0.037 820 695 857	329 499 963	515 236	8 600	64
73.3	0.037 491 195 894	328 984 727	523 836	8 664	67
73.4	0.037 162 211 167	328 460 891	532 500	8 731	69
73.5	0.036 833 750 276	327 928 391	541 231	8 800	68
73.6	0.036 505 821 885	327 387 160	550 031	8 868	67
73.7	0.036 178 434 725	326 837 129	558 899	8 935	68
73.8	0.035 851 597 596	326 278 230	567 834	9 003	72
73.9	0,035 525 319 366	325 710 396	576 837	9 075	72
74.0	0,035 199 608 970	325 133 559	585 912	9 147	70
74.1	0.034 874 475 411	324 547 647	595 059	9 217	70
74.2	0.034 549 927 764	323 952 588	604 276	9 287	73
74.3	0.034 225 975 176	323 348 312	613 563	9 360	77
74.4	0.033 902 626 864	322 734 749	622 923	9 437	73
74.5	0.033 579 892 115	322 111 826	632 360	9 510	74
74.6	0.033 257 780 289	321 479 466	641 870	9 584	76
74.7	0.032 936 300 823	320 837 596	651 454	9 660	75
74.8	0.032 615 463 227	320 186 142	661 114	9 735	82
74.9	0.032 295 277 085	319 525 028	670 849	9 817	74
75.0	0.031 975 752 057	318 854 179	680 666	9 891	82

θ.	Log. F¹.	Diff. I.	II.	III.	IV.
70°.0	0.398 729 719 921	778 834 512	3 190 230	25 284	362
70.1	0.399 508 554 433	782 024 742	3 215 514	25 646	367
70.2	0.400 290 579 175	785 240 256	3 241 160	26 013	372
70.3	0.401 075 819 431	788 481 416	3 267 173	26 385	377
70.4	0.401 864 300 847	791 748 589	3 293 558	26 762	392
70.5	0.402 656 049 436	795 042 147	3 320 320	27 154	396
70.6	0.403 451 091 583	798 362 467	3 347 474	27 550	404
70.7	0.404 249 454 050	801 709 941	3 375 024	27 954	412
70.8	0.405 051 163 991	805 084 965	3 402 978	28 366	416
70.9	0.405 856 248 956	808 487 943	3 431 344	28 782	430
71.0	0.406 664 736 899	811 919 287	3 460 126	29 212	442
71.1	0.407 476 656 186	815 379 413	3 489 338	29 654	444
71.2	0.408 292 035 599	818 868 751	3 518 992	30 098	453
71.3	0.409 110 904 350	822 387 743	3 549 090	30 551	471
71.4	0.409 933 292 093	825 936 833	3 579 641	31 022	472
71.5	0.410 759 228 926	829 516 474	3 610 663	31 494	484
71.6	0.411 588 745 400	833 127 137	3 642 157	31 978	494
71.7	0.412 421 872 537	836 769 294	3 674 135	32 472	505
71.8	0.413 258 641 831	840 443 429	3 706 607	32 977	517
71.9	0.414 099 085 260	844 150 036	3 739 584	33 494	531
72.0	0.414 943 235 296	847 889 620	3 773 078	34 025	536
72.1	0.415 791 124 916	851 662 698	3 807 103	34 561	551
72.2	0.416 642 787 614	855 469 801	3 841 664	35 111	561
72.3	0.417 498 257 415	859 311 465	3 876 775	35 672	581
72.4	0.418 357 568 880	863 188 240	3 912 447	36 253	585
72.5	0.419 220 757 120	867 100 687	3 948 700	36 838	597
72.6	0.420 087 857 807	871 049 387	3 985 538	37 435	614
72.7	0.420 958 907 194	875 034 925	4 022 973	38 049	630
72.8	0.421 833 942 119	879 057 898	4 061 022	38 679	644
72.9	0.422 713 000 017	883 118 920	4 099 701	39 323	654
73.0	0.423 596 118 937	887 218 621	4 139 024	39 977	671
73.1	0.424 483 337 558	891 357 645	4 179 001	40 648	689
3.2	0.425 374 695 203	895 536 646	4 219 649	41 337	702
3.3	0.426 270 231 849	899 756 295	4 260 986	42 039	720
3.4	0.427 169 988 144	904 017 281	4 303 025	42 759	738
3.5	0.428 074 005 425	908 320 306	4 345 784	43 497	751
3.6	0.428 982 325 731	912 666 090	4 389 281	44 248	773
3.7	0.429 894 991 821	917 055 371	4 433 529	45 021	786
3.8	0.430 812 047 192	921 488 900	4 478 550	45 807	813
.9	0.431 733 536 092	925 967 450	4 524 357	46 620	833
.0	0.432 659 503 542	930 491 807	4 570 977	47 453	842
.1	0.433 589 995 349	935 062 784	4 618 430	48 295	868
.2	0.434 525 058 133	939 681 214	4 666 725	49 163	894
.3	0.435 464 739 347	944 347 939	4 715 888	50 057	919
.4	0.436 409 087 286	949 063 827	4 765 945	50 976	931
.5	0.437 358 151 113	955 829 772	4 816 921	51 907	959
.6	0.438 311 980 885	958 646 693	4 868 828	52 866	983
.7	0.439 270 627 578	963 515 521	4 921 694	53 849	1 010
.8	0.440 234 143 099	968 437 215	4 975 543	54 859	1 037
.9	0.441 202 580 314	973 412 758	5 030 402	55 896	1 062
.0	0.442 175 993 072	978 443 160	5 086 298	56 958	1 084

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
75°.0	0.031 975 752 056.78	318 854 179	680 666	9 891	82
75.1	0.031 656 897 878.27	318 173 513	690 557	9 973	78
75.2	0.031 338 724 364.79	317 482 956	700 530	10 051	83
75.3	0.031 021 241 408.98	316 782 426	710 581	10 134	80
75.4	0.030 704 458 983.05	316 071 845	720 715	10 214	84
75.5	0.030 388 387 138.55	315 351 130	730 929	10 298	81
75.6	0.030 073 036 008.50	314 620 201	741 227	10 379	88
75.7	0.029 758 415 807.37	313 878 974	751 606	10 467	83
75.8	0.029 444 536 832.54	313 127 368	762 073	10 550	89
75.9	0.029 131 409 464.85	312 365 295	772 623	10 639	84
76.0	0.028 819 044 169.78	311 592 672	783 262	10 723	92
76.1	0.028 507 451 498.27	310 809 410	793 985	10 815	88
76.2	0.028 196 642 087.82	310 015 425	804 800	10 903	89
76.3	0.027 886 626 663.35	309 210 625	815 703	10 992	95
76.4	0.027 577 416 038.35	308 394 922	826 695	11 087	90
76.5	0.027 269 021 115.79	307 568 227	837 782	11 177	96
76.6	0.026 961 452 889.14	306 730 445	848 959	11 273	93
76.7	0.026 654 722 444.08	305 881 486	860 232	11 366	97
76.8	0.026 348 840 958.11	305 021 254	871 598	11 463	99
76.9	0.026 043 819 703.87	304 149 656	883 061	11 562	96
77.0	0.025 739 670 047.81	303 266 595	894 623	11 658	102
77.1	0.025 436 403 453.31	302 371 972	906 281	11 760	100
77.2	0.025 134 031 481.05	301 465 691	918 041	11 860	102
77.3	0.024 832 565 790.31	300 547 650	929 901	11 962	106
77.4	0.024 532 018 140.38	299 617 749	941 863	12 068	103
77.5	0.024 232 400 391.38	298 675 886	953 931	12 171	107
77.6	0.023 933 724 505.45	297 721 955	966 102	12 278	109
77.7	0.023 636 002 550.26	296 755 853	978 380	12 387	107
77.8	0.023 339 246 697.07	295 777 473	990 767	12 494	115
77.9	0.023 043 469 224.18	294 786 706	1 003 261	12 609	108
78.0	0.022 748 682 517.70	293 783 445	1 015 870	12 717	11
78.1	0.022 454 899 073.33	292 767 575	1 028 587	12 834	114
78.2	0.022 162 131 497.60	291 738 988	1 041 421	12 948	118
78.3	0.021 870 392 509.65	290 697 567	1 054 369	13 066	120
78.4	0.021 579 694 942.50	289 643 198	1 067 435	13 186	119
78.5	0.021 290 051 744.75	288 575 763	1 080 621	13 305	122
78.6	0.021 001 475 982.41	287 495 142	1 093 926	13 427	126
78.7	0.020 713 980 840.09	286 401 216	1 107 353	13 553	126
78.8	0 020 427 579 623.70	285 293 863	1 120 906	13 679	126
78.9	0.020 142 285 760.95	284 172 957	1 134 585	13 805	132
79.0	0.019 858 112 804.32	283 038 372	1 148 390	13 937	131
79.1	0.019 575 074 431.54	281 889 982	1 162 327	14 068	135
79.2	0.019 293 184 449.58	280 727 655	1 176 395	14 203	135
79.3	0.019 012 456 794.62	279 551 260	1 190 598	14 338	140
79.4	0.018 732 905 534.98	278 360 662	1 204 936	14 478	136
79.5	0.018 454 544 873.05	277 155 726	1 219 414	14 617	143
79.6	0.018 177 389 147.44	275 936 312	1 234 031	14 760	147
79.7	0.017 901 452 835.17	274 702 281	1 248 791	14 907	145
79.8	0.017 626 750 553.87	273 453 490	1 263 698	15 052	153
79.9	0.017 353 297 064.05	272 189 792	1 278 750	15 205	153
80.0	0.017 081 107 271.63	270 911 042	1 293 955	15 358	153

θ.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
75°0	0.442 175 993 072.45	978 443 160	5 086 298	56 958	1 086
75.1	0.443 154 436 232.65	983 529 458	5 143 256	58 044	1 122
75.2	0.444 137 965 691.21	988 672 714	5 201 300	59 166	1 145
75.3	0.445 126 638 404.69	993 874 014	5 260 466	60 311	1 179
75.4	0.446 120 512 419.32	999 134 480	5 320 777	61 490	1 209
75.5	0.447 119 646 899.26	1 004 455 257	5 382 267	62 699	1 243
75.6	0.448 124 102 156.17	1 009 837 524	5 444 966	63 942	1 276
75.7	0.449 133 939 679.94	1 015 282 490	5 508 908	65 218	1 310
75.8	0.450 149 222 169.97	1 020 791 398	5 574 126	66 528	1 348
75.9	0.451 170 013 567.98	1 026 365 524	5 640 654	67 876	1 384
76.0	0.452 196 379 091.74	1 032 006 178	5 708 530	69 260	1 424
76.1	0.453 228 385 269.83	1 037 714 708	5 777 790	70 684	1 462
76.2	0.454 266 099 977.90	1 043 492 498	5 848 474	72 146	1 506
76.3	0.455 309 592 476.22	1 049 340 972	5 920 620	73 652	1 546
76.4	0.456 358 933 448.08	1 055 261 592	5 994 272	75 198	1 596
76.5	0.457 414 195 040.13	1 061 255 864	6 069 470	76 794	1 634
76.6	0.458 475 450 903.74	1 067 325 334	6 146 264	78 428	1 691
76.7	0.459 542 776 238.29	1 073 471 598	6 224 692	80 119	1 734
76.8	0.460 616 247 835.51	1 079 696 290	6 304 811	81 853	1 788
76.9	0.461 695 944 125.99	1 086 001 101	6 386 664	83 641	1 844
77.0	0.462 781 945 226.85	1 092 387 765	6 470 305	85 485	1 894
77.1	0.463 874 332 991.74	1 098 858 070	6 555 790	87 379	1 957
77.2	0.464 973 191 062.35	1 105 413 860	6 643 169	89 336	2 014
77.3	0.466 078 604 921.92	1 112 057 029	6 732 505	91 350	2 078
77.4	0.467 190 661 950.90	1 118 789 534	6 823 855	93 428	2 142
77.5	0.468 309 451 484.80	1 125 613 389	6 917 283	95 570	2 209
77.6	0.469 435 064 874.01	1 132 530 672	7 012 853	97 779	2 280
77.7	0.470 567 595 546.24	1 139 543 525	7 110 632	100 059	2 352
77.8	0.471 707 139 071.25	1 146 654 157	7 210 691	102 411	2 429
77.9	0.472 853 793 228.33	1 153 864 848	7 313 102	104 840	2 505
78.0	0.474 007 658 076.26	1 161 177 950	7 417 942	107 345	2 593
78.1	0.475 168 836 026.21	1 168 595 892	7 525 287	109 938	2 673
78.2	0.476 337 431 917.67	1 176 121 179	7 635 225	112 611	2 765
78.3	0.477 513 553 097.26	1 183 756 404	7 747 836	115 376	2 857
78.4	0.478 697 309 501.24	1 191 504 240	7 863 212	118 233	2 956
78.5	0.479 888 813 741.19	1 199 367 452	7 981 445	121 189	3 056
78.6	0.481 088 181 192.91	1 207 348 897	8 102 634	124 245	3 160
78.7	0.482 295 530 090.28	1 215 451 531	8 226 879	127 405	3 274
78.8	0.483 510 981 621.47	1 223 678 410	8 354 284	130 679	3 387
78.9	0.484 734 660 030.94	1 232 032 694	8 484 963	134 066	3 508
79.0	0.485 966 692 724.94	1 240 517 657	8 619 029	137 574	3 633
79.1	0.487 207 210 381.62	1 249 136 686	8 756 603	141 207	3 768
79.2	0.488 456 347 067.79	1 257 893 289	8 897 810	144 975	3 900
79.3	0.489 714 240 356.58	1 266 791 099	9 042 786	148 875	4 051
79.4	0.490 981 031 456.26	1 275 833 885	9 191 661	152 926	4 198
79.5	0.492 256 865 340.61	1 285 025 546	9 344 587	157 124	4 358
79.6	0.493 541 890 886.92	1 294 370 133	9 501 711	161 482	4 520
79.7	0.494 836 261 020.22	1 303 871 844	9 663 193	166 002	4 701
79.8	0.496 140 132 864.48	1 313 535 037	9 829 195	170 703	4 876
79.9	0.497 453 667 900.84	1 323 364 232	9 999 898	175 579	5 073
80.0	0.498 777 032 133.31	1 333 364 130	10 175 477	180 652	5 269

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV
80°0	0.017 081 107 271.63	270 911 042	1 293 955	15 358	15
80.1	0.016 810 196 230.04	269 617 087	1 309 318 7	15 511	16
80.2	0.016 540 579 143.42	268 307 775	1 324 824	15 671	15
80.3	0.016 272 271 368.49	266 982 951	1 340 495	15 830	16
80.4	0.016 005 288 417.33	265 642 456	1 356 325	15 998	16
80.5	0.015 739 645 960.70	264 286 131	1 372 323	16 161	17
80.6	0.015 475 359 830.22	262 913 808	1 388 484	16 334	17
80.7	0.015 212 446 021.67	261 525 324	1 404 818	16 505	18
80.8	0.014 950 920 697.80	260 120 506	1 421 323	16 685	17
80.9	0.014 690 800 191.58	258 699 183	1 438 008	16 863	18
81.0	0.014 432 101 009.44	257 261 175	1 454 871	17 045	19
81.1	0.014 174 839 834.36	255 806 304	1 471 916	17 236	18
81.2	0.013 919 033 529.63	254 334 388	1 489 152	17 425	19
81.3	0.013 664 699 142.11	252 845 236	1 506 577	17 620	20
81.4	0.013 411 853 906.49	251 338 659	1 524 197	17 820	20
81.5	0.013 160 515 246.78	249 814 462	1 542 017	18 022	21
81.6	0.012 910 700 784.83	248 272 445	1 560 039	18 232	21
81.7	0.012 662 428 339.69	246 712 406	1 578 271	18 442	21
81.8	0.012 415 715 934.32	245 134 135	1 596 713	18 660	22
81.9	0.012 170 581 799.27	243 537 422	1 615 373	18 881	22
82.0	0.011 927 044 377.36	241 922 049	1 634 254	19 109	23
82.1	0.011 685 122 328.24	240 287 795	1 653 363	19 340	23
82.2	0.011 444 834 533.42	238 634 432	1 672 703	19 577	24
82.3	0.011 206 200 101.23	236 961 729	1 692 280	19 823	24
82.4	0.010 969 238 371.92	235 269 449	1 712 103	20 068	25
82.5	0.010 733 968 923.41	233 557 346	1 732 171	20 327	25
82.6	0.010 500 411 576.80	231 825 175	1 752 498	20 586	27
82.7	0.010 268 586 402.22	230 072 677	1 773 084	20 856	27
82.8	0.010 038 513 725.00	228 299 593	1 793 940	21 131	28
82.9	0.009 810 214 132.22	226 505 653	1 815 071	21 411	29
83.0	0.009 583 708 479.23	224 690 582	1 836 482	21 706	29
83.1	0.009 359 017 896.54	222 854 100	1 858 188	21 999	30
83.2	0.009 136 163 797.30	220 995 912	1 880 187	22 308	31
83.3	0.008 915 167 884.65	219 115 725	1 902 495	22 623	32
83.4	0.008 696 052 159.72	217 213 230	1 925 118	22 946	33
83.5	0.008 478 838 930.08	215 288 112	1 948 064	23 280	34
83.6	0 008 263 550 818.09	213 340 048	1 971 344	23 623	35
83.7	0.008 050 210 770.16	211 368 704	1 994 967	23 978	36
83.8	0.007 838 842 066.17	209 373 737	2 018 945	24 342	37
83.9	0.007 629 468 329.53	207 354 792	2 043 287	24 718	39
84.0	0.007 422 113 537.40	205 311 505	2 068 005	25 108	40
84.1	0.007 216 802 032.29	203 243 500	2 093 113	25 508	41
84.2	0.007 013 558 532.49	201 150 387	2 118 621	25 923	42
84.3	0.006 812 408 145.18	199 031 766	2 144 544	26 352	44
84.4	0x006 613 376 378.88	196 887 222	2 170 896	26 797	45
84.5	0.006 416 489 156.87	194 716 326	2 197 693	27 256	47
84.6	0.006 221 772 831.25	192 518 633	2 224 949	27 731	49
84.7	0.006 029 254 198.30	190 293 684	2 252 680	28 229	50
84.8	0.005 838 960 513.83	188 041 004	2 280 909	28 738	53
84.9	0.005 650 919 510.43	185 760 095	2 309 647	29 274	55
85.0	0.005 465 159 414.92	183 450 448	2 338 921	29 827	57

	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
o	0.498 777 032 133.31	1 333 364 130	10 175 477	180 652	5 269
.1	0.500 110 396 262.94	1 343 539 607	10 356 129	185 921	5 487
2	0.501 453 935 869.83	1 353 895 736	10 542 050	191 408	5 703
3	0.502 807 831 606.17	1 364 437 786	10 733 458	197 111	5 938
4	0.504 172 269 391.86	1 375 171 244	10 930 569	203 049	6 186
5	0.505 547 440 636.00	1 386 101 813	11 133 618	209 235	6 443
6	0.506 933 542 448.78	1 397 235 431	11 342 853	215 678	6 714
7	0.508 330 777 880.10	1 408 578 284	11 558 531	222 392	7 004
8	0.509 739 356 164.30	1 420 136 815	11 780 923	229 396	7 306
9	0.511 159 492 978.79	1 431 917 738	12 010 319	236 702	7 626
	0.512 591 410 716.56	1 443 928 057	12 247 021	244 328	7 960
	0.514 035 338 773.59	1 456 175 078	12 491 349	252 288	8 323
	0.515 491 513 851.50	1 468 666 427	12 743 637	260 611	8 695
	0.516 960 180 277.50	1 481 410 064	13 004 248	269 306	9 096
	0.518 441 590 341.65	1 494 414 312	13 273 554	278 402	9 517
	0.519 936 004 653.61	1 507 687 866	13 551 956	287 919	9 965
	0.521 443 692 519.75	1 521 239 822	13 839 875	297 884	10 440
	0.522 964 932 341.63	1 535 079 697	14 137 759	308 324	10 941
	0.524 500 012 038.64	1 549 217 456	14 446 083	319 265	11 475
	0.526 049 229 495.04	1 563 663 539	14 765 348	330 740	12 046
	0.527 612 893 033.96	1 578 428 887	15 096 088	342 786	12 644
	0.529 191 321 920.70	1 593 524 975	15 438 874	355 430	13 289
	0.530 784 846 896.40	1 608 963 849	15 794 304	368 719	13 970
	0.532 393 810 745.33	1 624 758 153	16 163 023	382 689	14 702
	0.534 018 568 898.22	1 640 921 176	16 545 712	397 391	15 476
	0.535 659 490 073.64	1 657 466 888	16 943 103	412 867	16 306
	0.537 316 956 961.91	1 674 409 991	17 355 970	429 173	17 194
	0.538 991 366 953.05	1 691 765 961	17 785 143	446 367	18 139
	0.540 683 132 914.02	1 709 551 104	18 231 510	464 506	19 158
	0.542 392 684 018.13	1 727 782 614	18 696 016	483 664	20 245
	0.544 120 466 631.80	1 746 478 630	19 179 680	503 909	21 409
	0.545 866 945 262.03	1 765 658 310	19 683 589	525 318	22 665
	0.547 632 603 572.34	1 785 341 899	20 208 907	547 983	24 011
	0.549 417 945 471.37	1 805 550 806	20 756 890	571 994	25 466
	0.551 223 496 276.87	1 826 307 696	21 328 884	597 460	27 017
5	0.553 049 803 972.58	1 847 636 580	21 926 344	624 477	28 715
6	0.554 897 440 553.47	1 869 562 924	22 550 821	653 192	30 525
7	0.556 767 003 477.33	1 892 113 745	23 204 013	683 717	32 501
8	0.558 659 117 221.78	1 915 317 758	23 887 730	716 218	34 625
9	0.560 574 434 979.55	1 939 205 488	24 603 948	750 843	36 936
o	0.562 513 640 468.45	1 963 809 436	25 354 791	787 779	39 453
1	0.564 477 449 904.33	1 989 164 227	26 142 570	827 232	42 168
2	0.566 466 614 130.75	2 015 306 797	26 969 802	869 400	45 145
3	0.568 481 920 927.65	2 042 276 599	27 839 202	914 545	48 373
.4	0.570 524 197 527.00	2 070 115 801	28 753 747	962 918	51 929
.5	0.572 594 313 327.99	2 098 869 548	29 716 665	1 014 847	55 775
.6	0.574 693 182 875.56	2 128 586 213	30 731 512	1 070 622	60 030
.7	0.576 821 769 089.25	2 159 317 725	31 802 134	1 130 652	64 678
.8	0.578 981 086 813.51	2 191 119 859	32 932 786	1 195 333	69 797
.9	0.581 172 206 672.75	2 224 052 645	34 128 119	1 265 130	75 444
.o	0.583 396 259 318.33	2 258 180 764	35 393 249	1 340 574	81 666

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
85°0	0.005 465 159 414.92	183 450 448	2 338 921	29 827	[illegible]
85.1	0.005 281 708 967.11	181 111 527	2 368 748	30 403	[illegible]
85.2	0.005 100 597 439.91	178 742 779	2 399 151	31 005	[illegible]
85.3	0.004 921 854 660.81	176 343 628	2 430 156	31 633	[illegible]
85.4	0.004 745 511 032.70	173 913 472	2 461 789	32 283	[illegible]
85.5	0.004 571 597 561.43	171 451 683	2 494 072	32 970	[illegible]
85.6	0.004 400 145 877.98	168 957 611	2 527 042	33 682	[illegible]
85.7	0.004 231 188 267.47	166 430 569	2 560 724	34 432	[illegible]
85.8	0.004 064 757 698.28	163 869 845	2 595 156	35 214	[illegible]
85.9	0.003 900 887 853.32	161 274 689	2 630 370	36 041	[illegible]
86.0	0.003 739 616 163.78	158 644 319	2 666 411	36 903	[illegible]
86.1	0.003 580 968 845.28	155 977 908	2 703 314	37 817	[illegible]
86.2	0.003 424 990 936.97	153 274 594	2 741 131	38 776	1 [illegible]
86.3	0.003 271 716 343.47	150 533 463	2 779 907	39 788	1 [illegible]
86.4	0.003 121 182 880.46	147 753 556	2 819 695	40 863	1 [illegible]
86.5	0.002 973 429 323.82	144 933 861	2 860 558	41 996	1 [illegible]
86.6	0.002 828 495 463.13	142 073 303	2 902 554	43 201	1 [illegible]
86.7	0.002 686 422 159.80	139 170 749	2 945 755	44 482	1 [illegible]
86.8	0.002 547 251 410.76	136 224 994	2 990 237	45 846	1 [illegible]
86.9	0.002 411 026 416.56	133 234 757	3 036 083	47 302	1 [illegible]
87.0	0.002 277 791 659.68	130 198 674	3 083 385	48 860	1 [illegible]
87.1	0.002 147 592 985.62	127 115 289	3 132 245	50 531	1 [illegible]
87.2	0.002 020 477 696.43	123 983 044	3 182 776	52 328	1 [illegible]
87.3	0.001 896 494 652.10	120 800 268	3 235 104	54 266	2 [illegible]
87.4	0.001 775 694 383.73	117 565 164	3 289 370	56 363	2 [illegible]
87.5	0.001 658 129 219.50	114 275 794	3 345 733	58 638	2 [illegible]
87.6	0.001 543 853 425.72	110 930 061	3 404 371	61 115	2 [illegible]
87.7	0.001 432 923 364.99	107 525 690	3 465 486	63 825	2 [illegible]
87.8	0.001 325 397 674.99	104 060 204	3 529 311	66 799	3 [illegible]
87.9	0.001 221 337 471.22	100 530 893	3 596 110	70 078	3 [illegible]
88.0	0.001 120 806 578.23	96 934 783	3 666 188	73 719	4 [illegible]
88.1	0.001 023 871 794.77	93 268 595	3 739 907	77 770	4 [illegible]
88.2	0.000 930 603 200.30	89 528 688	3 817 677	82 323	5 [illegible]
88.3	0.000 841 074 511.80	85 711 011	3 900 000	87 461	5 [illegible]
88.4	0.000 755 363 500.95	81 811 011	3 987 461	93 319	6 [illegible]
88.5	0.000 673 552 489.53	77 823 550	4 080 780	100 046	7 [illegible]
88.6	0.000 595 728 940.02	73 742 770	4 180 826	107 862	9 [illegible]
88.7	0.000 521 986 169.93	69 561 944	4 288 688	117 048	10 [illegible]
88.8	0.000 452 424 225.98	65 273 256	4 405 736	128 004	13 [illegible]
88.9	0.000 387 150 969.90	60 867 520	4 533 740	141 289	16 [illegible]
89.0	0.000 326 283 450.30	56 333 780	4 675 029	157 743	20 [illegible]
89.1	0.000 269 949 669.93	51 658 751	4 832 772	178 653	27 [illegible]
89.2	0.000 218 290 918.50	46 825 979	5 011 425	206 115	37 [illegible]
89.3	0.000 171 464 939.28	41 814 554	5 217 540	243 817	55 [illegible]
89.4	0.000 129 650 384.72	36 597 014	5 461 357	298 857	88 [illegible]
89.5	0.000 093 053 371.21	31 135 657	5 760 214	387 107	166 [illegible]
89.6	0.000 061 917 714.25	25 375 443	6 147 321	553 743	485 [illegible]
89.7	0.000 036 542 270.57	19 228 122	6 701 064	1 038 903	
89.8	0.000 017 314 148.93	12 527 058	7 739 967		
89.9	0.000 004 787 090.76	4 787 091			
90.0	0.000 000 000 000.00				

θ.	Log. F¹.	Diff. I.	II.	III.	IV.
85°.0	0.583 396 259 318.23	2 258 180 764	35 393 249	1 340 574	81 666
85.1	0.585 654 440 081.87	2 293 574 013	36 733 823	1 422 240	88 568
85.2	0.587 948 014 094.62	2 330 307 836	38 156 063	1 510 808	96 201
85.3	0.590 278 321 930.83	2 368 463 899	39 666 871	1 607 009	104 701
85.4	0.592 646 785 830.41	2 408 130 770	41 273 880	1 711 710	114 159
85.5	0.595 054 916 599.81	2 449 404 650	42 985 590	1 825 869	124 729
85.6	0.597 504 321 249.91	2 492 390 240	44 811 459	1 950 598	136 553
85.7	0.599 996 711 489.80	2 537 201 699	46 762 057	2 087 151	149 843
85.8	0.602 533 913 189.34	2 583 963 756	48 849 208	2 236 994	164 791
85.9	0.605 117 876 944.55	2 632 812 964	51 086 202	2 401 785	181 677
86.0	0.607 750 689 909.07	2 683 899 166	53 487 987	2 583 462	200 807
86.1	0.610 434 589 075.25	2 737 387 153	56 071 449	2 784 269	222 546
86.2	0.613 171 976 227.83	2 793 458 602	58 855 718	3 006 815	247 338
86.3	0.615 965 434 829.71	2 852 314 320	61 862 533	3 254 153	275 723
86.4	0.618 817 749 149.84	2 914 176 853	65 116 686	3 529 876	308 365
86.5	0.621 731 926 002.75	2 979 293 539	68 646 562	3 838 241	345 845
86.6	0.624 711 219 542.37	3 047 940 101	72 484 803	4 184 086	389 781
86.7	0.627 759 159 643.37	3 120 424 904	76 668 889	4 573 867	440 241
86.8	0.630 879 584 546.62	3 197 093 793	81 242 756	5 014 108	499 840
86.9	0.634 076 678 340.46	3 278 336 549	86 256 864	5 513 948	569 711
87.0	0.637 355 014 889.22	3 364 593 413	91 770 812	6 083 659	652 415
87.1	0.640 719 608 301.93	3 456 364 225	97 854 471	6 736 074	750 851
87.2	0.644 175 972 527.05	3 554 218 696	104 590 545	7 486 925	868 774
87.3	0.647 730 191 223.11	3 658 809 241	112 077 470	8 355 699	1 011 048
87.4	0.651 389 000 464.21	3 770 886 711	120 433 169	9 366 747	1 183 991
87.5	0.655 159 887 174.84	3 891 319 880	129 799 916	10 550 738	1 395 981
87.6	0.659 051 207 055.09	4 021 119 796	140 350 654	11 946 719	1 658 136
87.7	0.663 072 326 850.57	4 161 470 450	152 297 373	13 604 855	1 985 559
87.8	0.667 233 797 301.26	4 313 767 823	165 902 228	15 590 414	2 398 879
87.9	0.671 547 565 123.66	4 479 670 051	181 492 642	17 989 293	2 926 862
88.0	0.676 027 235 174.92	4 661 162 693	199 481 935	20 916 155	3 610 219
88.1	0.680 688 397 868.16	4 860 644 628	220 398 090	24 526 374	4 507 666
88.2	0.685 549 042 495.79	5 081 042 718	244 924 464	29 034 040	5 705 744
88.3	0.690 630 085 213.94	5 325 967 182	273 958 504	34 739 784	7 334 955
88.4	0.695 956 052 395.61	5 599 925 686	308 698 288	42 074 739	9 597 554
88.5	0.701 555 978 081.90	5 908 623 974	350 773 027	51 672 293	12 816 450
88.6	0.707 464 602 056.00	6 259 397 001	402 445 320	64 488 743	17 526 167
88.7	0.713 723 999 056.99	6 661 842 321	466 934 063	82 014 910	24 647 731
88.8	0.720 385 841 378.02	7 128 776 384	548 948 973	106 662 641	35 848 123
88.9	0.727 514 617 762.00	7 677 725 357	655 611 614	142 510 764	54 325 287
89.0	0.735 192 343 119.46	8 333 336 971	798 122 378	196 836 051	86 673 151
89.1	0.743 525 680 090.22	9 131 459 349	994 958 429	283 509 202	145 776 655
89.2	0.752 657 139 439.03	10 126 417 778	1 278 467 631	429 285 857	277 514 949
89.3	0.762 783 557 217.10	11 404 885 409	1 709 753 488	706 800 806	583 579 753
89.4	0.774 188 442 626.41	13 114 638 897	2 416 554 294	1 290 380 559	1 510 248 283
89.5	0.787 303 081 523.20	15 531 193 191	3 706 934 853	2 800 628 842	5 706 908 065
89.6	0.802 834 274 714.46	19 238 128 044	6 507 563 695	8 507 536 907	
89.7	0.822 072 402 757.80	25 745 691 739	15 015 100 602		
89.8	0.847 818 094 497.21	40 760 792 341			
89.9	0.888 578 886 838.43				
90.0	Infini.				

TABLE II.

Valeurs des Fonctions E, calculées à douze décimales, pour toutes les amplitudes φ, demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90°, l'angle du module étant de 45°.

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°0	0.00000 00000 00	872 65908 79	3322 70	3322 07	126	65
0.5	0.00872 65908 79	872 62586 09	6644 77	3320 81	191	61
1.0	0.01745 28494 88	872 55941 32	9965 58	3318 90	252	65
1.5	0.02617 84436 20	872 45975 74	13284 48	3316 38	317	62
2.0	0.03490 30411 94	872 32691 26	16600 86	3313 21	379	66
2.5	0.04362 63103 20	872 16090 40	19914 07	3309 42	445	59
3.0	0.05234 79193 60	871 96176 33	23223 49	3304 97	504	70
3.5	0.06106 75369 93	871 72952 84	26528 46	3299 93	574	55
4.0	0.06978 48322 77	871 46424 38	29828 39	3294 19	629	69
4.5	0.07849 94747 15	871 16595 99	33122 58	3287 90	698	66
5.0	0.08721 11343 14	870 83473 41	36410 48	3280 92	764	56
5.5	0.09591 94816 55	870 47062 93	39691 40	3273 28	820	72
6.0	0.10462 41879 48	870 07371 53	42964 68	3265 08	892	57
6.5	0.11332 49251 01	869 64406 85	46229 76	3256 16	949	68
7.0	0.12202 13657 86	869 18177 09	49485 92	3246 67	1017	64
7.5	0.13071 31834 95	868 68691 17	52732 59	3236 50	1081	61
8.0	0.13940 00526 12	868 15958 58	55969 09	3225 69	1142	65
8.5	0.14808 16484 70	867 59989 49	59194 78	3214 27	1207	68
9.0	0.15675 76474 19	867 00794 71	62409 05	3202 20	1275	69
9.5	0.16542 77268 90	866 38385 66	65611 25	3189 45	1344	57
10.0	0.17409 15654 56	865 72774 41	68800 70	3176 09	1401	63
10.5	0.18274 88428 97	865 03973 71	71976 79	3162 08	1464	70
11.0	0.19139 92402 68	864 31996 92	75138 87	3147 44	1534	57
11.5	0.20004 24399 60	863 56858 05	78286 31	3132 10	1591	74
12.0	0.20867 81257 65	862 78571 74	81418 41	3116 19	1665	55
12.5	0.21730 59829 39	861 97153 33	84534 60	3099 54	1720	75
13.0	0.22592 56982 72	861 12618 73	87634 14	3082 34	1795	59
13.5	0.23453 69601 45	860 24984 59	90716 48	3064 39	1854	69
14.0	0.24313 94586 04	859 34268 11	93780 87	3045 85	1923	61
14.5	0.25173 28854 15	858 40487 24	96826 72	3026 62	1984	71
15.0	0.26031 69341 39	857 43660 52	99853 34	3006 78	2055	64
15.5	0.26889 13001 91	856 43807 18	1 02860 12	2986 23	2119	68
16.0	0.27745 56809 09	855 40947 06	1 05846 35	2965 04	2187	61
16.5	0.28600 97756 15	854 35100 71	1 08811 39	2943 17	2248	74
17.0	0.29455 32856 86	853 26289 32	1 11754 56	2920 69	2322	58
17.5	0.30308 59146 18	852 14534 76	1 14675 25	2897 47	2380	75
18.0	0.31160 73680 94	850 99859 51	1 17572 72	2873 67	2455	61
18.5	0.32011 73540 45	849 82286 79	1 20446 39	2849 12	2516	72
19.0	0.32861 55827 24	848 61840 40	1 23295 51	2823 96	2588	65
19.5	0.33710 17667 64	847 38544 89	1 26119 47	2798 08	2653	68
20.0	0.34557 56212 53	846 12425 42	1 28917 55	2771 55	2721	65
20.5	0.35403 68637 95	844 83507 87	1 31689 10	2744 34	2786	72
21.0	0.36248 52145 82	843 51818 77	1 34433 44	2716 48	2858	68

TABLE II.

…urs des fonctions F, calculées à douze décimales, pour toutes les amplitudes φ, de …emi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90°, l'angle du module étant de 45°.

.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
'0	0.00000 00000 00	872 67016 41	3322 89	3323 02	25	
.5	0.00872 67016 41	872 70339 30	6645 91	3323 27	38	
0	0.01745 37355 71	872 76985 21	9969 18	3323 65	51	
5	0.02618 14340 92	872 86954 39	13292 83	3324 16	61	
0	0.03491 01295 31	873 00247 22	16616 99	3324 77	74	
5	0.04364 01542 53	873 16864 21	19941 76	3325 51	90	
0	0.05237 18406 74	873 36805 97	23267 27	3326 41	95	
5	0.06110 55212 71	873 60073 24	26593 68	3327 36	111	
0	0.06984 15285 95	873 86666 92	29921 04	3328 47	119	
5	0.07858 01952 87	874 16587 96	33249 51	3329 66	135	
0	0.08732 18540 83	874 49837 47	36579 17	3331 01	139	
5	0.09606 68378 30	874 86416 64	39910 18	3332 40	152	
0	0.10481 54794 94	875 26326 82	43242 58	3333 92	162	
.5	0.11356 81121 76	875 69569 40	46576 50	3335 54	170	
.0	0.12232 50691 16	876 16145 90	49912 04	3337 24	179	
.5	0.13108 66837 06	876 66057 94	53249 28	3339 03	185	
.0	0.13985 32895 00	877 19307 22	56588 31	3340 88	194	
.5	0.14862 52202 22	877 75895 53	59929 19	3342 82	202	
.0	0.15740 28097 75	878 35824 72	63272 01	3344 84	203	
.5	0.16618 63922 47	878 99096 73	66616 85	3346 87	215	
.0	0.17497 63019 20	879 65713 58	69963 72	3349 02	212	
.5	0.18377 28732 78	880 35677 30	73312 74	3351 14	220	
1.0	0.19257 64410 08	881 08990 04	76663 88	3353 34	221	
1.5	0.20138 73400 12	881 85653 92	80017 22	3355 55	226	
2.0	0.21020 59054 04	882 65671 14	83372 77	3357 81	221	
2.5	0.21903 24725 18	883 49043 91	86730 58	3360 02	224	
3.0	0.22786 73769 09	884 35774 49	90090 60	3362 26	221	
3.5	0.23671 09543 58	885 25865 09	93452 86	3364 47	223	
14.0	0.24556 35408 67	886 19317 95	96817 33	3366 70	212	
14.5	0.25442 54726 62	887 16135 28	1 00184 03	3368 82	213	
15.0	0.26329 70861 90	888 16319 31	1 03552 85	3370 95	205	
15.5	0.27217 87181 21	889 19872 16	1 06923 80	3373 00	195	
16.0	0.28107 07053 37	890 26795 96	1 10296 80	3374 95	187	
16.5	0.28997 33849 33	891 37092 76	1 13671 75	3376 82	182	
17.0	0.29888 70942 09	892 50764 51	1 17048 57	3378 64	158	
17.5	0.30781 21706 60	893 67813 08	1 20427 21	3380 22	157	
18.0	0.31674 89519 68	894 88240 29	1 23807 43	3381 79	133	
18.5	0.32569 77759 97	896 12047 72	1 27189 22	3383 12	122	
19.0	0.33465 89807 69	897 39236 94	1 30572 34	3384 34	97	
19.5	0.34363 29044 63	898 69809 28	1 33956 68	3385 31	82	
20.0	0.35261 98853 91	900 03765 96	1 37341 99	3386 13	52	
20.5	0.36162 02619 87	901 41107 95	1 40728 12	3386 65	35	
21.0	0.37063 43727 82	902 81836 07	1 44114 77	3387 00	5	

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V
21°0	0.36248 52145 82	843 51818 77	1 34433 44	2716 48	2858	68
21.5	0.37092 03964 59	842 17385 31	1 37149 92	2687 90	2926	66
22.0	0.37934 21349 90	840 80235 39	1 39837 82	2658 64	2992	69
22.5	0.38775 01585 29	839 40397 57	1 42496 46	2628 72	3061	72
23.0	0.39614 41982 86	837 97901 11	1 45125 18	2598 11	3133	65
23.5	0.40452 39883 97	836 52775 93	1 47723 29	2566 78	3198	64
24.0	0.41288 92659 90	835 05052 64	1 50290 07	2534 80	3262	79
24.5	0.42123 97712 54	833 54762 57	1 52824 87	2502 12	3341	64
25.0	0.42957 52475 11	832 01937 70	1 55326 99	2468 71	3405	74
25.5	0.43789 54412 81	830 46610 71	1 57795 70	2434 66	3479	69
26.0	0.44620 01023 52	828 88815 01	1 60230 36	2399 87	3548	69
26.5	0.45448 89838 53	827 28584 65	1 62630 23	2364 39	3617	73
27.0	0.46276 18423 18	825 65954 42	1 64994 62	2328 22	3690	67
27.5	0.47101 84377 60	824 00959 80	1 67322 84	2291 32	3757	75
28.0	0.47925 85337 40	822 33636 96	1 69614 16	2253 75	3832	68
28.5	0.48748 18974 36	820 64022 80	1 71867 91	2215 43	3900	72
29.0	0.49568 82997 16	818 92154 89	1 74083 34	2176 43	3972	72
29.5	0.50387 75152 05	817 18071 55	1 76259 77	2136 71	4044	71
30.0	0.51204 93223 60	815 41811 78	1 78396 48	2096 27	4115	72
30.5	0.52020 35035 38	813 63415 30	1 80492 75	2055 12	4187	72
31.0	0.52833 98450 68	811 82922 55	1 82547 87	2013 25	4259	71
31.5	0.53645 81373 23	810 00374 68	1 84561 12	1970 66	4330	75
32.0	0.54455 81747 91	808 15813 56	1 86531 78	1927 36	4405	70
32.5	0.55263 97561 47	806 29281 78	1 88459 14	1883 31	4475	74
33.0	0.56070 26843 25	804 40822 64	1 90342 45	1838 56	4549	69
33.5	0.56874 67665 89	802 50480 19	1 92181 01	1793 07	4618	78
34.0	0.57677 18146 08	800 58299 18	1 93974 08	1746 89	4696	67
34.5	0.58477 76445 26	798 64325 10	1 95720 97	1699 93	4763	79
35.0	0.59276 40770 36	796 68604 13	1 97420 90	1652 30	4842	70
35.5	0.60073 09374 49	794 71183 23	1 99073 20	1603 88	4912	70
36.0	0.60867 80557 72	792 72110 03	2 00677 08	1554 76	4982	79
36.5	0.61660 52667 75	790 71432 95	2 02231 84	1504 94	5061	69
37.0	0.62451 24100 70	788 69201 11	2 03736 78	1454 33	5130	73
37.5	0.63239 93301 81	786 65464 33	2 05191 11	1403 03	5203	76
38.0	0.64026 58766 14	784 60273 22	2 06594 14	1351 00	5279	70
38.5	0.64811 19039 36	782 53679 08	2 07945 14	1298 21	5349	74
39.0	0.65593 72718 44	780 45733 94	2 09243 35	1244 72	5423	70
39.5	0.66374 18452 38	778 36490 59	2 10488 07	1190 49	5493	78
40.0	0.67152 54942 97	776 26002 52	2 11678 56	1135 56	5571	66
40.5	0.67928 80945 49	774 14323 96	2 12814 12	1079 85	5637	79
41.0	0.68702 95269 45	772 01509 84	2 13893 97	1023 48	5716	65
41.5	0.69474 96779 29	769 87615 87	2 14917 45	966 32	5781	78
42.0	0.70244 84395 16	767 72698 42	2 15883 77	908 51	5859	65
42.5	0.71012 57093 58	765 56814 65	2 16792 28	849 92	5924	75
43.0	0.71778 13908 23	763 40022 37	2 17642 20	790 68	5999	70
43.5	0.72541 53930 60	761 22380 17	2 18432 88	730 69	6069	69
44.0	0.73302 76310 77	759 03947 29	2 19163 57	670 00	6138	71
44.5	0.74061 80258 06	756 84783 72	2 19833 57	608 62	6209	66
45.0	0.74818 65041 78	754 64950 15	2 20442 19	546 53	6275	73

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
21°.0	0.37063 43727 82	902 81836 07	1 44114 77	3387 00	+ 5	31
21.5	0.37966 25563 89	904 25950 84	1 47501 77	3387 05	−26	29
22.0	0.38870 51514 73	905 73452 61	1 50888 82	3386 79	55	35
22.5	0.39776 24967 34	907 24341 43	1 54275 61	3386 24	90	35
23.0	0.40683 49308 77	908 78617 04	1 57661 85	3385 34	125	40
23.5	0.41592 27925 81	910 36278 89	1 61047 19	3384 09	165	37
24.0	0.42502 64204 70	911 97326 08	1 64431 28	3382 44	202	52
24.5	0.43414 61530 78	913 61757 36	1 67813 72	3380 42	254	40
25.0	0.44328 23288 14	915 29571 08	1 71194 14	3377 88	294	54
25.5	0.45243 52859 22	917 00765 22	1 74572 02	3374 94	348	50
26.0	0.46160 53624 44	918 75337 24	1 77946 96	3371 46	398	55
26.5	0.47079 28961 68	920 53284 20	1 81318 42	3367 48	453	61
27.0	0.47999 82245 88	922 34602 62	1 84685 90	3362 95	514	63
27.5	0.48922 16848 50	924 19288 52	1 88048 85	3357 81	577	63
28.0	0.49846 36137 02	926 07337 37	1 91406 66	3352 04	640	71
28.5	0.50772 43474 39	927 98744 03	1 94758 70	3345 64	711	73
29.0	0.51700 42218 42	929 93502 73	1 98104 34	3338 53	784	74
29.5	0.52630 35721 15	931 91607 07	2 01442 87	3330 69	858	84
30.0	0.53562 27328 22	933 93049 94	2 04773 56	3322 11	942	82
30.5	0.54496 20378 16	935 97823 50	2 08095 67	3312 69	1024	89
31.0	0.55432 18201 66	938 05919 17	2 11408 36	3302 45	1113	91
31.5	0.56370 24120 83	940 17327 53	2 14710 81	3291 32	1204	100
32.0	0.57310 41448 36	942 32038 34	2 18002 13	3279 28	1304	98
32.5	0.58252 73486 70	944 50040 47	2 21281 41	3266 24	1402	108
33.0	0.59197 23527 17	946 71321 89	2 24547 65	3252 22	1510	109
33.5	0.60143 94849 06	948 95869 54	2 27799 87	3237 12	1619	117
34.0	0.61092 90718 60	951 23669 41	2 31036 99	3220 93	1736	118
34.5	0.62044 14388 01	953 54706 40	2 34257 92	3203 57	1854	126
35.0	0.62997 69094 41	955 88964 32	2 37461 49	3185 03	1980	130
35.5	0.63953 58058 73	958 26425 81	2 40646 52	3165 23	2110	137
36.0	0.64911 84484 54	960 67072 33	2 43811 75	3144 13	2247	138
36.5	0.65872 51556 87	963 10884 08	2 46955 88	3121 66	2385	148
37.0	0.66835 62440 95	965 57839 96	2 50077 54	3097 81	2533	152
37.5	0.67801 20280 91	968 07917 50	2 53175 35	3072 48	2685	158
38.0	0.68769 28198 41	970 61092 85	2 56247 83	3045 63	2843	174
38.5	0.69739 89291 26	973 17340 68	2 59293 46	3017 20	3017	159
39.0	0.70713 06631 94	975 76634 14	2 62310 66	2987 17	3176	173
39.5	0.71688 83266 08	978 38944 80	2 65297 83	2955 41	3349	182
40.0	0.72667 22210 88	981 04242 63	2 68253 24	2921 92	3531	188
40.5	0.73648 26453 51	983 72495 87	2 71175 16	2886 61	3719	193
41.0	0.74631 98949 38	986 43671 03	2 74061 77	2849 42	3912	200
41.5	0.75618 42620 41	989 17732 80	2 76911 19	2810 30	4112	205
42.0	0.76607 60353 21	991 94643 99	2 79721 49	2769 18	4317	219
42.5	0.77599 54997 20	994 74365 48	2 82490 67	2726 01	4536	211
43.0	0.78594 29362 68	997 56856 15	2 85216 68	2680 65	4747	230
43.5	0.79591 86218 83	1000 42072 83	2 87897 33	2633 18	4977	234
44.0	0.80592 28291 66	1003 29970 16	2 90530 51	2583 41	5211	238
44.5	0.81595 58261 82	1006 20500 67	2 93113 92	2531 30	5449	245
45.0	0.82601 78762 49	1009 13614 59	2 95645 22	2476 81	5694	255

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45°0	0.74818 65041 78	754 64950 15	2 20442 19	546 53	6275	73
45.5	0.75573 29991 93	752 44507 96	2 20988 72	483 78	6348	63
46.0	0.76325 74499 89	750 23519 24	2 21472 50	420 30	6411	70
46.5	0.77075 98019 13	748 02046 74	2 21892 80	356 19	6481	65
47.0	0.77824 00065 87	745 80153 94	2 22248 99	291 38	6546	67
47.5	0.78569 80219 81	743 57904 95	2 22540 37	225 92	6613	60
48.0	0.79313 38124 76	741 35364 58	2 22766 29	159 79	6673	70
48.5	0.80054 73489 34	739 12598 29	2 22926 08	93 06	6743	57
49.0	0.80793 86087 63	736 89672 21	2 23019 14	+ 25 63	6800	61
49.5	0.81530 75759 84	734 66653 07	2 23044 77	− 42 37	6861	66
50.0	0.82265 42412 91	732 43608 30	2 23002 40	110 98	6927	53
50.5	0.82997 86021 21	730 20605 90	2 22891 42	180 25	6980	57
51.0	0.83728 06627 11	727 97714 48	2 22711 17	250 05	7037	62
51.5	0.84456 04341 59	725 75003 31	2 22461 12	320 42	7099	46
52.0	0.85181 79344 90	723 52542 19	2 22140 70	391 41	7145	60
52.5	0.85905 31887 09	721 30401 49	2 21749 29	462 86	7205	47
53.0	0.86626 62288 58	719 08652 20	2 21286 43	534 91	7252	48
53.5	0.87345 70940 78	716 87365 77	2 20751 52	607 43	7300	51
54.0	0.88062 58306 55	714 66614 25	2 20144 09	680 43	7351	42
54.5	0.88777 24920 80	712 46470 16	2 19463 66	753 94	7393	44
55.0	0.89489 71390 96	710 27006 50	2 18709 72	827 87	7437	37
55.5	0.90199 98397 46	708 08296 78	2 17881 85	902 24	7474	45
56.0	0.90908 06694 24	705 90414 93	2 16979 61	976 98	7519	32
56.5	0.91613 97109 17	703 73435 32	2 16002 63	1052 17	7551	30
57.0	0.92317 70544 49	701 57432 69	2 14950 46	1127 68	7581	34
57.5	0.93019 27977 18	699 42482 23	2 13822 78	1203 49	7615	27
58.0	0.93718 70459 41	697 28659 45	2 12619 29	1279 64	7642	22
58.5	0.94415 99118 86	695 16040 16	2 11339 65	1356 06	7664	24
59.0	0.95111 15159 02	693 04700 51	2 09983 59	1432 70	7688	17
59.5	0.95804 19859 53	690 94716 92	2 08550 89	1509 58	7705	12
60.0	0.96495 14576 45	688 86166 03	2 07041 31	1586 63	7717	13
60.5	0.97184 00742 48	686 79124 72	2 05454 68	1663 80	7730	8
61.0	0.97870 79867 20	684 73670 04	2 03790 88	1741 10	7738	1
61.5	0.98555 53537 24	682 69879 16	2 02049 78	1818 48	7739	+ 3
62,0	0.99238 23416 40	680 67829 38	2 00231 30	1895 87	7742	− 9
62.5	0.99918 91245 78	678 67598 08	1 98335 43	1973 29	7733	7
63.0	1.00597 58843 86	676 69262 65	1 96362 14	2050 62	7726	10
63.5	1.01274 28106 51	674 72900 51	1 94311 52	2127 88	7716	23
64.0	1.01949 01007 02	672 78588 99	1 92183 64	2205 04	7693	20
64.5	1.02621 79596 01	670 86405 35	1 89978 60	2281 97	7673	27
65.0	1.03292 66001 36	668 96426 75	1 87696 63	2358 70	7646	31
65.5	1.03961 62428 11	667 08730 12	1 85337 93	2435 16	7615	40
66.0	1.04628 71158 23	665 23392 19	1 82902 77	2511 31	7575	40
66.5	1.05293 94550 42	663 40489 42	1 80391 46	2587 06	7535	46
67.0	1.05957 35039 84	661 60097 96	1 77804 40	2662 41	7489	55
67.5	1.06618 95137 80	659 82293 56	1 75141 99	2737 30	7434	57
68.0	1.07278 77431 36	658 07151 57	1 72404 69	2811 64	7377	65
68.5	1.07936 84582 93	656 34746 88	1 69593 05	2885 41	7312	60
69.0	1.08593 19329 81	654 65153 83	1 66707 64	2958 53	7243	75

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45°.0	0.82601 78762 49	1009 13614 59	2 95645 22	2476 81	56 94	255
45.5	0.83610 92377 08	1012 09259 81	2 98122 03	2419 87	59 49	257
46.0	0.84623 01636 89	1015 07381 84	3 00541 90	2360 38	62 06	264
46.5	0.85638 09018 73	1018 07923 74	3 02902 28	2298 32	64 70	276
47.0	0.86656 16942 47	1021 10826 02	3 05200 60	2233 62	67 46	278
47.5	0.87677 27768 49	1024 16026 62	3 07434 22	2166 16	70 24	282
48.0	0.88701 43795 11	1027 23460 84	3 09600 38	2095 92	73 06	296
48.5	0.89728 67255 95	1030 33061 22	3 11696 30	2022 86	76 02	294
49.0	0.90759 00317 17	1033 44757 52	3 13719 16	1946 84	78 96	308
49.5	0.91792 45074 69	1036 58476 68	3 15666 [illegible]	1867 88	82 04	303
50.0	0.92829 03551 37	1039 74142 68	3 17533 88	1785 84	85 07	322
50.5	0.93868 77694 05	1042 91676 56	3 19319 72	1700 77	88 29	316
51.0	0.94911 69370 61	1046 10996 28	3 21020 49	1612 48	91 45	329
51.5	0.95957 80366 89	1049 32016 77	3 22632 97	1521 03	94 74	331
52.0	0.97007 12383 66	1052 54649 74	3 24154 00	1426 29	98 05	331
52.5	0.98059 67033 40	1055 78803 74	3 25580 29	1328 24	101 36	349
53.0	0.99115 45837 14	1059 04384 03	3 26908 53	1226 88	104 85	335
53.5	1.00174 50221 17	1062 31292 56	3 28135 41	1122 03	108 20	355
54.0	1.01236 81513 73	1065 59427 97	3 29257 44	1013 83	111 75	343
54.5	1.02302 40941 70	1068 88685 41	3 30271 27	902 08	115 18	362
55.0	1.03371 29627 11	1072 18956 68	3 31173 35	786 90	118 80	349
55.5	1.04443 48583 79	1075 50130 03	3 31960 25	668 10	122 29	365
56.0	1.05518 98713 82	1078 82090 28	3 32628 35	545 81	125 94	351
56.5	1.06597 80804 10	1082 14718 63	3 33174 16	419 87	129 45	364
57.0	1.07679 95522 73	1085 47892 79	3 33594 03	290 42	133 09	359
57.5	1.08765 43415 52	1088 81486 82	3 33884 45	157 33	136 68	358
58.0	1.09854 24902 34	1092 15371 27	3 34041 78	+ 20 65	140 26	357
58.5	1.10946 40273 61	1095 49413 05	3 34062 43	—119 61	143 83	355
59.0	1.12041 89686 66	1098 83475 48	3 33942 82	263 44	147 38	354
59.5	1.13140 73162 14	1102 17418 30	3 33679 38	410 82	150 92	346
60.0	1.14242 90580 44	1105 51097 68	3 33268 56	561 74	154 38	345
60.5	1.15348 41678 12	1108 84366 24	3 32706 82	716 12	157 83	339
61.0	1.16457 26044 36	1112 17073 06	3 31990 70	873 95	161 22	329
61.5	1.17569 43117 42	1115 49063 76	3 31116 75	1035 17	164 51	327
62.0	1.18681 92181 18	1118 80180 51	3 30081 58	1199 68	167 78	315
62.5	1.19803 72361 69	1122 10262 09	3 28881 90	1367 46	170 93	307
63.0	1.20925 82623 78	1125 39143 99	3 27514 44	1538 39	174 00	295
63.5	1.22051 21767 77	1128 66658 43	3 25976 05	1712 39	176 95	284
64.0	1.23179 88426 20	1131 92634 48	3 24263 66	1889 34	179 79	273
64.5	1.24311 81060 68	1135 16898 14	3 22374 32	2069 13	182 52	259
65.0	1.25446 97958 82	1138 39272 46	3 20305 19	2251 65	185 11	240
65.5	1.26585 37231 28	1141 59577 65	3 18053 54	2436 76	187 51	229
66.0	1.27726 96808 93	1144 77631 19	3 15616 78	2624 27	189 80	209
66.5	1.28871 74440 12	1147 93247 97	3 12992 51	2814 07	191 89	192
67.0	1.30019 67688 09	1151 06240 48	3 10178 44	3005 96	193 81	169
67.5	1.31170 73928 57	1154 16418 92	3 07172 48	3199 77	195 50	155
68.0	1.32324 90347 49	1157 23591 40	3 03972 71	3395 27	197 05	124
68.5	1.33482 13938 89	1160 27564 11	3 00577 44	3592 32	198 29	110
69.0	1.34642 41503 00	1163 28141 55	2 96985 12	3790 61	199 39	80

φ.	E.	Diff. I.	II.	III	IV.	V.
69°.0	1.08593 19329 81	654 65153 83	1 66707 64	2958 53	72 43	75
69.5	1.09247 84483 64	652 98446 19	1 63749 11	3030 96	71 68	80
70.0	1.09900 82929 83	651 34697 08	1 60718 15	3102 64	70 88	87
70.5	1.10552 17626 91	649 73978 93	1 57615 51	3173 52	70 01	97
71.0	1.11201 91605 84	648 16363 42	1 54441 99	3243 53	69 04	91
71.5	1.11850 07969 26	646 61921 43	1 51198 46	3312 57	68 13	111
72.0	1.12496 69890 69	645 10722 97	1 47885 89	3380 70	67 02	110
72.5	1.13141 80613 66	643 62837 08	1 44505 19	3447 72	65 92	118
73.0	1.13785 83450 74	642 18331 89	1 41057 47	3513 64	64 74	121
73.5	1.14427 61782 63	640 77274 42	1 37543 83	3578 38	63 53	130
74.0	1.15068 39057 06	639 39730 59	1 33965 45	3641 91	62 23	136
74.5	1.15707 78787 65	638 05765 14	1 30323 54	3704 14	60 87	146
75.0	1.16345 84552 79	636 75441 60	1 26619 40	3765 01	59 41	140
75.5	1.16982 59994 39	635 48822 20	1 22854 39	3824 42	58 01	158
76.0	1.17618 08816 59	634 25967 81	1 19029 97	3882 43	56 43	164
76.5	1.18252 34784 40	633 06937 84	1 15147 54	3938 86	54 79	158
77.0	1.18885 41722 24	631 91790 30	1 11208 68	3993 65	53 21	177
77.5	1.19517 33512 54	630 80581 62	1 07215 03	4046 86	51 44	178
78.0	1.20148 14094 16	629 73366 59	1 03168 17	4098 30	49 66	178
78.5	1.20777 87460 75	628 70198 42	99069 87	4147 96	47 88	192
79.0	1.21406 57659 17	627 71128 55	94921 91	4195 84	45 96	193
79.5	1.22034 28787 72	626 76206 64	90726 07	4241 80	44 03	201
80.0	1.22661 04994 36	625 85480 57	86484 27	4285 83	42 02	200
80.5	1.23286 90474 93	624 98996 30	82198 44	4327 85	40 02	211
81.0	1.23911 89471 23	624 16797 86	77870 59	4367 87	37 91	215
81.5	1.24536 06269 09	623 38927 27	73502 72	4405 78	35 76	214
82.0	1.25159 45196 36	622 65424 55	69096 94	4441 54	33 62	222
82.5	1.25782 10620 91	621 96327 61	64655 40	4475 16	31 40	231
83.0	1.26404 06948 52	621 31672 21	60180 24	4506 56	29 09	222
83.5	1.27025 38620 73	620 71491 97	55673 68	4535 65	26 87	240
84.0	1.27646 10112 70	620 15818 29	51138 03	4562 52	24 47	231
84.5	1.28266 25930 99	619 64680 26	46575 51	4586 99	22 16	238
85.0	1.28885 90611 25	619 18104 75	41988 52	4609 15	19 78	248
85.5	1.29505 08716 00	618 76116 23	37379 37	4628 93	17 30	235
86.0	1.30123 84832 23	618 38736 86	32750 44	4646 23	14 95	251
86.5	1.30742 23569 09	618 05986 42	28104 21	4661 18	12 44	247
87.0	1.31360 29555 51	617 77882 21	23443 03	4673 62	9 97	245
87.5	1.31978 07437 72	617 54439 18	18769 41	4683 59	7 52	254
88.0	1.32595 61876 90	617 35669 77	14085 82	4691 11	4 98	
88.5	1.33212 97546 67	617 21583 95	9394 71	4696 09		
89.0	1.33830 19130 62	617 12189 24	4698 62			
89.5	1.34447 31319 86	617 07490 62				
90.0	1.35064 38810 48					

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
69°0	1.34642 41503 00	1163 28141 55	2 96985 12	3790 61	199 39	80
69.5	1.35805 69644 55	1166 25126 67	2 93194 51	3990 00	200 19	53
70.0	1.36971 94771 22	1169 18321 18	2 89204 51	4190 19	200 72	+ 35
70.5	1.38141 13092 40	1172 07525 69	2 85014 32	4390 91	201 07	− 2
71.0	1.39313 20618 09	1174 92540 01	2 80623 41	4591 98	201 05	21
71.5	1.40488 13158 10	1177 73163 42	2 76031 43	4793 03	200 84	61
72.0	1.41665 86321 52	1180 49194 85	2 71238 40	4993 87	200 23	81
72.5	1.42846 35516 37	1183 20433 25	2 66244 53	5194 10	199 42	120
73.0	1.44029 55949 62	1185 86677 78	2 61050 43	5393 52	198 22	146
73.5	1.45215 42627 40	1188 47728 21	2 55656 91	5591 74	196 76	181
74.0	1.46403 90355 61	1191 03385 12	2 50065 17	5788 50	194 95	218
74.5	1.47594 93740 73	1193 53450 29	2 44276 67	5983 45	192 77	244
75.0	1.48788 47191 02	1195 97726 96	2 38293 22	6176 22	190 33	278
75.5	1 49984 44917 98	1198 36020 18	2 32117 00	6366 55	187 55	322
76.0	1.51182 80938 16	1200 68137 18	2 25750 45	6554 10	184 33	348
76.5	1.52383 49075 34	1202 93887 63	2 19196 35	6738 43	180 85	384
77 0	1.53586 42962 97	1205 13083 98	2 12457 92	6919 28	177 01	415
77.5	1.54791 56046 95	1207 25541 90	2 05538 64	7096 29	172 81	453
78.0	1.55998 81588 85	1209 31080 54	1 98442 35	7269 10	168 29	492
78.5	1.57208 12669 39	1211 29522 89	1 91173 25	7437 39	163 37	515
79.0	1.58419 42192 28	1213 20696 14	1 83735 86	7600 76	158 22	560
79.5	1.59632 62888 42	1215 04432 00	1 76135 10	7758 98	152 62	586
80.0	1.60847 67320 42	1216 80567 10	1 68376 12	7911 60	146 76	615
80.5	1.62064 47887 52	1218 48943 22	1 60464 52	8058 36	140 61	664
81.0	1.63282 96830 74	1220 09407 74	1 52406 16	8198 97	134 05	673
81.5	1.64503 06238 48	1221 61893 90	1 44207 19	8333 02	127 32	715
82.0	1.65724 68052 38	1223 06021 09	1 35874 17	8460 34	120 17	733
82.5	1.66947 74073 47	1224 41895 26	1 27413 83	8580 51	112 84	757
83.0	1.68172 15968 73	1225 69309 09	1 18833 32	8693 35	105 27	793
83.5	1.69397 85277 82	1226 88142 41	1 10139 97	8798 62	97 34	807
84.0	1.70624 73420 23	1227 98282 38	1 01341 35	8895 96	89 27	830
84.5	1.71852 71702 61	1228 99623 73	92445 39	8985 23	80 97	845
85.0	1.73081 71326 34	1229 92069 12	83460 16	9066 20	72 52	874
85.5	1.74311 63395 46	1230 75529 28	74393 96	9138 72	63 78	881
86.0	1.75542 38924 74	1231 49923 24	65255 24	9202 50	54 97	892
86.5	1.76773 88847 98	1232 15178 48	56052 74	9257 47	46 05	907
87.0	1.78006 04026 46	1232 71231 22	46795 27	9303 52	36 98	922
87.5	1.79238 75257 68	1233 18026 49	37491 75	9340 50	27 76	918
88.0	1.80471 93284 17	1233 55518 24	28151 25	9368 26	18 68	
88.5	1.81705 48802 41	1233 83669 49	18782 99	9386 84		
89.0	1.82939 32471 90	1234 02452 48	9396 15			
89.5	1.84173 34924 38	1234 11848 63				
90.0	1.85407 46773 01					

TABLE III,

Contenant les Sinus naturels à quinze décimales, et leurs Logarithmes à quatorze d
males, pour tous les arcs de quinze en quinze minutes, depuis 0° jusqu'à 90°.

Arc	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
0° 00′	0.00000 00000 00000	Infini-négatif.	90° 00′	1.00000 00000 00000	0.00000 00000
0.15	0.00436 33092 84747	7.63981 59982 0304	89.45	0.99999 04807 20734	9.99999 58658
0.30	0.00872 65354 98374	7.94084 18596 7687	89.30	0.99996 19230 64171	9.99998 34630
0.45	0.01308 95955 71345	8.11692 62283 8061	89.15	0.99991 43275 74007	9.99996 27913
1.00	0.01745 24064 37284	8.24185 53184 2289	89.00	0.99984 76951 56391	9.99993 38498
1.15	0.02181 48850 34561	8.33875 29285 7723	88.45	0.99976 20270 79909	9.99989 66373
1.30	0.02617 69483 07873	8.41791 90153 8883	88.30	0.99965 73249 75557	9.99985 11526
1.45	0.03053 85132 09823	8.48484 78892 8599	88.15	0.99953 35908 36713	9.99979 73938
2.00	0.03489 94967 02501	8.54281 91638 9609	88.00	0.99939 08270 19096	9.99973 53589
2.15	0.03925 98157 59069	8.59394 82571 8436	87.45	0.99922 90362 40723	9.99966 50455
2.30	0.04361 93873 65336	8.63967 95616 1593	87.30	0.99904 82215 81858	9.99958 64510
2.45	0.04797 81285 21344	8.68104 33034 7541	87.15	0.99884 83864 84951	9.99949 95724
3.00	0.05233 59562 42944	8.71880 01636 7602	87.00	0.99862 95347 54574	9.99940 44062
3.15	0.05669 27875 63378	8.75352 78116 1488	86.45	0.99839 16705 57349	9.99930 09490
3.30	0.06104 85395 34857	8.78567 52787 7168	86.30	0.99813 47984 21867	9.99918 91968
3.45	0.06540 31292 30143	8.81559 85277 5659	86.15	0.99785 89232 38604	9.99906 91453
4.00	0.06975 64737 44125	8.84358 45184 8165	86.00	0.99756 40502 59824	9.99894 07898
4.15	0.07410 84901 95399	8.86986 79655 2043	85.45	0.99725 01850 99486	9.99880 41255
4.30	0.07845 90957 27845	8.89464 32984 0645	85.30	0.99691 73337 33128	9.99865 91472
4.45	0.08280 82075 12204	8.91807 33838 9369	85.15	0.99656 55024 97761	9.99850 58493
5.00	0.08715 57427 47658	8.94029 60083 3018	85.00	0.99619 46980 91740	9.99834 42260
5.15	0.09150 16186 63402	8.96142 87768 0277	84.45	0.99580 49275 74662	9.99817 42709
5.30	0.09584 57525 20224	8.98157 28715 3959	84.30	0.99539 61983 67179	9.99799 59777
5.45	0.10018 80616 12076	9.00081 59741 7702	84.15	0.99496 85182 50912	9.99780 93394
6.00	0.10452 84632 67654	9.01923 45656 3272	84.00	0.99452 18953 68273	9.99761 43489
6.15	0.10886 68748 51965	9.03689 57561 7987	83.45	0.99405 63382 22320	9.99741 09987
6.30	0.11320 32137 67907	9.05385 87563 7391	83.30	0.99357 18556 76588	9.99719 92810
6.45	0.11753 73974 57838	9.07017 60702 2885	83.15	0.99306 84569 54926	9.99697 91875
7.00	0.12186 93434 05148	9.08589 44712 9169	83.00	0.99254 61516 41322	9.99675 07098
7.15	0.12619 89691 35830	9.10105 58073 6095	82.45	0.99200 49496 79715	9.99651 38391
7.30	0.13052 61922 20052	9.11569 76687 2611	82.30	0.99144 48613 73810	9.99626 85661
7.45	0.13485 09302 73723	9.12985 39467 9450	82.15	0.99086 58973 86882	9.99601 48815
8.00	0.13917 31009 60065	9.14355 53039 9954	82.00	0.99026 80687 41570	9.99575 27754
8.15	0.14349 26219 91179	9.15682 95713 7739	81.45	0.98965 13868 19670	9.99548 22375
8.30	0.14780 94111 29611	9.16970 20867 7564	81.30	0.98901 58633 61917	9.99520 32575
8.45	0.15212 33861 89917	9.18219 59840 2341	81.15	0.98836 15104 67761	9.99491 58244
9.00	0.15643 44650 40231	9.19433 24413 5701	81.00	0.98768 83405 95138	9.99461 99270
9.15	0.16074 25656 03826	9.20613 08957 9906	80.45	0.98699 63665 60232	9.99431 55538
9.30	0.16504 76058 60678	9.21760 92289 4481	80.30	0.98628 56015 37231	9.99400 26930
9.45	0.16934 95038 49025	9.22878 39286 1014	80.15	0.98555 60590 58078	9.99368 13322
10.00	0.17364 81776 66930	9.23967 02300 1167	80.00	0.98480 77530 12208	9.99335 14589

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
10°00'	0.17364 81776 66930	9.23967 02300 1167	80°00'	0.98480 77530 12208	9.99335 14589 6992
10.15	0.17794 35454 73842	9.25028 22395 1085	79.45	0.98404 06976 46291	9.99301 30602 1761
10.30	0.18223 55254 92147	9.26063 30434 4538	79.30	0.98325 49075 63955	9.99266 61227 1221
10.45	0.18652 40360 08734	9.27073 48041 5205	79.15	0.98245 03977 25510	9.99231 06328 0020
11.00	0.19080 89953 76545	9.28059 88449 5041	79.00	0.98162 71834 47664	9.99194 65764 6900
11.15	0.19509 03220 16128	9.29023 57255 7476	78.45	0.98078 52804 03230	9.99157 39393 4436
11.30	0.19936 79344 17197	9.29965 53093 1415	78.30	0.97992 47046 20830	9.99119 27066 8845
11.45	0.20364 17511 40178	9.30886 68229 3232	78..15	0.97904 54724 84584	9.99080 28633 9713
12.00	0.20791 16908 17759	9.31787 89102 7855	78.00	0.97814 76007 33806	9.99040 43939 9773
12.15	0.21217 76721 56446	9.32669 96803 6916	77.45	0.97723 11064 62679	9.98999 72826 4651
12.30	0.21643 96139 38103	9.33533 67506 1310	77.30	0.97629 60071 19933	9.98958 15131 2607
12.45	0.22069 74350 21501	9.34379 72857 5582	77.15	0.97534 23205 08513	9.98915 70688 4262
13.00	0.22495 10543 43865	9.35208 80330 4125	77.00	0.97437 00647 85235	9.98872 39328 2340
13.15	0.22920 03909 22414	9.36021 53540 2532	76.45	0.97337 92584 60448	9.98828 20877 1379
13.30	0.23344 53638 55905	9.36818 52534 1441	76.30	0.97236 99203 97677	9.98783 15157 7460
13.45	0.23768 58923 26173	9.37600 34052 5927	76.15	0.97134 20698 13261	9.98737 21988 7897
14.00	0.24192 18955 99668	9.38367 51767 8594	76.00	0.97029 57262 75997	9.98690 41185 0959
14.15	0.24615 32930 28993	9.39120 56501 2196	75.45	0.96923 09097 06754	9.98642 72557 5545
14.30	0.25038 00040 54442	9.39859 96421 2791	75.30	0.96814 76403 78108	9.98594 15913 0865
14.45	0.25460 19482 05528	9.40586 17225 3708	75.15	0.96704 59389 13943	9.98544 71054 6142
15.00	0.25881 90451 02521	9.41299 62305 6934	75.00	0.96592 58262 89068	9.98494 37781 0270
15.15	0.26303 12144 57975	9.42000 72901 7208	74.45	0.96478 73238 28813	9.98443 15887 1466
15.30	0.26723 83760 78257	9.42689 88240 2170	74.30	0.96363 04532 08623	9.98391 05163 6931
15.45	0.27144 04498 65074	9.43367 45664 0481	74.15	0.96245 52364 53647	9.98338 05397 2518
16.00	0.27563 73558 16999	9.44033 80750 8540	74.00	0.96126 16959 38319	9.98284 16370 2333
16.15	0.27982 90140 30992	9.44689 27422 5119	73 45	0.96004 98543 85929	9.98229 37860 8385
16.30	0.28401 53447 03923	9.45334 18046 2526	73.30	0.95881 97348 68193	9.98173 69643 0211
16.45	0.28819 62681 34089	9.45968 83528 1657	73.15	0.95757 13608 04815	9.98117 11486 4473
17.00	0.29237 17047 22737	9.46593 53399 7743	73.00	0.95630 47559 63036	9.98059 63156 4586
17.15	0.29654 15749 75571	9.47208 55898 3093	72.45	0.95501 99444 57187	9 98001 24414 0283
17.30	0.30070 57995 04273	9.47814 18041 1781	72.30	0.95371 69507 48227	9.97941 95015 7227
17.45	0.30486 42990 28011	9.48410 65695 1812	72.15	0.95239 57996 43258	9 97881 74713 6559
18 00	0 30901 69943 74947	9.48998 23640 8607	72.00	0.95105 65162 95154	9.97820 63255 4501
18.15	0.31316 38064 83750	9.49577 15632 4326	71.45	0.94969 91262 01877	9.97758 60384 1883
18.30	0.31730 46564 05092	9.50147 64453 6292	71.30	0.94832 36552 06200	9.97695 65838 3711
18.45	0.32143 94653 03162	9.50709 91969 7982	71.15	0.94693 01294 95106	9.97631 79351 8679
19.00	0.32556 81544 57157	9.51264 19176 5476	71.00	0.94551 85755 99317	9.97567 00653 8733
19.15	0.32969 06452 62787	9.51810 66245 2142	70.45	0.94408 90203 92784	9.97501 29468 8555
19.30	0.33380 68592 33771	9.52349 52565 3965	70.30	0.94264 14910 93178	9 97434 65516 5086
19.45	0.33791 67180 03327	9.52880 96784 7803	70.15	0.94117 60152 56370	9.97367 08511 7025
20.00	0.34202 01433 25669	9 53405 16846 4555	70.00	0.93969 26207 85908	9.97298 58164 4290
20.15	0.34611 70570 77493	9 53922 30023 9179	69.45	0.93819 13359 22484	9.97229 14179 7541
20.30	0.35020 73812 59468	9.54432 52953 9244	69.30	0 93667 21892 48398	9.97158 76257 7583
20.45	0.35429 10379 97716	9.54936 01667 3518	69.15	0.93513 52096 86012	9.97087 44093 4863
21.00	0 35836 79495 45300	9.55432 91618 2157	69.00	0.93358 04264 97202	9 97015 17376 8881
21.15	0.36243 80382 83702	9.55923 37710 9582	68.45	0.93200 78692 82799	9.96941 95792 7638
21.30	0.36650 12267 24297	9.56407 54326 1623	68.30	0.93041 75679 82025	9.96867 79020 7033
21.45	0.37055 74375 09836	9.56885 55344 7519	68.15	0.92880 95528 71924	9.96792 66735 0290
22.00	0.37460 65934 15912	9.57357 54170 8339	68.00	0.92718 38545 66787	9 96716 58604 7322
22.15	0.37864 86173 52433	9.57823 63753 2332	67.45	0.92554 05040 17566	9.96639 54293 4111
22.30	0.38268 34323 65090	9.58283 96605 8310	67.30	0.92387 95325 11287	9.96561 53459 2094

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
22° 30′	0.38268 34323 65090	9.58283 96605 8310	67° 30′	0.92387 95325 11287	9.96561 53459 20
22.45	0.38671 09616 36821	9.58738 64826 7796	67.15	0.92220 09716 70452	9.96482 55754 74
23.00	0.39073 11284 89274	9.59187 80116 6658	67.00	0.92050 48534 52440	9.96402 60827 06
23.15	0.39474 38563 84267	9.59631 53795 6909	66.45	0.91879 12101 48898	9.96321 68317 53
23.30	0.39874 90689 25246	9.60069 96819 9343	66.30	0.91706 00743 85124	9.96239 77861 81
23.45	0.40274 66898 58737	9.60503 19796 7602	66.15	0.91531 14791 19447	9.96156 89089 77
24.00	0.40673 66430 75800	9.60931 32999 4026	66.00	0.91354 54576 42601	9.96073 01625 39
24.15	0.41071 88526 13477	9.61354 46380 8154	65.45	0.91176 20435 77089	9.95988 15086 72
24.30	0.41469 32426 56239	9.61772 69586 7965	65.30	0.90996 12708 76543	9.95902 29085 82
24.45	0.41865 97375 37428	9.62186 11968 4516	65.15	0.90814 31738 25081	9.95815 43228 60
25.00	0.42261 82617 40699	9.62594 82594 0315	65.00	0.90630 77870 36650	9.95727 57114 86
25.15	0.42656 87399 01458	9.62998 90260 1791	64.45	0.90445 51454 54368	9.95638 70338 10
25.30	0.43051 10968 08295	9.63398 43502 6242	64.30	0.90258 52843 49861	9.95548 82485 52
25.45	0.43444 52574 04417	9.63793 50606 3514	64.15	0.90069 82393 22588	9.95457 93137 89
26.00	0.43837 11467 89077	9.64184 19615 2863	64.00	0.89879 40462 99167	9.95366 01869 46
26.15	0.44228 86902 19001	9.64570 58341 5079	63.45	0.89687 27415 32688	9.95273 08247 93
26.30	0.44619 78131 09809	9.64952 74374 0309	63.30	0.89493 43616 02025	9.95179 11834 28
26.45	0.45009 84410 37435	9.65330 75087 1710	63.15	0.89297 89434 11137	9.95084 12182 74
27.00	0.45399 04997 39547	9.65704 67648 5299	63.00	0.89100 65241 88368	9.94988 08840 69
27.15	0.45787 39151 16957	9.66074 59026 5972	62.45	0.88901 71414 85736	9.94891 01348 51
27.30	0.46174 86132 35034	9.66440 55998 0202	62.30	0.88701 08331 78222	9.94792 89239 58
27.45	0.46561 45203 25111	9.66802 65154 5353	62.15	0.88498 76374 63042	9.94693 72040 09
28.00	0.46947 15627 85891	9.67160 92909 5951	62.00	0.88294 75928 58927	9.94593 49268 98
28.15	0.47331 96671 84843	9.67515 45504 6912	61.45	0.88089 07382 05385	9.94492 20437 84
28.30	0.47715 87602 59609	9.67866 29015 4139	61.30	0.87881 71126 61965	9.94389 85050 78
28.45	0.48098 87689 19388	9.68213 49357 2254	61.15	0.87672 67557 07508	9.94286 42604 36
29.00	0.48480 96202 46337	9.68557 12291 0054	61.00	0.87461 97071 39396	9.94181 92587 45
29.15	0.48862 12414 96955	9.68897 23428 3476	60.45	0.87249 60070 72797	9.94076 34481 12
29.30	0.49242 35601 03467	9.69233 88236 6248	60.30	0.87035 56959 39900	9.93969 67758 53
29.45	0.49621 65036 75208	9.69567 12043 8578	60.15	0.86819 88144 89142	9.93861 91884 81
30.00	0.50000 00000 00000	9.69897 00043 3602	60.00	0.86602 54037 84439	9.93753 06316 95
30.15	0.50377 39770 45526	9.70223 57298 2067	59.45	0.86383 55052 04396	9.93643 10503 68
30.30	0.50753 83629 60704	9.70546 88745 5072	59.30	0.86162 91604 41526	9.93532 03885 31
30.45	0.51129 30860 77052	9.70866 99200 5123	59.15	0.85940 64115 01453	9.93419 85893 63
31.00	0.51503 80749 10054	9.71183 93360 5499	59.00	0.85716 73007 02112	9.93306 55951 79
31.15	0.51877 32581 60521	9.71497 75808 8030	58.45	0.85491 18706 72947	9.93192 13474 14
31.30	0.52249 85647 15949	9.71808 51017 9397	58.30	0.85264 01643 54092	9.93076 57866 11
31.45	0.52621 39236 51870	9.72116 23353 5965	58.15	0.85035 22249 95563	9.92959 88524 04
32.00	0.52991 92642 33205	9.72420 97077 7271	58.00	0.84804 80961 56426	9.92842 04835 10
32.15	0.53361 45159 15612	9.72722 76351 8188	57.45	0.84572 78217 03973	9.92723 06177 07
32.30	0.53729 96083 46824	9.73021 65239 9902	57.30	0.84339 14458 12886	9.92602 91918 23
32.45	0.54097 44713 67994	9.73317 67711 9604	57.15	0.84103 90129 64393	9.92481 61417 22
33.00	0.54463 90350 15027	9.73610 87645 9135	57.00	0.83867 05679 45424	9.92359 14022 83
33.15	0.54829 32295 19914	9.73901 28831 2531	56.45	0.83628 61558 47760	9.92235 49073 92
33.30	0.55193 69853 12058	9.74188 94971 2528	56.30	0.83388 58220 67168	9.92110 65899 17
33.45	0.55557 02330 19602	9.74473 89685 6011	56.15	0.83146 96123 02545	9.91984 63816 96
34.00	0.55919 29034 70747	9.74756 16512 8727	56.00	0.82903 75725 55042	9.91857 42135 21
34.15	0.56280 49276 95069	9.75035 78912 8829	55.45	0.82658 97491 27189	9.91729 00151 18
34.30	0.56640 62369 24833	9.75312 80268 9774	55.30	0.82412 61886 22016	9.91599 37151 27
34.45	0.56999 67625 96303	9.75587 23890 2242	55.15	0.82164 69379 42164	9.91468 52410 89
35.00	0.57337 64363 51046	9.75859 13013 5406	55.00	0.81915 20442 88992	9.91336 45194 24

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
°00′	0.57357 64363 51046	9.75859 13013 5406	55°00′	0.81915 20442 88992	9.91336 45194 2486
.15	0.57714 51900 37234	9.76128 50805 7353	54.45	0.81664 15551 61679	9.91203 14754 1335
.30	0.58070 29557 10940	9.76395 40365 4769	54.30	0.81411 55183 56319	9.91068 60331 7566
.45	0.58424 96656 37434	9.76659 84725 2028	54.15	0.81157 39819 65012	9.90932 81156 5285
.00	0.58778 52522 92473	9.76921 86852 9506	54.00	0.80901 69943 74947	9.90795 76445 8597
.15	0.59130 96483 63582	9.77181 49654 1364	53.45	0.80644 46042 67483	9.90657 45404 9465
.30	0.59482 27867 51341	9.77438 75973 2607	53.30	0.80385 68606 17217	9.90517 87226 5581
.45	0.59832 46005 70659	9.77693 68595 5686	53.15	0.80125 38126 91061	9.90377 01090 8127
.00	0.60181 50231 52048	9.77946 30248 6401	53.00	0.79863 55100 47293	9.90234 86164 9534
.15	0.60529 39880 42894	9.78196 63603 9399	52.45	0.79600 20025 34622	9.90091 41603 1134
.30	0.60876 14290 08721	9.78444 71278 3059	52.30	0.79335 33402 91235	9.89946 66546 0810
.45	0.61221 72800 34449	9.78690 55835 3919	52.15	0.79068 95737 43843	9.89800 60121 0548
.00	0.61566 14753 25658	9.78934 19787 0607	52.00	0.78801 07536 06722	9.89653 21441 3954
.15	0.61909 39493 09834	9.79175 65594 7385	51.45	0.78531 69308 80745	9.89504 49606 3677
.30	0.62251 46366 37620	9.79414 95670 7095	51.30	0.78260 81568 52414	9.89354 43700 8847
.45	0.62592 34721 84059	9.79652 12379 3908	51.15	0.77988 44830 92882	9.89203 02795 2301
.00	0.62932 03910 49837	9.79887 18038 5449	51.00	0.77714 59614 56971	9.89050 25944 7926
15	0.63270 53285 62516	9.80120 14920 4656	50.45	0.77439 26440 82186	9.88896 12189 7791
30	0.63607 82202 77764	9.80351 05253 1226	50.30	0.77162 45833 87720	9.88740 60554 9276
45	0.63943 90019 80585	9.80579 91221 2705	50.15	0.76884 18320 73460	9.88583 70049 2118
00	0.64278 76096 86539	9.80806 74967 5243	50.00	0.76604 44431 18978	9.88425 39665 5351
15	0.64612 39796 42964	9.81031 58593 3976	49.45	0.76323 24697 82529	9.88265 68380 4223
30	0.64944 80483 30184	9.81254 44160 3118	49.30	0.76040 59656 00031	9.88104 55153 6992
45	0.65275 97524 62723	9.81475 33690 5738	49.15	0.75756 49843 84050	9.87941 98928 1645
00	0.65605 90289 90507	9.81694 29168 3225	49.00	0.75470 95802 22772	9.87777 98629 2565
15	0.65934 58151 00069	9.81911 32540 4471	48.45	0.75183 98074 78977	9.87612 53164 7059
30	0.66262 00482 15738	9.82126 45717 4779	48.30	0.74895 57207 89002	9.87445 61424 1850
45	0.66588 16660 00834	9.82339 70574 4506	48.15	0.74605 73750 61700	9.87277 22278 9429
00	0.66913 06063 58858	9.82551 08951 7436	48.00	0.74314 48254 77394	9.87107 34581 4351
15	0.67236 68074 34668	9.82760 62655 8868	47.45	0.74021 81274 86832	9.86935 97164 9418
30	0.67559 02076 15660	9.82968 33460 3618	47.30	0.73727 73368 10124	9.86763 08843 1734
45	0.67880 07455 52942	9.83174 23106 3545	47.15	0.73432 25094 35686	9.86588 68409 8715
00	0.68199 83600 62499	9.83378 33303 5054	47.00	0.73135 37016 19171	9.86412 74638 3939
15	0.68518 29903 26359	9.83580 65730 6302	46.45	0.72837 09698 82400	9.86235 26281 2903
30	0.68835 45756 93754	9.83781 22036 4207	46.30	0.72537 43710 12288	9.85056 22069 8667
45	0.69151 30557 82269	9.83980 03840 1245	46.15	0.72236 39620 59756	9.85875 60713 7384
00	0.69465 83704 58997	9.84177 12732 2059	46.00	0.71933 98003 38651	9.85693 40900 3701
15	0.69779 04598 41680	9.84372 50274 9899	45.45	0.71630 19434 24654	9.85509 61294 6024
30	0.70090 92642 99851	9.84566 18003 2841	45.30	0.71325 04491 54182	9.85324 20538 1683
45	0.70401 47244 55969	9.84758 17424 9879	45.15	0.71018 53756 23285	9.85137 17249 1927
00	0.70710 67811 86548	9.84948 50021 6801	45.00	0 70710 67811 86548	9.84948 50021 6801

TABLE IV.

Valeurs de log-tang $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ pour tous les angles φ de 30 en 30 minutes, depuis jusqu'à 90°, calculées à douze décimales, avec leurs différences premières, second troisièmes, quatrièmes et cinquièmes.

φ.	l tang $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°00′	0.00000 00000 00	872 67570 24	6646 36	6648 87	5 09	251
0.30	0.00872 67570 24	872 74216 60	13295 23	6653 96	7 60	253
1.00	0.01745 41786 84	872 87511 83	19949 19	6661 56	10 13	259
1.30	0.02618 29298 67	873 07461 02	26610 75	6671 69	12 72	254
2.00	0.03491 36759 69	873 34071 77	33282 44	6684 41	15 26	261
2.30	0.04364 70831 46	873 67354 21	39966 85	6699 67	17 87	256
3.00	0.05238 38185 67	874 07321 06	46666 52	6717 54	20 43	264
3.30	0.06112 45506 73	874 53987 58	53384 06	6737 97	23 07	263
4.00	0.06986 99494 31	875 07371 64	60122 03	6761 04	25 70	269
4.30	0.07862 06865 95	875 67493 67	66883 07	6786 74	28 39	264
5.00	0.08737 74359 62	876 34376 74	73669 81	6815 13	31 03	276
5.30	0.09614 08736 36	877 08046 55	80484 94	6846 16	33 79	272
6.00	0.10491 16782 91	877 88531 49	87331 10	6879 95	36 51	282
6.30	0.11369 05314 40	878 75862 59	94211 05	6916 46	39 33	281
7.00	0.12247 81176 99	879 70073 64	1 01127 51	6955 79	42 14	284
7.30	0.13127 51250 63	880 71201 15	1 08083 30	6997 93	44 98	294
8.00	0.14008 22451 78	881 79284 45	1 15081 23	7042 91	47 92	294
8.30	0.14890 01736 23	882 94365 68	1 22124 14	7090 83	50 86	299
9.00	0.15772 96101 91	884 16489 82	1 29214 97	7141 69	53 85	311
9.30	0.16657 12591 73	885 45704 79	1 36356 66	7195 54	56 96	304
10.00	0.17542 58296 52	886 82061 45	1 43552 20	7252 50	60 00	320
10.30	0.18429 40357 97	888 25613 65	1 50804 70	7312 50	63 20	327
11.00	0.19317 65971 62	889 76418 35	1 58117 20	7375 70	66 47	325
11.30	0.20207 42389 97	891 34535 55	1 65492 90	7442 17	69 72	341
12.00	0.21098 76925 52	893 00028 45	1 72935 07	7511 89	73 13	340
12.30	0.21991 76953 97	894 72963 52	1 80446 96	7585 02	76 53	359
13.00	0.22886 49917 49	896 53410 48	1 88031 98	7661 55	80 12	355
13.30	0.23783 03327 97	898 41442 46	1 95693 53	7741 67	83 67	372
14.00	0.24681 44770 43	900 37135 99	2 03435 20	7825 34	87 39	373
14.30	0.25581 81906 42	902 40571 19	2 11260 54	7912 73	91 17	388
15.00	0.26484 22477 61	904 51831 73	2 19173 27	8003 90	95 05	399
15.30	0.27388 74309 34	906 71005 00	2 27177 17	8098 95	99 04	407
16.00	0.28295 45314 34	908 98182 17	2 35276 12	8197 99	103 11	421
16.30	0.29204 43496 51	911 33458 29	2 43474 11	8301 10	107 32	435
17.00	0.30115 76954 80	913 76932 40	2 51775 21	8408 42	111 67	436
17.30	0.31029 53887 20	916 28707 61	2 60183 63	8520 09	116 03	465
18.00	0.31945 82594 81	918 88891 24	2 68703 72	8636 12	120 68	464
18.30	0.32864 71486 05	921 57594 96	2 77339 84	8756 80	125 32	492
19.00	0.33786 29081 01	924 34934 80	2 86096 64	8882 12	130 24	491
19.30	0.34710 64015 81	927 21031 44	2 94978 76	9012 36	135 15	520
20.00	0.35637 85047 25	930 16010 20	3 03991 12	9147 51	140 35	529

TABLE IV.

φ.	$l\,\text{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\varphi)$.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
20°00′	0.35637 85047 25	930 16010 20	3 03991 12	9144 51	140 35	531
20.30	0.36568 01057 45	933 20001 32	3 13138 63	9287 86	145 66	547
21.00	0.37501 21058 77	936 33139 95	3 22426 49	9433 52	151 13	570
21.30	0.38437 54198 72	939 55566 44	3 31860 01	9584 65	156 83	579
22.00	0.39377 09765 16	942 87426 45	3 41444 66	9741 48	162 62	613
22.30	0.40319 97191 61	946 28871 11	3 51186 14	9904 10	168 75	621
23.00	0.41266 26062 72	949 80057 25	3 61090 24	10072 85	174 96	650
23.30	0.42216 06119 97	953 41147 49	3 71163 09	10247 81	181 46	670
24.00	0.43169 47267 46	957 12310 58	3 81410 90	10429 27	188 16	697
24.30	0.44126 59578 04	960 93721 48	3 91840 17	10617 43	195 13	719
25.00	0.45087 53299 52	964 85561 65	4 02457 60	10812 56	202 32	743
25.30	0.46052 38861 17	968 88019 25	4 13270 16	11014 88	209 75	782
26.00	0.47021 26880 42	973 01289 41	4 24285 04	11224 63	217 57	799
26.30	0.47994 28169 83	977 25574 45	4 35509 67	11442 20	225 56	835
27.00	0.48971 53744 28	981 61084 12	4 46951 87	11667 76	233 91	869
27.30	0.49953 14828 40	986 08035 99	4 58619 63	11901 67	242 60	899
28.00	0.50939 22864 39	990 66655 62	4 70521 30	12144 27	251 59	937
28.30	0.51929 89520 01	995 37176 92	4 82665 57	12395 86	260 96	977
29.00	0.52925 26696 93	1000 19842 49	4 95061 43	12656 82	270 73	1008
29.30	0.53925 46539 42	1005 14903 92	5 07718 25	12927 55	280 81	1063
30.00	0.54930 61443 34	1010 22622 17	5 20645 80	13208 36	291 44	1095
30.30	0.55940 84065 51	1015 43267 97	5 33854 16	13499 80	302 39	1145
31.00	0.56956 27333 48	1020 77122 13	5 47353 96	13802 19	313 84	1198
31.30	0.57977 04455 61	1026 24476 09	5 61156 15	14116 03	325 82	1243
32.00	0.59003 28931 70	1031 85632 24	5 75272 18	14441 85	338 25	1301
32.30	0.60035 14563 94	1037 60904 42	5 89714 03	14780 10	351 26	1356
33.00	0.61072 75468 36	1043 50618 45	6 04494 13	15131 36	364 82	1419
33.30	0.62116 26086 81	1049 55112 58	6 19625 49	15496 18	379 01	1481
34.00	0.63165 81199 39	1055 74738 07	6 35121 67	15875 19	393 82	1547
34.30	0.64221 55937 46	1062 09859 74	6 50996 86	16269 01	409 29	1619
35.00	0.65283 65797 20	1068 60856 60	6 67265 87	16678 30	425 48	1700
35.30	0.66352 26653 80	1075 28122 47	6 83944 17	17103 78	442 48	1767
36.00	0.67427 54776 27	1082 12066 64	7 01047 95	17546 26	460 15	1863
36.30	0.68509 66842 91	1089 13114 59	7 18594 21	18006 41	478 78	1947
37.00	0.69598 79957 50	1096 31708 80	7 36600 62	18485 19	498 25	2042
37.30	0.70695 11666 30	1103 68309 42	7 55085 81	18983 44	518 67	2142
38.00	0.71798 79975 72	1111 23395 23	7 74069 25	19502 11	540 09	2248
38.30	0.72910 03370 95	1118 97464 48	7 93571 36	20042 20	562 57	2364
39.00	0.74029 00835 43	1126 91035 84	8 13613 56	20604 77	586 21	2480
39.30	0.75155 91871 27	1135 04649 40	8 34218 33	21190 98	611 01	2605
40.00	0.76290 96520 67	1143 38867 73	8 55409 31	21801 99	637 06	2749
40.30	0.77434 35388 40	1151 94277 04	8 77211 30	22439 05	664 55	2884
41.00	0.78586 29665 44	1160 71488 34	8 99650 35	23103 60	693 39	3039
41.30	0.79747 01153 78	1169 71138 69	9 22753 95	23796 99	723 78	3210
42.00	0.80916 72292 47	1178 93892 64	9 46550 94	24520 77	755 88	3370
42.30	0.82095 66185 11	1188 40443 58	9 71071 71	25276 65	789 58	3568
43.00	0.83284 06628 69	1198 11515 29	9 96348 36	26066 23	825 26	3758
43.30	0.84482 18143 98	1208 07863 65	10 22414 59	26891 49	862 84	3971
44.00	0.85690 26007 63	1218 30278 24	10 49306 08	27754 33	902 55	4201
44.30	0.86908 56285 87	1228 79584 32	10 77060 41	28656 88	944 56	4437
45.00	0.88137 35870 19	1239 56644 73	11 05717 29	29601 44	988 93	4695

φ.	log tang (45° + ½ φ).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45°00′	0.88137 35870 19	1239 56644 73	11 05717 29	29601 44	988 93	46 95
45.30	0.89376 92514 92	1250 62362 02	11 35318 73	30590 37	1035 88	49 80
46.00	0.90627 54876 94	1261 97680 75	11 65909 10	31626 25	1085 68	52 67
46.30	0.91889 52557 69	1273 63589 85	11 97535 35	32711 93	1138 35	55 90
47.00	0.93163 16147 54	1285 61125 20	12 30247 28	33850 28	1194 25	59 3[illegible]
47.30	0.94448 77272 74	1297 91372 48	12 64097 56	35044 53	1253 56	62 9[illegible]
48.00	0.95746 68645 22	1310 55470 04	12 99142 09	36298 09	1316 55	66 9[illegible]
48.30	0.97057 24115 26	1323 54612 13	13 35440 18	37614 64	1383 51	71 [illegible]
49.00	0.98380 78727 39	1336 90052 31	13 73054 82	38998 15	1454 65	75 [illegible]
49.30	0.99717 68779 70	1350 63107 13	14 12052 97	40452 80	1530 44	80 [illegible]
50.00	1.01068 31886 83	1364 75160 10	14 52505 77	41983 26	1611 17	86 [illegible]
50.30	1.02433 07046 93	1379 27665 87	14 94489 03	43594 43	1697 18	91 [illegible]
51.00	1.03812 34712 80	1394 22154 90	15 38083 46	45291 61	1789 05	98 [illegible]
51.30	1.05206 56867 70	1409 60238 36	15 83375 07	47080 66	1887 08	104 [illegible]
52.00	1.06616 17106 06	1425 43613 43	16 30455 73	48967 74	1991 86	112 [illegible]
52.30	1.08041 60719 49	1441 74069 16	16 79423 47	50959 60	2104 01	120 [illegible]
53.00	1.09483 34788 65	1458 53492 63	17 30383 07	53063 61	2224 06	128 [illegible]
53.30	1.10941 88281 28	1475 83875 70	17 83446 68	55287 67	2352 77	138 [illegible]
54.00	1.12417 72156 98	1493 67322 38	18 38734 35	57640 44	2490 84	148 [illegible]
54.30	1.13911 39479 36	1512 06056 73	18 96374 79	60131 28	2639 13	159 4[illegible]
55.00	1.15423 45536 09	1531 02431 52	19 56506 07	62770 41	2798 59	171 5[illegible]
55.30	1.16954 47967 61	1550 58937 59	20 19276 48	65569 00	2970 18	184 8[illegible]
56.00	1.18505 06905 20	1570 78214 07	20 84845 48	68539 18	3155 07	199 47
56.30	1.20075 85119 27	1591 63059 55	21 53384 66	71694 25	3354 54	215 4[illegible]
57.00	1.21667 48178 82	1613 16444 21	22 25078 91	75048 79	3569 95	232 86
57.30	1.23280 64623 03	1635 41523 12	23 00127 70	78618 74	3802 81	252 17
58.00	1.24916 06146 15	1658 41650 82	23 78746 44	82421 55	4054 98	273 34
58.30	1.26574 47796 97	1682 20397 26	24 61167 99	86476 53	4328 32	296 67
59.00	1.28256 68194 23	1706 81565 25	25 47644 52	90804 85	4624 99	322 47
59.30	1.29963 49759 48	1732 29209 77	26 38449 37	95429 84	4947 46	351 02
60.00	1.31695 78969 25	1758 67659 14	27 33879 21	1 00377 30	5298 48	382 65
60.30	1.33454 46628 39	1786 01538 35	28 34256 51	1 05675 78	5681 13	417 71
61.00	1.35240 48166 74	1814 35794.86	29 39932 29	1 11356 91	6098 84	456 73
61.30	1.37054 83961 60	1843 75727 15	30 51289 20	1 17455 75	6555 57	500 33
62.00	1.38898 59688 75	1874 27016 35	31 68744 95	1 24011 32	7055 90	548 83
62.30	1.40772 86705 10	1905 95761 30	32 92756 27	1 31067 22	7604 73	603 17
63 00	1.42678 82466 40	1938 88517 57	34 23823 49	1 38671 95	8207 90	664 08
63.30	1.44617 70983 97	1973 12341 06	35 62495 44	1 46879 85	8871 98	732 63
64.00	1.46590 83325 03	2008 74836 50	37 09375 29	1 55751 83	9604 61	809 72
64.30	1.48599 58161 53	2045 84211 79	38 65127 12	1 65356 44	10414 33	896 69
65.00	1.50645 42373 32	2084 49338 91	40 30483 56	1 75770 77	11311 02	995 46
65.30	1.52729 91712 23	2124 79822 47	42 06254 33	1 87081 79	12306 48	1107 12
66.00	1.54854 71534 70	2166 86076 80	43 93336 12	1 99388 27	13413 60	1234 50
66.30	1.57021 57611 50	2210 79412 92	45 92724 39	2 12801 87	14648 10	1379 78
67.00	1.59232 37024 42	2256 72137 31	48 05526 26	2 27449 97	16027 88	1546 00
67.30	1.61489 09161 73	2304 77663 57	50 32976 23	2 43477 85	17573 88	1736 91
68.00	1.63793 86825 30	2355 10639 80	52 76454 08	2 61051 73	19310 79	1956 92
68.30	1.66148 97465 10	2407 87093 88	55 37505 81	2 80362 52	21267 71	2211 02
69.00	1.68556 84558 98	2463 24599 69	58 17868 33	3 01630 23	23478 73	2506 02
69.30	1.71020 09158 67	2521 42468 02	61 19498 56	3 25108 96	25984 75	2849 29
70.00	1.73541 51626 69	2582 61966 58	64 44607 52	3 51093 71	28834 04	3250 93

og tang $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
1.73541 51626 69	2582 61966 58	64 44607 52	3 51093 71	28834 04	3250 93
1.76124 13593 27	2647 06574 10	67 95701 23	3 79927 75	32084 97	3722 04
1.78771 20167 37	2715 02275 33	71 75628 98	4 12012 72	35807 01	4278 00
1.81486 22442 70	2786 77904 31	75 87641 70	4 47819 73	40085 01	4936 24
1.84273 00347 01	2862 65546 01	80 35461 43	4 87904 74	45021 25	5720 31
1.87135 65893 02	2943 01007 44	85 23366 17	5 32925 99	50741 56	6658 38
1.90078 66900 46	3028 24373 61	90 56292 16	5 83667 55	57399 94	7787 60
1.93106 91274 07	3118 80665 77	96 39959 71	6 41067 49	65187 54	9154 58
1.96225 71939 84	3215 20625 48	102 81027 20	7 06255 03	74342 12	10820 05
1.99440 92565 32	3318 01652 68	109 87282 23	7 80597 15	85162 17	12862 92
2.02758 94218 00	3427 88934 91	117 67879 38	8 65759 32	98025 09	15386 80
2.06186 83152 91	3545 56814 29	126 33638 70	9 63784 41	1 13411 89	18529 35
2.09732 39967 20	3671 90452 99	135 97423 11	10 77196 30	1 31941 24	22475 00
2.13404 30420 19	3807 87876 10	146 74619 41	12 09137 54	1 54416 24	27473 89
2.17212 18296 29	3954 62495 51	158 83756 95	13 63553 78	1 81890 13	33869 39
2.21166 80791 80	4113 46252 46	172 47310 73	15 45443 91	2 15759 52	42139 06
2.25280 27044 26	4285 93563 19	187 92754 64	17 61203 43	2 57898 58	52956 51
2.29566 20607 45	4473 86317 83	205 53958 07	20 19102 01	3 10855 09	67287 76
2.34040 06925 28	4679 40275 90	225 73060 08	23 29957 10	3 78142 85	86540 38
2.38719 47201 18	4905 13335 98	249 03017 18	27 08099 95	4 64683 23	1 12807 06
2.43624 60537 16	5154 16353 16	276 11117 13	31 72783 18	5 77490 29	1 49262 14
2.48778 76890 32	5430 27470 29	307 83900 31	37 50273 47	7 26752 43	2 00837 50
2.54209 04360 61	5738 11370 60	345 34173 78	44 77025 90	9 27589 93	2 75396 08
2.59947 15731 21	6083 45544 38	390 11199 68	54 04615 83	12 02986 01	3 85852 48
2.66030 61275 59	6473 56744 06	444 15815 51	66 07601 84	15 88838 49	5 54144 07
2.72504 18019 65	6917 72559 57	510 23417 35	81 96440 33	21 42982 56	8 19008 51
2.79421 90579 22	7427 95976 92	592 19857 68	103 39422 89	29 61991 07	
2.86849 86556 14	8020 15834 60	695 59280 57	133 01413 96	42 13985 01	
2.94870 02390 74	8715 75115 17	828 60694 53	175 15398 97	62 06509 59	
3.03585 77505 91	9544 35809 70	1003 76093 50	237 21908 56	95 36517 88	
3.13130 13315 61	10548 11903 20	1240 98002 06	332 58426 44	154 50926 71	
3.23678 25218 81	11789 09905 26	1573 56428 50	487 09353 15	268 06588 53	
3.35467 35124 07	13362 66333 76	2060 65781 65	755 15941 68	509 95271 10	
3.48830 01457 83	15423 32115 41	2815 81723 33	1265 11212 78	1106 54083 86	
3.64253 33573 24	18239 13838 74	4080 92936 11	2371 65296 64	2952 79872 23	
3.82492 47411 98	22320 06774 85	6452 58232 75	5324 45168 87	11665 45216 00	
4.04812 54186 83	28772 65007 60	11777 03401 62	16989 90384 87		
4.33585 19194 43	40549 68409 22	28766 93786 49			
4.74134 87603 65	69316 62195 71				
5.43451 49799 36					
Inf. logarithmique.					

TABLE V.

Logarithmes à 19 décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et p tous les nombres premiers de 1501 à 10000.

Nota. Cette Table fait suite aux logarithmes à 20 décimales des Tables de Gardiner, édit. d'Avig Elle est extraite des grandes Tables du Cadastre, déposées au Bureau des Longitudes, et dont la n se trouve dans le tome V des Mémoires de l'Institut.

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
1163	06557 97147 28448 4114	1243	09447 11286 41644 7635	1323	12155 98441 87500
1165	06632 59253 62037 7769	1245	09516 93514 31755 1459	1325	12221 58782 72826
1167	06707 08560 45370 1735	1247	09586 64534 78542 6137	1327	12287 09228 64435
1169	06781 45111 61840 1107	1249	09656 24383 74135 5120	1329	12352 49809 42731
1171	06855 68950 72363 1299	1251	09725 73096 93419 9551	1331	12417 80554 74675
1173	06929 80121 15529 2447	1253	09795 10709 94149 9998	1333	12483 01494 13859
1175	07003 78666 07755 0740	1255	09864 37258 17056 9441	1335	12548 12657 00594
1177	07077 64628 43434 6816	1257	09933 52776 85957 7472	1337	12613 14072 61984
1179	07151 38050 95089 1354	1259	10002 57301 07862 5975	1339	12678 05770 12008
1181	07224 98976 13514 7991	1261	10071 50865 73081 6210	1341	12742 87778 51598
1183	07298 47446 27930 3691	1263	10140 33505 55330 7447	1343	12807 60126 68715
1185	07371 83503 46122 6701	1265	10209 05255 11836 7244	1345	12872 22843 38426
1187	07445 07189 54591 2204	1267	10277 66148 83441 3410	1347	12936 75957 22985
1189	07518 18546 18691 5818	1269	10346 16220 94704 7763	1349	13001 19496 71904
1191	07591 17614 82777 5032	1271	10414 55505 54008 1742	1351	13065 53490 22030
1193	07664 04436 70341 8728	1273	10482 84036 53655 3957	1353	13129 77965 97622
1195	07736 79052 84156 4898	1275	10551 01847 69973 9754	1355	13193 92952 10424
1197	07809 41504 06410 6668	1277	10619 08972 63415 2866	1357	13257 98476 59737
1199	07881 91830 98848 6760	1279	10687 05444 78653 9226	1359	13321 94567 32494
1201	07954 30074 02906 0489	1281	10754 91297 44686 3019	1361	13385 81252 03334
1203	08026 56273 39844 7438	1283	10822 66563 74928 5036	1363	13449 58558 34673
1205	08098 70469 10887 1889	1285	10890 31276 67313 3420	1365	13513 26513 76774
1207	08170 72700 97349 2146	1287	10957 85469 01386 6846	1367	13576 85145 67822
1209	08242 63008 60771 8862	1289	11025 29173 53403 0241	1369	13640 34481 33989
1211	08314 41431 43052 2453	1291	11092 62422 66420 3088	1371	13703 74547 89512
1213	08386 08008 66572 9742	1293	11159 85248 80394 0381	1373	13767 05372 36755
1215	08457 62779 34330 9913	1295	11226 97684 17270 6323	1375	13830 26981 66281
1217	08529 05782 30064 9888	1297	11293 99760 84080 0814	1377	13893 39402 56923
1219	08600 37056 18381 9245	1299	11360 91510 73027 8800	1379	13956 42661 75849
1221	08671 56639 44882 4749	1301	11427 72965 61586 2544	1381	14019 36785 78631
1223	08742 64570 36285 4633	1303	11494 44157 12584 6916	1383	14082 21801 09310
1225	08813 60887 00551 2710	1305	11561 05116 74299 7667	1385	14144 97734 00467
1227	08884 45627 27004 2409	1307	11627 55875 80544 2978	1387	14207 64610 73284
1229	08955 18828 86454 0856	1309	11693 96465 50755 8000	1389	14270 22457 37615
1231	09025 80529 31316 3078	1311	11760 26916 90084 2777	1391	14332 71299 92046
1233	09096 30765 95731 6432	1313	11826 47260 89479 3435	1393	14395 11164 23963
1235	09166 69575 95684 5355	1315	11892 57528 25776 6738	1395	14457 42076 09616
1237	09236 96996 29120 6536	1317	11958 57749 61783 8079	1397	14519 64061 14181
1239	09307 13063 76063 4583	1319	12024 47955 46365 2965	1399	14581 77144 91827
1241	09377 17814 98729 8296	1321	12090 28176 14527 2041	1401	14643 81352 85774

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
1403	14705 76710 28359 9128	1511	17926 44643 39025 3697	1889	27623 19579 21833 5851
1405	14767 63242 41098 6977	1523	18269 99033 36042 5788	1901	27898 21168 65443 1382
1407	14829 40974 34745 7022	1531	18497 51906 98261 0274	1907	28035 06930 46005 6229
1409	14891 09931 09356 4271	1543	18836 59260 63148 2676	1913	28171 49700 27295 8569
1411	14952 70137 54347 8324	1549	19005 14177 59206 0026	1931	28578 22737 79394 7088
1413	15014 21618 48558 6114	1553	19117 14557 28558 5244	1933	28623 18540 28553 0108
1415	15075 64398 60309 0404	1559	19284 61151 88841 6808	1949	28981 18391 17621 4349
1417	15136 98502 47460 4044	1567	19506 89964 68590 1309	1951	29025 72693 94518 0691
1419	15198 23954 57474 0045	1571	19617 61850 39973 3305	1973	29512 70852 52191 1870
1421	15259 40779 27469 7488	1579	19838 21300 08294 2325	1979	29644 57942 06396 2655
1423	15320 49000 84284 3325	1583	19948 09148 62355 9115	1987	29819 78671 09815 1505
1425	15381 48643 44529 0084	1597	20330 49161 38482 9323	1993	29950 72987 00487 6032
1427	15442 39731 14646 9530	1601	20439 13319 19299 7330	1997	30037 80648 70702 5693
1429	15503 22287 90970 2303	1607	20601 58767 63344 5362	1999	30081 27941 18116 9390
1431	15563 96337 59776 3575	1609	20655 60440 99029 5498	2003	30168 09492 93576 2274
1433	15624 61903 97344 4760	1613	20763 43673 88961 5206	2011	30341 20705 96741 9391
1435	15685 19010 70011 1300	1619	20924 68487 53373 7368	2017	30470 58982 12765 4356
1437	15745 67681 34225 6571	1621	20978 30148 48514 9447	2027	30685 37486 93008 7091
1439	15806 07939 36605 1948	1627	21138 75529 36858 7876	2029	30728 20470 33345 9873
1441	15866 39808 13989 3015	1637	21404 86794 11941 4394	2039	30941 72257 78140 0007
1443	15926 63310 93494 2033	1657	21932 25084 19336 7421	2053	31238 89493 70591 8735
1445	15986 78470 92566 6618	1663	22089 22492 19519 2397	2063	31449 92279 73151 5648
1447	16046 85311 19037 4711	1667	22193 55998 28005 3246	2069	31576 04906 65734 5911
1449	16106 83854 71174 5842	1669	22245 63366 79246 7111	2081	31827 20802 11626 9347
1451	16166 74124 37735 8736	1693	22865 69581 08935 2423	2083	31868 92699 47745 8650
1453	16226 56142 98021 5291	1697	22968 18423 17675 7974	2087	31952 24490 65454 0310
1455	16286 29933 21926 0938	1699	23019 33788 69045 6078	2089	31993 84399 80308 5790
1457	16345 95517 69990 1441	1709	23274 20627 20736 8346	2099	32201 24385 82400 4375
1459	16405 52918 93451 6141	1721	23578 08703 27560 2593	2111	32448 82333 07656 3795
1461	16465 02159 34296 7697	1723	23628 52774 48028 4915	2113	32489 94970 52313 3675
1463	16524 43261 25310 8330	1733	23879 85627 13917 0009	2129	32817 56614 38322 5660
1465	16583 76246 90128 2610	1741	24079 87711 17331 2026	2131	32858 34497 14201 9742
1467	16643 01138 43282 6822	1747	24229 29049 82930 9396	2137	32980 45221 64069 4114
1469	16702 17957 90256 4920	1753	24378 19160 93794 9323	2141	33061 66672 94438 3295
1471	16761 26727 27530 1111	1759	24526 58394 57461 2613	2143	33102 21710 41828 6701
1473	16820 27468 42630 9101	1777	24968 74278 05301 5254	2153	33304 40298 23487 1907
1475	16879 20203 14181 7998	1783	25115 13431 75354 6015	2161	33465 47668 83241 3318
1477	16938 04953 11949 4958	1787	25212 45525 05644 2368	2179	33825 72302 46255 6213
1479	16996 81739 96892 4532	1789	25261 03405 67372 9990	2203	34301 44971 50767 6114
1481	17055 50585 21208 4794	1801	25551 37128 19533 3260	2207	34380 23331 61655 0376
1483	17114 11510 28382 0254	1811	25791 84503 14058 4076	2213	34498 14139 27257 9464
1485	17172 64536 53231 1574	1823	26078 66686 54976 3014	2221	34654 85585 48473 9562
1487	17231 09685 21954 2134	1831	26268 83443 01696 4710	2237	34966 59840 96629 6816
1489	17289 46977 52176 1462	1847	26646 68954 40241 4075	2239	35005 40935 79030 2656
1491	17347 76434 52994 5541	1861	26974 63731 30767 0114	2243	35082 92735 82967 7382
1493	17405 98077 25025 4050	1867	27114 43179 49078 3062	2251	35237 54950 00519 9849
1495	17464 11926 60448 4529	1871	27207 37875 00009 9190	2267	35545 15201 26517 3878
1497	17522 18003 43052 3515	1873	27253 77773 75237 3705	2269	35583 44958 84935 9774
1499	17580 16328 48279 4666	1877	27346 42726 21346 3154	2273	35659 94357 24970 8201
1501	17638 06922 43270 3895	1879	27392 67801 00525 6094	2281	35812 52852 76648 5660

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
2287	35926 61646 06748 4858	2687	42926 76664 33168 4560	3079	48840 96889 03198
2293	36040 40547 29938 8543	2689	42959 08022 23301 6062	3083	48897 35247 26508
2297	36116 09951 95026 0737	2693	43023 63534 11510 4335	3089	48981 79083 01450
2309	36342 39329 17176 3403	2699	43120 28845 56516 6347	3109	49262 07220 43191
2311	36379 99454 79109 3157	2707	43248 82557 70506 4158	3119	49401 53747 57143
2333	36791 47387 93752 6251	2711	43312 95175 80485 5531	3121	49429 37686 65332
2339	36903 02218 09153 0463	2713	43344 97937 61596 1053	3137	49651 45186 97745
2341	36940 14136 96624 3470	2719	43440 92075 87500 1205	3163	50009 91919 15722
2347	37051 30895 98592 5730	2729	43600 35356 69896 5310	3167	50064 80633 71911
2351	37125 26291 24939 3636	2731	43632 17001 39733 3169	3169	50092 22391 90300
2357	37235 95825 24323 7634	2741	43790 90355 39498 3820	3181	50256 36691 07363
2371	37493 15539 78188 1529	2749	43917 47398 43468 4667	3187	50338 20634 73732
2377	37602 91817 28180 2699	2753	43980 62113 93330 2552	3191	50392 68041 93510
2381	37675 93954 04879 8631	2767	44200 91591 40951 9800	3203	50555 69386 63821
2383	37712 40423 46456 1122	2777	44357 58797 50257 5886	3209	50636 97170 95504
2389	37821 61497 49877 8861	2789	44544 85142 66049 8590	3217	50745 10609 01969
2393	37894 26986 13437 3513	2791	44575 98364 88631 0466	3221	50799 07248 19691
2399	38003 02479 67830 6251	2797	44669 24663 71527 2397	3229	50906 80450 17161
2411	38219 72103 77453 6681	2801	44731 31088 23568 2046	3251	51201 69694 96126
2417	38327 66504 07650 3677	2803	44762 30977 60286 1236	3253	51228 40632 81853
2423	38435 34141 37506 2053	2819	45009 50758 71602 3289	3257	51281 77585 64873
2437	38685 55291 84724 3065	2833	45224 65745 20437 1986	3259	51308 43604 65144
2441	38756 77794 17188 6082	2837	45285 93357 95852 2851	3271	51468 05441 24981
2447	38863 39693 51789 1886	2843	45377 68596 90442 1374	3299	51838 23155 45343
2459	39075 85287 38717 1549	2851	45499 72173 09459 9883	3301	51864 55243 30311
2467	39216 91494 89736 0322	2857	45591 02403 82743 0027	3307	51943 41949 13702
2473	39322 41163 61297 2858	2861	45651 78578 05262 6426	3313	52022 14358 81959
2477	39392 60065 85836 9841	2879	45924 16648 78082 0062	3319	52100 72524 08603
2503	39846 08496 08223 2403	2887	46044 67838 80720 4883	3323	52153 03412 78711
2521	40157 28456 76445 9143	2897	46194 84952 03761 8065	3329	52231 37951 56667
2531	40329 21451 58254 2356	2903	46284 70358 31673 7255	3331	52257 46326 91176
2539	40466 27008 73722 2253	2909	46374 37212 47059 1879	3343	52413 63765 92568
2543	40534 63601 75708 8867	2917	46493 64291 21732 6772	3347	52465 57123 57777
2549	40636 98354 69267 5167	2927	46642 27224 33791 9503	3359	52621 00038 41664
2551	40671 04586 09790 0289	2939	46819 95860 72612 5652	3361	52646 85124 69477
2557	40773 07280 26335 4522	2953	47026 34469 65078 4423	3371	52775 87525 20971
2579	41145 13421 37937 4993	2957	47085 13245 26117 6377	3373	52801 63411 89201
2591	41346 74129 85824 8130	2963	47173 16514 80051 0901	3389	53007 15688 37378
2593	41380 25167 69351 4828	2969	47261 01975 96044 6380	3391	53032 77897 78086
2609	41647 40791 00220 7695	2971	47290 26518 03664 0482	3407	53237 21335 67877
2617	41780 37226 39880 9743	2999	47697 64657 59527 1346	3413	53313 62882 78638
2621	41846 70209 46600 4622	3001	47726 59954 24852 6237	3433	53567 38034 25750
2633	42045 08591 06068 1571	3011	47871 07555 12759 3156	3449	53769 31943 67390
2647	42275 39413 01348 2174	3019	47986 31130 23097 7336	3457	53869 93795 42406
2657	42439 15544 10277 5155	3023	48043 81471 77817 1025	3461	53920 15992 94127
2659	42471 83373 31567 0409	3037	48244 47919 18265 2082	3463	53945 24915 49460
2663	42537 11664 38941 2302	3041	48301 64201 44132 1610	3467	53995 38416 56396
2671	42667 38880 21372 8399	3049	48415 74243 65380 6867	3469	54020 42998 42059
2677	42764 83711 86932 6378	3061	48586 33295 97334 6406	3491	54294 98488 14178
2683	42862 06726 71939 0034	3067	48671 37759 82485 4944	3499	54394 39424 82906

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
3511	54543 08294 65351 2103	3907	59184 34112 24784 4534	4297	63316 53536 83903 1908
3517	54617 23683 16942 5803	3911	59228 78159 52130 6928	4327	63618 68951 98724 2773
3527	54740 54596 67489 6331	3917	59295 35715 47865 8683	4337	63718 94221 48761 9131
3529	54765 16583 59969 1987	3919	59317 52634 78102 5917	4339	63738 97501 29211 9103
3533	54814 36374 34845 4904	3923	59361 83081 29535 9103	4349	63838 94076 65335 9626
3539	54888 05626 37514 8845	3929	59428 20288 11806 1101	4357	63918 75599 35753 9076
3541	54912 59267 58111 0625	3931	59450 30438 20089 1841	4363	63978 52129 86820 1293
3547	54986 11884 71942 7498	3943	59582 67770 73223 1805	4373	64077 94773 44856 9996
3557	55108 38651 85780 3342	3947	59626 71263 95515 3304	4391	64256 34371 04387 7932
3559	55132 79880 03845 9033	3967	59846 22004 74150 5198	4397	64315 64656 19706 2520
3571	55278 98501 92781 9423	3989	60086 40363 09839 5628	4409	64434 00988 26322 5795
3581	55400 43210 11902 9310	4001	60216 85513 78997 1702	4421	64552 05149 05874 0063
3583	55424 68081 66110 5931	4003	60238 55901 05105 1223	4423	64571 69393 69603 7919
3593	55545 72172 04649 4896	4007	60281 93424 32699 7829	4441	64748 07731 73675 9412
3607	55714 61423 18363 1133	4013	60346 91597 33838 7345	4447	64806 71294 48934 6334
3613	55786 79615 68022 2304	4019	60411 80061 92034 8608	4451	64845 75942 82522 5223
3617	55834 85087 61619 7283	4021	60433 40731 02911 1042	4457	64904 26340 86176 3636
3623	55906 83340 34536 8287	4027	60498 16296 07431 5657	4463	64962 68868 40529 4319
3631	56002 62489 12892 3172	4049	60734 77767 68413 4006	4481	65137 49439 13043 2455
3637	56074 33010 54711 9111	4051	60756 22431 83588 2304	4483	65156 87388 65791 8703
3643	56145 91712 41915 9002	4057	60820 50077 04326 1850	4493	65253 64185 93025 3931
3659	56336 24094 86607 4924	4073	60991 44100 85997 6990	4507	65388 75580 70977 5206
3671	56478 43845 03986 7736	4079	61055 37053 17094 5850	4513	65446 53335 20145 8404
3673	56502 09283 45293 7607	4091	61182 94794 98373 7604	4517	65485 00905 61394 2024
3677	56549 36298 68862 3886	4093	61204 17446 45269 5500	4519	65504 23413 31201 7644
3691	56714 40451 95657 1723	4099	61267 79183 16501 7500	4523	65542 65877 45918 6342
3697	56784 94505 73106 7959	4111	61394 74767 80349 7610	4547	65772 49542 05108 2015
3701	56831 90850 95111 7809	4127	61563 44688 77415 9649	4549	65791 59368 29955 1800
3709	56925 68333 28610 1425	4129	61584 48828 74702 1328	4561	65906 00722 40938 2990
3719	57042 61783 58972 5899	4133	61626 54052 81708 1904	4567	65963 10116 07000 6033
3727	57135 93927 53839 6579	4139	61689 54264 00759 9660	4583	66114 98572 44786 6096
3733	57205 79899 26304 5400	4153	61836 19311 09878 1650	4591	66190 72927 66020 7865
3739	57275 54651 54219 6154	4157	61878 00245 06214 7633	4597	66247 45037 50309 6185
3761	57530 33334 22399 1155	4159	61898 89203 64933 6199	4603	66304 09748 93924 2393
3767	57599 56202 03267 6301	4177	62086 44752 65121 1164	4621	66473 59685 18704 9792
3769	57622 61374 49604 9556	4201	62335 26815 37991 9779	4637	66623 70958 95804 4304
3779	57737 68919 17014 5076	4211	62438 52414 20265 0739	4639	66642 43725 18759 6021
3793	57898 28427 02790 5417	4217	62500 36010 14863 4604	4643	66679 86836 66174 0623
3797	57944 05971 39797 1887	4219	62520 95253 81880 9958	4649	66735 95461 83087 0783
3803	58012 63254 11582 4589	4229	62623 76851 46900 3864	4651	66754 63395 11516 4775
3821	58217 70376 88408 8355	4231	62644 30253 31294 6565	4657	66810 62379 32731 3193
3823	58240 42980 19028 1110	4241	62746 82724 59709 6159	4663	66866 54154 54492 0659
3833	58353 88192 54352 1387	4243	62767 30317 66615 8733	4673	66959 57810 24313 3119
3847	58512 21863 06815 4900	4253	62869 53827 14023 3003	4679	67015 30451 92180 2386
3851	58557 35186 22731. 1023	4259	62930 76400 73748 8538	4691	67126 54329 47158 3624
3853	58579 90090 13000 9219	4261	62951 15342 00453 2343	4703	67237 49787 46079 4876
3863	58692 47081 44820 3325	4271	63052 95714 26824 0577	4721	67403 40004 31254 8991
3877	58849 58010 07210 0141	4273	63073 28928 17196 5194	4723	67421 79455 76699 9388
3881	58894 36427 40014 9113	4283	63174 80743 96569 3486	4729	67476 93140 15426 2764
3889	58983 79431 47459 7475	4289	63235 60462 39073 1953	4733	67513 65044 67994 0115

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
4751	67678 50304 19205 4734	5179	71424 59110 17894 0319	5639	75120 20945 88353 161
4759	67751 57047 98757 4844	5189	71508 36706 94927 2405	5641	75135 60997 25393 669
4783	67970 03808 71964 1482	5197	71575 27168 22859 5060	5647	75181 77877 36879 178
4787	68006 34274 81948 5629	5209	71675 43574 32697 1761	5651	75212 53072 97898 269
4789	68024 48370 42607 7033	5227	71825 25000 97750 5634	5653	75227 89854 60118 696
4793	68060 74289 91787 8750	5231	71858 47200 27436 0050	5657	75258 61787 40409 218
4799	68115 07499 32421 3927	5233	71875 07347 39665 2449	5659	75273 96939 35328 031
4801	68133 17059 69165 7458	5237	71908 25739 01485 8954	5669	75350 64569 90970 0438
4813	68241 58616 77358 4900	5261	72106 83017 97159 0950	5683	75457 76560 44730 344
4817	68277 66463 14434 0372	5273	72205 77713 31464 1389	5689	75503 59337 67771 534
4831	68403 70374 86519 7603	5279	72255 16620 00958 4506	5693	75534 11838 11547 575
4861	68672 56210 74542 1603	5281	72271 61674 88494 8051	5701	75595 10410 04131 9518
4871	68761 81295 71769 9250	5297	72402 99729 35597 7071	5711	75671 21601 64771 624
4877	68815 27555 91566 3287	5303	72452 16271 18562 6797	5717	75716 81922 14272 5567
4889	·68922 00372 63835 5893	5309	72501 27253 41156 9734	5737	75868 48498 82441 0039
4903	69046 18932 46178 2536	5323	72615 64661 72754 8590	5741	75898 75468 67619 2841
4909	69099 30320 99869 4272	5333	72697 15836 82876 6352	5743	75913 88162 81166 4735
4919	69187 68225 59331 3221	5347	72811 01841 00340 6120	5749	75959 23086 45974 8534
4931	69293 50025 31137 7324	5351	72843 49509 74254 7878	5779	76185 26944 66383 0639
4933	69311 11154 62141 2286	5381	73086 29920 46493 8842	5783	76215 31923 03594 6213
4937	69346 31272 19531 1363	5387	73134 69755 45954 9362	5791	76275 35649 33373 9618
4943	69399 06104 60776 7830	5393	73183 04202 88162 4017	5801	76350 28654 67597 0365
4951	69469 29263 31484 0807	5399	73231 33274 71242 4935	5807	76395 18260 33324 2017
4957	69521 89189 05150 9206	5407	73295 63695 75624 6482	5813	76440 03229 56388 1536
4967	69609 41599 95223 3420	5413	73343 80270 91061 3260	5821	76499 75992 84880 5853
4969	69626 89967 45532 7954	5417	73375 88355 87202 7034	5827	76544 50180 90150 0528
4973	69661 84592 32224 9426	5419	73391 91510 12390 8985	5839	76633 84752 51287 3046
4987	69783 93682 18363 0155	5431	73487 98027 92627 5336	5843	76663 58863 10267 5225
4993	69836 15660 55109 7364	5437	73535 93330 01710 7747	5849	76708 16213 63322 2621
4999	69888 31367 52590 2237	5441	73567 87259 05904 5559	5851	76723 00981 10718 2821
5003	69923 05028 83409 1514	5443	73583 83343 17073 7650	5857	76767 52240 27960 0404
5009	69975 10316 89514 3236	5449	73631 68079 04108 8249	6861	76797 17213 81618 8469
5011	69992 44027 42476 6996	5471	73806 67147 77469 2694	5867	76841 60882 16331 6542
5021	70079 02213 74346 9111	5477	73854 27409 28785 2045	5869	76856 41095 13573 4561
5023	70096 31781 59549 3096	5479	73870 13004 34709 7691	5879	76930 34601 89081 7334
5039	70234 43583 55768 7083	5483	73901 82458 83480 9097	5881	76945 11794 02037 6191
5051	70337 73685 12349 5472	5501	74044 16449 49765 9683	5897	77063 11277 77806 5864
5059	70406 46794 08567 3620	5503	74059 95128 11156 5125	5903	77107 27832 21194 7373
5077	70560 71634 04605 0364	5507	74091 50764 81282 5450	5923	77254 17326 40943 5210
5081	70594 91949 10295 6715	5519	74186 03940 65263 5418	5927	77283 49272 39018 1375
5087	70646 17376 31354 7002	5521	74201 77471 40138 2700	5939	77371 33252 77021 6222
5099	70748 50119 67473 5829	5527	74248 94645 81775 1396	5953	77473 58825 51753 3540
5101	70765 53235 31186 9120	5531	74280 36584 69165 5752	5981	77677 38024 12107 0439
5107	70816 58578 55540 0645	5557	74484 03967 85379 1774	5987	77720 92581 45684 8434
5113	70867 57927 26536 9761	5563	74530 90599 40827 9784	6007	77865 76319 47355 2452
5119	70918 51295 50245 4248	5569	74577 72178 89759 0674	6011	77894 67279 68616 7433
5147	71155 41682 50169 5456	5573	74608 90430 56200 2049	6029	78024 52838 65352 6101
5153	71206 01424 61074 7488	5581	74671 20225 16660 4418	6037	78082 11758 53472 9465
5167	71323 84615 45661 7155	5591	74748 94922 58672 8673	6043	78125 25942 48456 4214
5171	71357 45377 72069 7653	5623	74996 80835 09402 8802	6047	78153 99686 05941 7129

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
6053	78197 06739 12552 0273	6473	81110 56070 17930 3959	6917	83991 77756 78680 9882
6067	78297 39949 44048 2468	6481	81164 20214 53151 0093	6947	84179 72988 74355 2963
6073	78340 32811 22563 4564	6491	81231 16091 31123 7730	6949	84192 23116 79450 8701
6079	78383 21433 84441 0902	6521	81431 42002 07459 5680	6959	84254 68364 95014 9484
6089	78454 59740 54522 5789	6529	81484 66686 04463 2882	6961	84267 16337 60788 4232
6091	78468 85995 01421 2721	6547	81604 23409 21996 6183	6967	84304 58105 34569 2922
6101	78540 10249 92387 5093	6551	81630 75994 31939 8000	6971	84329 50827 36507 1077
6113	78625 43957 89780 2451	6553	81644 01679 56138 6603	6977	84366 87229 79143 7641
6121	78682 23794 99187 4273	6563	81710 24042 56923 1482	6983	84404 20420 41016 5201
6131	78753 13161 27234 2555	6569	81749 92618 67758 2742	6991	84453 93021 29007 9031
6133	78767 29646 87492 9752	6571	81763 14671 90515 3560	6997	84491 18739 12140 6054
6143	78838 05153 19563 3163	6577	81802 78418 59256 2131	7001	84516 00776 51945 8108
6151	78894 57270 23747 7609	6581	81829 18907 99995 9143	7013	84590 38388 98782 5225
6163	78979 21677 30675 3779	6599	81947 81283 62122 5991	7019	84627 52424 12213 1751
6173	79049 62769 67109 5491	6607	82000 43068 08317 9009	7027	84676 99535 37218 7858
6197	79218 14961 49678 8122	6619	82079 23810 88203 7152	7039	84751 09652 03248 1471
6199	79232 16363 51573 5128	6637	82197 18176 42042 8139	7043	84775 76883 92331 2669
6203	79260 17811 64966 4315	6653	82301 75234 46049 2396	7057	84862 01174 34133 9062
6211	79316 15292 45550 7349	6659	82340 90148 92544 8317	7069	84935 79816 61298 9523
6217	79358 08673 68155 8083	6661	82353 94336 56858 9914	7079	84997 19123 28850 1175
6221	79386 02013 42669 6055	6673	82432 11248 50771 2649	7103	85144 18146 72055 0598
6229	79441 83308 74140 9842	6679	82471 14434 64734 3175	7109	85180 85142 28237 4944
6247	79567 15059 46021 7452	6689	82536 11959 52633 3346	7121	85254 09857 69798 8685
6257	79636 61549 77521 2805	6691	82549 10298 79430 8769	7127	85290 67587 96953 6733
6263	79678 24117 01307 7941	6701	82613 96179 35914 7631	7129	85302 86147 12989 7236
6269	79719 82698 38958 8829	6703	82626 92193 93726 2243	7151	85436 67780 40869 5918
6271	79733 68007 75349 8335	6709	82665 77918 75869 3094	7159	85485 23624 17834 0070
6277	79775 21286 50710 7351	6719	82730 46410 89734 9394	7177	85594 29462 32316 0249
6287	79844 34603 50187 4660	6733	82820 86144 67945 4177	7187	85654 76448 56747 8503
6299	79927 16083 49872 6416	6737	82846 65473 52678 3337	7193	85691 00603 00786 2334
6301	79940 94796 15126 8130	6761	83001 09359 36117 8611	7207	85775 45220 59442 2260
6311	80009 81801 74775 6352	6763	83013 93874 25342 7250	7211	85799 54955 60923 9877
6317	80051 08768 94367 9732	6779	83116 56339 09442 4869	7213	85811 59321 90066 1114
6323	80092 31818 13218 2711	6781	83129 37443 77009 5941	7219	85847 70418 13340 5350
6329	80133 50956 74546 5674	6791	83193 37304 66745 4233	7229	85907 82247 46969 3440
6337	80188 37071 25239 5991	6793	83206 16145 90726 9775	7237	85955 85726 26053 5296
6343	80229 47113 97463 7382	6803	83270 04709 60567 3988	7243	85991 84852 00715 7622
6353	80297 88553 35261 8202	6823	83397 53712 79906 1914	7247	86015 82613 18278 2466
6359	80338 88249 83613 4770	6827	83422 99028 51677 3806	7253	86051 76774 61746 3069
6361	80352 53955 76532 3907	6829	83435 71127 18405 0738	7283	86231 03099 54270 4127
6367	80393 48498 63841 7786	6833	83461 14207 22687 1748	7297	86314 43462 52667 4523
6373	80434 39184 79865 8761	6841	83511 95904 24549 6290	7307	86373 91073 45217 1178
6379	80475 26021 50460 4636	6857	83613 41494 65374 8256	7309	86385 79618 83972 9621
6389	80543 28881 32139 9313	6863	83651 39988 90671 3895	7321	86457 04068 53430 2588
6397	80597 63507 17562 6493	6869	83689 35163 76433 7301	7331	86516 32195 06086 2333
6421	80760 26699 16494 6085	6871	83701 99485 40908 4040	7333	86528 16849 95610 5483
6427	80800 82999 10399 9977	6883	83777 77695 53733 2867	7349	86622 82473 79647 2099
6449	80949 23769 37341 8335	6899	83878 61449 46594 6126	7351	86634 64227 49601 7583
6451	80962 70418 94049 7299	6907	83928 94560 06146 9348	7369	86740 85565 22791 2613
6469	81083 71511 40488 3207	6911	83954 08929 68968 8441	7393	86882 07061 97517 3791

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
7411	86987 68132 66766 5706	7829	89370 62930 64713 4813	8291	91860 69151 44981 9302
7417	87022 82790 11794 4326	7841	89437 14538 56237 6867	8293	91871 16653 82321 2210
7433	87116 41328 02949 4104	7853	89503 55974 52322 6469	8297	91892 40900 91335 7852
7451	87221 45633 97585 5381	7867	89580 91501 69130 9601	8311	91965 32823 10364 1971
7457	87256 41430 90651 5862	7873	89614 02514 42019 5842	8317	91996 67014 83387 1454
7459	87268 06071 51929 6546	7877	89636 08454 69316 3791	8329	92059 28620 84808 4931
7477	87372 73806 46679 5095	7879	89647 11004 79277 2328	8353	92184 24814 05857 9354
7481	87395 96547 43353 1458	7883	89669 15265 62884 0607	8363	92236 20967 84790 0284
7487	87430 78331 28038 9580	7901	89768 20617 96419 9192	8369	92267 35678 58554 2247
7489	87442 38305 86501 8596	7907	89801 17387 97501 6439	8377	92308 85154 42399 2479
7499	87500 33536 00041 0378	7919	89867 03429 65529 8291	8387	92360 66430 17459 1195
7507	87546 64158 66385 5797	7927	89910 88581 93399 4082	8389	92371 01943 96562 7871
7517	87604 45502 46095 1077	7933	89943 74542 86177 5637	8419	92526 05095 19435 2624
7523	87639 10618 19187 5965	7937	89965 63803 05635 6059	8423	92546 68006 91537 8604
7529	87673 72971 40664 5019	7949	90031 24969 83726 5994	8429	92577 60538 36746 2941
7537	87719 85152 71789 7640	7951	90042 17534 57737 6041	8431	92587 90893 01500 8211
7541	87742 89407 88219 7457	7963	90107 67157 26254 8523	8443	92649 67892 73220 3694
7547	87777 43499 91398 0814	7993	90270 98129 69877 0730	8447	92670 24941 82644 9514
7549	87788 94253 71483 9906	8009	90357 82936 63054 3891	8461	92742 16950 50418 7062
7559	87846 43453 41468 9091	8011	90368 67317 36502 4680	8467	92772 95597 71654 5057
7561	87857 92380 62219 2161	8017	90401 18835 97388 2254	8501	92947 00161 77489 4989
7573	87926 79568 24612 8067	8039	90520 20286 62318 6417	8513	93008 26333 92371 2241
7577	87949 72872 49428 5429	8053	90595 76990 92427 0713	8521	93049 05653 06269 5942
7583	87984 10559 86562 5460	8059	90628 11557 72153 0643	8527	93079 62629 83300 2172
7589	88018 45528 26433 4408	8069	90681 97154 66545 4602	8537	93130 52814 21673 2321
7591	88029 89914 25752 5915	8081	90746 51067 65856 1959	8539	93140 70135 56573 4714
7603	88098 49904 86753 4266	8087	90778 74431 10616 1702	8543	93161 04063 62962 0215
7607	88121 34162 55019 2197	8089	90789 48354 16282 8982	8563	93262 59440 21782 1916
7621	88201 19616 26658 6244	8093	90810 95403 92552 1732	8573	93313 28237 26734 2779
7639	88303 65100 27679 8002	8101	90853 86321 71959 3955	8581	93353 79019 71704 6627
7643	88326 38595 84973 9862	8111	90907 44014 00904 3115	8597	93434 69267 38255 5848
7649	88360 46609 22292 4558	8117	90939 55459 67105 5346	8599	93444 79489 48970 0539
7669	88473 87377 69631 7802	8123	90971 64532 34344 6125	8609	93495 27078 17858 0832
7673	88496 51982 00732 7035	8147	91099 77163 10642 8093	8623	93565 83861 00634 1531
7681	88541 77651 10936 0941	8161	91174 33778 55931 6951	8627	93585 97980 37880 4315
7687	88575 68810 69267 3968	8167	91206 25555 88502 3437	8629	93596 04689 89166 4555
7691	88598 28113 54973 0938	8171	91227 52104 98812 3276	8641	93656 40051 35265 9525
7699	88643 43196 28938 2978	8179	91270 02081 90860 3549	8647	93686 54589 75622 5638
7703	88665 98978 61202 8219	8191	91333 69259 32623 1919	8663	93766 83143 99005 1079
7717	88744 85002 49953 6908	8209	91429 02556 65949 0549	8669	93796 90029 51452 8369
7723	88778 60348 38371 5415	8219	91481 89804 47473 1221	8677	93836 95974 51806 3137
7727	88801 09122 45028 7325	8221	91492 46482 05148 4859	8681	93856 97562 21061 1709
7741	88879 70674 56680 7607	8231	91545 26016 88478 7585	8689	93896 97972 22890 2373
7753	88946 97839 69507 4191	8233	91555 81154 11520 4260	8693	93916 96796 25177 4366
7757	88969 37914 44185 3148	8237	91576 90659 83684 1331	8699	93946 93308 43530 1333
7759	88980 57518 68085 4232	8243	91608 52998 43702 7256	8707	93986 85444 59509 7175
7789	89148 17038 39520 0093	8263	91713 77527 56444 2692	8713	94016 77140 34074 9292
7793	89170 46762 39182 6942	8269	91745 29919 29663 4871	8719	94046 66776 63528 9422
7817	89304 01119 57117 9356	8273	91766 30243 27374 9431	8731	94106 39882 19902 0168
7823	89337 33302 46024 9201	8287	91839 73388 43700 1638	8737	94136 23357 11761 1275

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
8741	94156 11202 36070 7866	9173	96251 13935 07596 9014	9587	98168 27273 7128
8747	94185 91265 25373 5326	9181	96288 99873 91791 1698	9601	98231 64696 9206
8753	94215 69284 67490 4510	9187	96317 37163 75251 6470	9613	98285 89423 1207
8761	94255 36803 34209 9240	9199	96374 06188 57884 1033	9619	98312 99247 3470
8779	94344 50490 25030 4334	9203	96392 94220 26558 4660	9623	98331 04857 9411
8783	94364 28827 52129 0182	9209	96421 24729 69819 2283	9629	98358 11867 0579
8803	94463 07018 56278 2405	9221	96477 80220 22376 0392	9631	98367 13828 6019
8807	94482 79963 43216 2457	9227	96506 05206 11198 5599	9643	98421 21667 6143
8819	94541 93426 03063 1623	9239	96562 49671 09242 7782	9649	98448 23064 0226
8821	94551 78220 77839 6193	9241	96571 89702 44220 8809	9661	98502 20821 0953
8831	94600 98847 65764 8792	9257	96647 02637 29284 4141	9677	98574 07410 5007
8837	94630 48549 93474 9225	9277	96740 75565 97472 8125	9679	98583 04898 5839
8839	94640 31338 99054 5994	9281	96759 47726 71889 7507	9689	98627 89559 0599
8849	94689 41951 02326 7729	9283	96768 83504 53312 6174	9697	98663 73956 1015
8861	94748 27365 56918 6220	9293	96815 59371 49970 4956	9719	98762 15821 2548
8863	94758 07493 04322 4964	9311	96899 63266 48312 2539	9721	98771 09431 3030
8867	94777 67084 64738 2990	9319	96936 93117 33527 4805	9733	98824 67233 7537
8887	94875 51801 68269 8286	9323	96955 56842 20843 5283	9739	98851 43658 3366
8893	94904 82923 15663 8105	9337	97020 73588 06854 6392	9743	98869 27025 4981
8923	95051 08929 85996 5961	9341	97039 33720 79600 1373	9749	98896 00703 9033
8929	95080 28229 64658 5100	9343	97048 63488 47650 2359	9767	98976 11877 1877
8933	95099 73339 88804 9762	9349	97076 51597 80767 7041	9769	98985 01096 0318
8941	95138 60948 80292 8195	9371	97178 59378 79114 4156	9781	99038 32589 0623
8951	95187 15571 28364 3523	9377	97206 39160 08022 2462	9787	99064 95883 1885
8963	95245 33964 23033 2332	9391	97271 18405 47066 5330	9791	99082 70505 6747
8969	95274 40240 14898 3616	9397	97298 92268 55348 7983	9803	99135 90026 3795
8971	95284 08566 75701 5826	9403	97326 64361 08528 6434	9811	99171 32757 1308
8999	95419 42518 15862 4479	9413	97372 80586 88027 4147	9817	99197 87909 9458
9001	95429 07617 01126 9971	9419	97400 47968 97414 6429	9829	99250 93350 6777
9007	95458 01627 43757 3472	9421	97409 70037 94131 1301	9833	99268 60391 6212
9011	95477 29896 89717 1012	9431	97455 77448 53579 9180	9839	99295 09605 7044
9013	95486 93710 66478 2455	9433	97464 98344 38722 0950	9851	99348 03190 6999
9029	95563 96530 23251 9434	9437	97483 39550 48540 0624	9857	99374 47565 5446
9041	95621 64692 43390 0833	9439	97492 59860 89762 4482	9859	99383 28666 1398
9043	95631 25308 41194 5307	9461	97593 70424 83110 6222	9871	99436 11519 0800
9049	95660 05882 13176 6632	9463	97602 88400 91125 8842	9883	99488 87953 6491
9059	95708 02596 57899 8612	9467	97621 23771 17377 1089	9887	99506 45341 5614
9067	95746 36157 29931 2890	9473	97648 75373 05189 9361	9901	99567 90605 1162
9091	95861 16577 64879 4120	9479	97676 25232 67460 6333	9907	99594 21629 9255
9103	95918 45427 31191 4869	9491	97731 19733 96925 9941	9923	99664 29913 5347
9109	95947 07020 75107 1028	9497	97758 64380 03851 1387	9929	99690 55106 9566
9127	96032 80505 30143 1414	9511	97822 61816 74525 9001	9931	99699 29818 9070
9133	96061 34576 47908 8154	9521	97868 25651 56944 5443	9941	99743 00737 9747
9137	96080 36249 11769 7450	9533	97922 95930 22155 3537	9949	99777 94308 6560
9151	96146 85553 50786 3424	9539	97950 28487 87401 2681	9967	99856 44582 6094
9157	96175 32141 86782 5731	9547	97986 69225 64902 8239	9973	99882 58190 4028
9161	96194 28831 41387 2584	9551	98004 88450 64956 7533	10007	00030 38997 8481

TABLES VI, VII et VIII.

La Table VI contient l'échelle logarithmique des modules, calculée à 14 décimales, pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 15°, et de demi-degré en demi-degré, depuis 15° jusqu'à 45°. On y a joint en même temps le log. du coefficient K qui sert à trouver la fonction complète $F^1 c = \frac{1}{2}\pi.K$.

Cette même Table donne les modules croissans c, c', c'', etc., et leurs complémens b, b', b'', etc., de 45° à 90°; il suffit pour cela de prendre, au lieu de l'angle du module, son complément à 90°, et d'échanger entr'elles les lettres c et b ainsi que les signes ° et $'$.

La Table VII contient, pour tous les angles du module de dixième en dixième de degré, depuis $\theta = 0°$ jusqu'à $\theta = 45°$, la valeur de l'amplitude φ qui satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{10} F^1 c$.

La Table VIII contient : 1° les valeurs des Fonctions F et E dont l'amplitude est de 45°; 2° celles des Fonctions complètes F^1 et E^1, calculées avec douze décimales, pour tous les angles du module de degré en degré, depuis 0° jusqu'à 90°.

θ.	Log c, $c°$, $c°°$.	Log b, $b°$, K.	θ.	Log c, $c°$, $c°°$.	Log b, $b°$, K.
.1	7.24187 71471 0141 3.88169 49643 4326 7.16132 99373 5869	9.99999 93385 3134 9.99999 99999 9987 0.00000 03307 3427	1°5	8.41791 90153 8883 6.23392 68740 7274 1.86579 37631 9439	9.99985 11526 2321 9.99999 99936 2313 0.00007 44204 9996
.2	7.54290 64812 9673 4.48375 56171 4014 8.36545 12429 5433	9.99999 73541 2133 9.99999 99999 9799 0.00000 13229 3833	1.6	8.44594 09034 8261 6.28999 11570 3030 1.97792 23309 8799	9.99983 06420 9626 9.99999 99917 4465 0.00008 46748 2420
.3	7.71899 66379 0379 4.83593 92377 0134 9.06981 84840 8491	9.99999 40467 5789 9.99999 99999 8981 0.00000 29766 1596	1.7	8.47226 25656 5069 6.34265 63113 3118 2.08325 26418 5562	9.99980 88075 9979 9.99999 99894 7878 0.00009 55909 3949
.4	7.84393 38310 8204 5.08581 82543 5080 9.56957 65174 0586	9.99998 94164 2087 9.99999 99999 6778 0.00000 52917 7345	1.8	8.49707 84317 6493 6.39231 11967 5238 2.18256 24154 0121	9.99978 56490 0069 9.99999 99867 7559 0.00010 71688 8745
.5	7.94084 18596 7687 5.27964 02647 8638 9.95722 05383 2348	9.99998 34630 8204 9.99999 99999 2132 0.00000 82684 1964	1.9	8.52055 13689 3761 6.43928 15475 5378 2.27650 31201 9747	9.99976 11661 5773 9.99999 99835 8213 0.00011 94087 1220
.6	8.02002 06803 2566 5.43800 51822 9180 0.27395 03734 1885	9.99997 61867 0514 9.99999 99998 3679 0.00001 19065 6583	2.0	8.54281 91638 9609 6.48384 29372 2734 2.36562 59032 8437	9.99973 53589 2158 9.99999 99798 4235 0.00013 23104 6039
.7	8.08696 46035 6878 5.57190 16279 5900 0.54174 32648 9242	9.99996 75872 4584 9.99999 99996 9762 0.00001 62062 2589	2.1	8.56399 94221 2683 6.52623 05767 8530 2.45040 11867 4539	9.99970 82271 3490 9.99999 99754 9725 0.00014 58741 8118
.8	8.14495 32431 6689 5.68788 88293 2234 0.77371 76678 3259	9.99995 76646 5174 9.99999 99994 8413 0.00002 11674 1620	2.2	8.58419 33262 7850 6.56664 68315 6632 2.55123 37013 2003	9.99967 97706 3202 9.99999 99704 8465 0.00016 00999 2632
.9	8.19610 20172 3857 5.79019 76226 3414 0.97833 52547 6665	9.99994 64188 6238 9.99999 99991 7367 0.00002 67901 5565	2.3	8.60348 85584 2838 6.60526 70657 6832 2.60847 41754 6919	9.99964 99892 3947 9.99999 99647 3949 0.00017 49877 5001
.0	8.24185 53184 2289 5.88171 67931 8966 1.16137 35963 1083	9.99993 38498 0922 9.99999 99987 4053 0.00003 30744 6566	2.4	8.62196 15999 5584 6.64224 42421 9540 2.68242 85348 6925	9.99961 88827 7550 9.99999 99581 9359 0.00019 05377 0905
.1	8.28324 33731 9884 5.96450 67939 6620 1.32695 35984 4836	9.99991 99574 1568 9.99999 99981 5608 0.00004 00203 7020	2.5	8.63967 95616 1593 6.67771 25824 0502 2.75336 52227 0638	9.99958 64510 5027 9.99999 99507 7569 0.00020 67498 6271
.2	8.32102 68626 9478 6.04008 89872 4104 1.47811 79857 6586	9.99990 47415 9708 9.99999 99973 8826 0.00004 76278 9559	2.6	8.65670 16544 6738 6.71179 05085 6404 2.82152 10833 8857	9.99955 26938 6587 9.99999 99424 1155 0.00022 36242 7284
.3	8.35578 34565 4271 6.10961 87123 0194 1.61717 74368 7333	9.99988 82022 6069 9.99999 99964 0259 0.00005 58970 7095	2.7	8.67308 03830 4776 6.74458 30297 9904 2.88710 61352 4631	9.99951 76110 1615 9.99999 99330 2381 0.00024 11610 0383
4	8.38796 21864 7860 6.17399 40326 4584 1.74592 80788 0255	9.99987 03393 0569 9.99999 99951 6117 0.00006 48279 2774	2.8	8.68886 25214 4827 6.77618 36943 4582 2.95030 74748 3158	9.99948 12022 8696 9.99999 99225 3210 0.00025 93601 2257

θ.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$.	Log b, b°, K.	θ.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$.	Log b, b°, $b^{\circ\circ}$
2°9	8.70408 99180 3281 6.80667 61989 8766 3.01129 24957 9437	9.99944 34674 5598 9.99999 99108 5299 0.00027 82216 9851	4° 1	8.85429 05182 7596 7.10763 32107 9516 3.61320 67867 3074 $\bar{6}$.62435 35821 3356	9.99888 7121 9.99999 9643 9.99999 9999 0.00055 6261
3.0	8.71880 01636 7602 6.83613 57255 3124 3.07021 15618 3457	9.99940 44062 9272 9.99999 98978 9994 0.00029 77458 0361	4.2	8.86473 76449 2571 7.12858 23899 8402 3.65510 51812 1215 $\bar{6}$.70815 03710 9638	9.99883 2123 9.99999 9607 9.99999 9999 0.00058 3742
3.1	8.73302 71503 9256 6.86463 00580 6552 3.12720 02412 1957	9.99936 40185 5864 9.99999 98835 8350 0.00031 79325 1243	4.3	8.87493 80616 2574 7.14903 94739 8908 3.69601 93880 0396 $\bar{6}$.78997 87846 8002	9.99877 5795 9.99999 9568 9.99999 9999 0.00061 1886
3.2	8.74680 15412 4285 6.89222 05227 7270 3.18238 11864 0650	9.99932 23040 0690 9.99999 98678 1093 0.00033 87819 0201	4.4	8.88490 30925 7450 7.16902 71112 9296 3.73599 47042 0103 $\bar{6}$,86992 94170 7416	9.99871 8136 9.99999 9527 9.99999 9999 0.00064 0695
3.3	8.76015 11679 1134 6.91896 27830 8536 3.23586 57243 5611	9.99927 92623 8263 9.99999 98504 8663 0.00036 02940 5200	4.5	8.89464 32984 0645 7.18856 64232 5250 3.77507 33726 4982 $\bar{6}$.94808 67539 7175	9.99865 9147 9.99999 9482 9.99999 9999 0.00067 0167
3.4	8.77310 13689 1446 6.94490 75161 0180 3.28775 52093 6381 $\bar{5}$.97345 04273 9967	9.99923 48934 2278 9.99999 98315 1181 9.99999 99999 9999 0.00038 24690 4451	4.6	8.90416 85433 3183 7.20767 71383 7782 3.81329 48505 0644 $\bar{7}$.02452 97096 8500	9.99859 8826 9.99999 9434 9.99999 9999 0.00070 0304
3.5	8.78567 52787 7168 6.97010 09909 2856 3.33814 21797 4454 $\bar{6}$.07422 43681 6113	9.99918 91968 5603 9.99999 98107 8460 9.99999 99999 9999 0.00040 53069 6428	4.7	8.91348 80550 5718 7.22637 77121 7400 3.85069 60489 2002 $\bar{7}$.09933 21065 1219	9.99853 7174 9.99999 9384 9.99999 9999 0.00073 1104
3.6	8.79789 40764 2960 6.99458 55655 2848 3.38711 13515 2882 $\bar{6}$.17216 27117 2970	9.99914 21724 0306 9.99999 97882 0015 9.99999 99999 9999 0.00042 88078 9854	4.8	8.92261 04783 9532 7.24468 54343 6068 3.88731 15474 7188 $\bar{7}$.17256 31036 1592	9.99847 419 9.99999 932 9.99999 999 0.00076 256
3.7	8.80977 71996 4293 7.01840 01154 8258 3.43474 04759 8670 $\bar{6}$.26742 09606 4545	9.99909 38197 7626 9.99999 97636 5047 9.99999 99999 9998 0.00045 29719 3710	4.9	8.93154 39233 4785 7.26261 65250 3686 3.92317 37865 0528 $\bar{7}$.24428 75816 8275	9.99840 987 9.99999 927 9.99999 999 0.00079 469
3.8	8.82134 25307 5932 7.04158 04055 5976 3.48110 10827 6708 $\bar{6}$.36014 21742 0621	9.99904 41386 7981 9.99999 97370 2444 9.99999 99999 9998 0.00047 77991 7231	5.0	8.94029 60083 3018 7.28018 62211 3132 3.95831 32400 2611 $\bar{7}$.31456 64887 2444	9.99834 422 9.99999 921 9.99999 999 0.00082 749
3.9	8.83260 65583 6853 7.06415 94130 1530 3.52625 91264 9462 $\bar{6}$.45045 82616 6129	9.99899 31288 0975 9.99999 97082 0798 9.99999 99999 9997 0.00050 32896 9910	5.1	5.94887 38991 1553 7.29740 88542 9054 3.99275 85714 7882 $\bar{7}$.38345 71516 2989	9.99827 724 9.99999 914 9.99999 999 0.00086 095
4.0	8.84358 45184 8165 7.08616 76099 4902 3.57027 55514 8623 $\bar{6}$.53849 11116 4452	9.99894 07898 5391 9.99999 96770 8379 9.99999 99999 9997 0.00052 94436 1493			

.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$.	Log b, b°, $b^{\circ\circ}$, K.	θ.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$.	Log b, b°, $b^{\circ\circ}$, K.
.2	8.95728 43439 9723 7.31429 79212 0302 4.02653 67743 9513 7.45101 35574 6255	9.99820 89288 2839 9.99999 90766 8246 9.99999 99999 9975 0.00089 50739 2691	6° 3	9.04034 24415 0061 7.48125 15830 7042 4.36044 51666 7363 8.11883 03420 2044	9.99736 93248 7677 9.99999 80081 3697 9.99999 99999 9886 0.00131 43416 2953
.3	8.96553 37056 0184 7.33086 61472 2612 4.05967 32996 4742 7.51728 66079 6717	9.99813 92796 0217 9.99999 90034 7629 9.99999 99999 9971 0.00092 98619 3692	6.4	9.04715 38409 1373 7.49495 84744 7190 4.38785 90792 6150 8.17365 81671 9633	9.99728 49727 3110 9.99999 78783 5175 9.99999 99999 9870 0.00135 64528 0968
.4	8.97362 79897 2789 7.34712 55440 6322 4.09219 21707 8325 7.58232 43502 3887	9.99806 82960 5373 9.99999 89259 9456 9.99999 99999 9967 0.00096 53149 7025	6.5	9.05385 87563 7394 7.50845 37250 3960 4.41484 97164 3681 8.22763 94415 4713	9.99719 92810 0333 9.99999 77423 1150 9.99999 99999 9853 0.00139 92306 5335
.5	8.98157 28715 3959 7.36308 74621 5034 4.12411 60888 9901 7.64617 21864 7044	9.99799 59777 4684 9.99999 88440 7294 9.99999 99999 9962 0.00100 14331 6286	6.6	9.06046 04259 5795 7.52174 38110 5742 4.44143 00309 6647 8.28080 00706 0664	9.99711 22491 6471 9.99999 75998 1710 9.99999 99999 9834 0.00144 26753 2536
.6	8.98937 37193 9921 7.37876 26383 2262 4.15546 65277 7185 7.70887 30642 1618	9.99792 23242 3692 9.99999 87575 4454 9.99999 99999 9956 0.00103 82166 5359	6.7	9.06696 19416 5009 7.53483 49166 2654 4.46761 23912 5516 8.33316 47911 8423	9.99702 38766 7812 9.99999 74506 6622 9.99999 99999 9813 0.00148 67869 9312
.7	8.99703 56165 9042 7.39416 12392 5920 4.18626 38209 5077 7.77046 76505 7409	9.99784 73350 7097 9.99999 86662 3864 9.99999 99999 9949 0.00107 56655 8358	6.8	9.07336 62580 0122 7.54773 29509 8336 4.49340 86159 8124 8.38475 72406 3663	9.99693 41629 9773 9.99999 72946 5331 9.99999 99999 9789 0.00153 15658 2674
.8	9.00456 33811 5277 7.40929 29011 5366 4.21652 72409 9631 7.83099 44906 6525	9.99777 10097 8766 9.99999 85699 8187 9.99999 99999 9941 0.00111 37800 9681	6.9	9.07967 62001 5396 7.56044 35645 4988 4.51883 00061 9742 8.43560 00210 6926	9.99684 31075 6936 9.99999 71315 6964 9.99999 99999 9763 0.00157 70119 9896
.9	9.01196 15840 1942 7.42416 67659 8844 4.24627 50720 5014 7.89049 01527 7300	9.99769 33479 1730 9.99999 84685 9743 9.99999 99999 9933 0.00115 25603 3973	7.0	9.08589 44712 9169 7.57297 21638 3130 4.54388 73751 2625 8.48571 47589 2720	9.99675 07098 3027 9.99999 69612 0307 9.99999 99999 9734 0.00162 31256 8507
.0	9.01923 45656 3272 7.43879 15147 6660 4.27552 46762 9821 7.94898 93612 6923	9.99761 43489 8185 9.99999 83619 0549 9.99999 99999 9923 0.00119 20064 6143	7.1	9.09202 36595 5880 7.58532 39252 5720 4.56859 10758 4213 8.53512 21603 5928	9.99665 69692 0915 9.99999 67833 3835 9.99999 99999 9702 0.00166 99070 6311
.1	9.02638 64511 8408 7.45317 53979 9104 4.30429 25549 2968 8.00652 51185 3227	9.99753 40124 9452 9.99999 82497 2268 9.99999 99999 9912 0.00123 21186 1364	7.2	9.09806 62444 9664 7.59750 38080 5308 4.59295 10270 1455 8.58384 20627 0448	9.99656 18851 2621 9.99999 65977 5698 9.99999 99999 9667 0.00171 73563 1372
.2	9.03342 11646 1518 7.46732 62636 6784 4.33259 44041 4267 8.06312 88169 5838	9.99745 23379 6064 9.99999 81318 6304 9.99999 99999 9900 0.00127 28969 5070	7.3	9.10402 46030 3642 7.60951 65662 2608 4.61697 67368 7966 8.63189 34824 3507	9.99646 54569 9300 9.99999 64042 3710 9.99999 99999 9628 0.00176 54736 2019

θ.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$.	Log b, b°, $b^{\circ\circ}$, K.	θ.	Log c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$.	Log b, b°, b
7°4	9.10990 10150 8317 $\bar{7}$.62136 67597 3334 $\bar{4}$.64067 73255 7666 $\bar{8}$.67929 46598 2952	9.99636 76842 1255 9.99999 62025 5376 9.99999 99999 9585 0.00181 42591 6853	8°5	9.16970 20867 7564 $\bar{7}$.74212 76798 5840 $\bar{4}$.88220 19907 7715 $\bar{9}$.16234 39902 3896	9.99520 325 9.99999 337 9.99999 999 0.00239 506
7.5	9.11569 76687 2611 $\bar{7}$.63305 87649 0210 $\bar{4}$.66406 15459 8844 $\bar{8}$.72606 31006 5352	9.99626 85661 7928 9.99999 59924 7856 9.99999 99999 9538 0.00186 37131 4733	8.6	9.17474 38525 1642 $\bar{7}$.75232 45327 9808 $\bar{4}$.90259 60150 5311 $\bar{9}$.20313 20387 9213	9.99508 929 9.99999 305 9.99999 999 0.00245 187
7.6	9.12141 66651 0311 $\bar{7}$.64459 67841 5902 $\bar{4}$.68713 78031 9992 $\bar{8}$.77221 56150 7702	9.99616 81022 7900 9.99999 57737 7988 9.99999 99999 9486 0.00191 38357 4787	8.7	9.17972 64511 3002 $\bar{7}$.76240 43818 9940 $\bar{4}$.92275 60430 4211 $\bar{9}$.24345 20947 7148	9.99497 398 9.99999 272 9.99999 999 0.00250 937
7.7	9.12706 00229 4778 $\bar{7}$.65598 48551 2436 $\bar{4}$.70991 41726 8650 $\bar{8}$.81776 83540 5075	9.99606 62918 8892 9.99999 55462 2284 9.99999 99999 9429 0.00196 46271 6411	8.8	9.18465 12248 8016 $\bar{7}$.77236 99118 6564 $\bar{4}$.94268 74444 2216 $\bar{9}$.28331 48975 3303	9.99485 732 9.99999 238 9.99999 999 0.00256 753
7.8	9.13262 96828 4226 $\bar{7}$.66722 68591 1756 $\bar{4}$.73239 84173 2522 $\bar{8}$.86273 68433 2881	9.99596 31343 7755 9.99999 53095 6927 9.99999 99999 9367 0.00201 60875 9270	8.9	9.18951 94705 2635 $\bar{7}$.78222 37163 9366 $\bar{4}$.96239 54068 6184 $\bar{9}$.32273 08224 1398	9.99473 930 9.99999 203 9.99999 999 0.00262 636
7.9	9.13812 75112 0056 $\bar{7}$.67832 65391 2372 $\bar{4}$.75459 80033 2778 $\bar{8}$.90713 60153 3461	9.99585 86291 0479 9.99999 50635 7767 9.99999 99999 9299 0.00206 82172 3294	9.0	9.19433 24413 5701 $\bar{7}$.79196 83022 3974 $\bar{4}$.98188 49441 5219 $\bar{9}$.36170 98969 9640	9.99461 992 9.99999 166 9.99999 999 0.00268 587
8.0	9.14355 53039 9954 $\bar{7}$.68928 74572 5548 $\bar{4}$.77652 01151 6436 $\bar{8}$.95098 02390 0852	9.99575 27754 2188 9.99999 48080 0312 9.99999 99999 9224 0.00212 10162 8674	9.1	9.19909 13491 1137 $\bar{7}$.80160 60930 6418 $\bar{5}$.00116 09038 9556 $\bar{9}$.40026 18164 8500	9.99449 919 9.99999 129 9.99999 999 0.00274 604
8.1	9.14891 47902 8000 $\bar{7}$.70011 31017 5596 $\bar{4}$.79817 16695 6921 $\bar{8}$.99428 33478 1902	9.99564 55726 7130 9.99999 45425 9761 9.99999 99999 9143 0.00217 44849 5887	9.2	9.20379 73657 9581 $\bar{7}$.81113 94330 6366 $\bar{5}$.02022 79747 7042 $\bar{9}$.43839 59582 3672	9.99437 710 9.99999 089 9.99999 999 0.00280 689
8.2	9.15420 76354 3183 $\bar{7}$.71080 67935 6814 $\bar{4}$.81955 93286 7974 $\bar{9}$.03705 86660 4098	9.99553 70201 8688 9.99999 42671 0966 9.99999 99999 9054 0.00222 86234 5666	9.3	9.20845 16254 0201 $\bar{7}$.82057 05904 0762 $\bar{5}$.03909 06934 0413 $\bar{9}$.47612 13955 0629	9.99425 366 9.99999 049 9.99999 999 0.00286 841
8.3	9.15943 54442 7955 $\bar{7}$.72137 17425 0638 $\bar{4}$.84068 95123 7949 $\bar{9}$.07931 90334 4145	9.99542 71172 9367 9.99999 39812 8446 9.99999 99999 8957 0.00228 34319 9018	9.4	9.21305 52255 3316 $\bar{7}$.82990 17604 9036 $\bar{5}$.05775 34508 7732 $\bar{9}$.51344 69104 5501	9.99412 885 9.99999 007 9.99999 999 0.00293 061
8.4	9.16459 97639 8479 $\bar{7}$.73181 10430 6122 $\bar{4}$.86156 84099 0765 $\bar{9}$.12107 68284 9881	9.99531 58633 0815 9.99999 36848 6388 9.99999 99999 8852 0.00233 89107 7212	9.5	9.21760 92289 4481 $\bar{7}$.83913 50690 1310 $\bar{5}$.07622 04988 8784 $\bar{9}$.55038 10064 7857	9.99400 269 9.99999 964 9.99999 999 0.00299 347

θ.	Log c, c°, c°°, c°°°.	Log b, b°, b°°, K.	θ.	Log c, c°, c°°, c°°°.	Log b, b°. b°°, K.
.6	9.22211 46650 0383 7.84827 25749 0158 5.09449 59555 8613 9.58693 19198 7786	9.99387 51694 2204 9.99998 92028 2196 9.99999 99999 6645 0.00305 70166 8318	10° 7	9.26873 38205 0210 7.94299 18310 9508 5.28394 03721 7093 9.96582 07530 9419	9.99238 24156 4256 9.99998 32985 3070 9.99999 99999 1972 0.00380 04414 0393
.7	9.22657 25310 7278 7.85731 62730 7520 5.11258 38111 1313 9.62310 76309 3477	9.99374 62850 1494 9.99998 87436 3627 9.99999 99999 6353 0.00312 12292 9243	10.8	9.27272 62814 4560 7.95111 93873 4832 5.30019 61216 5197 9.99833 22520 6250	9.99223 85073 0224 9.99998 26615 4366 9.99999 99999 1347 0.00387 20770 7745
.8	9.23098 37938 2306 7.86626 80970 7324 5.13048 79328 5345 9.65891 58744 1854	9.99361 60390 1665 9.99998 82698 8587 9.99999 99999 6040 0.00318 61154 1481	10.9	9.27668 10629 1067 7.95917 29194 0254 5.31630 38408 9435 0.03054 76905 5393	9.99209 32278 8363 9.99998 20063 9640 9.99999 99999 0681 0.00394 43892 0979
.9	9.23534 93904 8089 7.87512 99215 4626 5.14821 20704 1724 9.69436 41495 4949	9.99348 44306 1031 9.99998 77812 6138 9.99999 99999 5703 0.00325 16753 0405	11.0	9.28059 88449 5041 7.96715 37875 8550 5.33226 62509 0163 0.06247 25105 7560	9.99194 65764 6900 9.99998 13327 4082 9.99999 99998 9970 0.00401 73780 8576
.0	9.23967 02300 1167 7.88390 35646 2536 5.16575 98603 7962 9.72945 97294 7787	9.99335 14589 6992 9.99998 72774 4996 9.99999 99999 5341 0.00331 79092 1672	11.1	9.28448 02891 5219 7.97506 33152 9490 5.34808 59988 2110 0.09411 20064 2211	9.99179 85521 3150 9.99998 06402 2499 9.99999 99998 9212 0.00409 10439 9281
.1	9.24394 71942 4392 7.89259 07901 7040 5.18313 48307 7643 9.76420 96702 7536	9.99321 71232 6043 9.99998 67581 3548 9.99999 99999 4953 0.00338 48174 1229	11.2	9.28832 60393 0011 7.98290 27903 2458 5 36376 56605 9567 0.12547 13299 7933	9.99164 91539 3493 9.99997 99284 9362 9.99999 99998 8405 0.00416 53872 2137
.2	9.24818 11389 3983 7.90119 33099 1042 5.20034 04053 8539 9.79862 08194 9746	9.99308 14226 3771 9.99998 62229 9822 9.99999 99999 4537 0.00345 24001 5294	11.3	9.29213 67220 0829 7.99067 34661 3030 5.37930 77434 9583 0.15655 54957 8827	9.99149 83809 3370 9.99997 91971 8769 9.99999 99998 7544 0.00424 04080 6472
.3	9.25237 28948 1138 7.90971 27854 7592 5.21737 99077 9086 9.83269 98243 1285	9.99294 43562 4856 9.99998 56717 1484 9.99999 99999 4091 0.00352 06577 0360	11.4	9.29591 29473 2537 7.99837 65630 3890 5.39471 46885 3785 0.18736 93858 8146	9.99134 62321 7299 9.99997 84459 4456 9.99999 99998 6628 0.00431 61068 1892
.4	9.25652 32684 8960 7.91815 08303 3768 5.23425 65652 6116 9.86645 31392 5823	9.99280 59232 3057 9.99998 51039 5851 9 99999 99999 3613 0 00358 95903 3204	11.5	9.29965 53093 1415 8.00601 32694 0774 5.40998 88728 0267 0.21791 77544 2088	9.99119 27066 8845 9.99997 76743 9792 9.99999 99998 5654 0.00439 24837 8301
.5	9.26063 30434 4538 7.92650 90116 4828 5.25097 35124 3180 9.89988 70336 0462	9.99266 61227 1221 9.99998 45193 9884 9.99999 99999 3102 0.00365 91983 0883	11.6	9.30336 43866 0441 8.01358 47427 3022 5.42513 26116 4698 0.24820 52321 1983	9.99103 78035 0634 9.99997 68821 7785 9.99999 99998 4618 0.00446 95392 5884
.6	9.26470 29808 6799 7.93478 88519 9934 5.26753 37948 1974 9.93300 75983 8596	9.99252 49538 1287 9.99998 39177 0209 9.99999 99999 2556 0.00372 94819 0739	11.7	9.30704 07429 2267 8.02109 21106 9518 5.44014 81608 2204 0.27823 63304 8096	9.99088 15216 4357 9.99997 60689 1069 9.99999 99998 3516 0.00454 72735 5114

θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}, K.	θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}
11°8	9.31068 49276 0070 8.02853 64722 0424 5.45503 77185 0827 0.30801 54458 6511	9.99072 38601 0753 9.99997 52342 1917 9.99999 99998 2346 0.00462 56869 6755	12°9	9.34879 16932 3968 8.10655 42177 6052 5.61108 39164 9361 0.62010 78420 2145	9.98889 82313 9.99996 45269 9.99999 99996 0.00553 31476
11.9	9.31429 74760 6010 8.03591 88983 4048 5.46980 34272 5292 0.33754 68633 6683	9.99056 48178 9610 9.99997 43777 2217 9.99999 99998 1104 0.00470 47798 1856	13.0	9.35208 80330 4125 8.11331 89507 4122 5.62461 45049 7851 0.64716 90190 1452	9.98872 39328 9.99996 34044 9.99999 99996 0.00561 97355
12.0	9.31787 89102 7855 8.04324 04333 0174 5.48444 73758 3608 0.36683 47605 4644	9.99040 43939 9773 9.99997 34990 3516 9.99999 99997 9786 0.00478 45524 1765	13.1	9.35535 82286 2733 8.12003 27354 0170 5.63804 32234 9026 0.67402 64560 6261	9.98854 82408 9.99996 22551 9.99999 99995 0.00570 70069
12.1	9.32142 97392 3600 8.05050 20952 9244 5.49897 16010 5484 0.39588 32109 9784	9.99024 25873 9128 9.99997 25977 6984 9.99999 99997 8388 0.00486 50050 8122	13.2	9.35860 26707 8664 8.12669 63535 8648 5.65137 16361 4797 0.70068 32814 0399	9.98837 11543 9.99996 10788 9.99999 99995 0.00579 49620
12.2	9.32495 04593 4258 8.05770 48773 7912 5.51337 80894 3446 0.42469 61877 7191	9.99007 93970 4593 9.99997 16735 3393 9.99999 99997 6905 0.00494 61381 2853	13.3	9.36182 17414 5723 8.13331 05694 4122 5.66460 12716 7692 0.72714 25524 8928	9.98819 26720 9.99995 98749 9.99999 99995 0.00588 36012
12.3	9.32844 15548 4876 8.06484 97483 1088 5.52766 87788 6906 0.45327 75666 5682	9.98991 48219 2154 9.99997 07259 3143 9.99999 99997 5334 0.00502 79518 8162	13.4	9.36501 58139 9219 8.13987 61299 4394 5.67773 36244 7097 0.75340 72581 0627	9.98801 27929 9.99995 86431 9.99999 99995 0.00597 29248
12.4	9.33190 34982 3980 8.07193 76533 0908 5.54184 55602 0083 0.48163 11293 3700	9.98974 88609 6812 9.99996 97545 6278 9.99999 99997 3670 0.00511 04466 6568	13.5	9.36818 52534 1441 8.14639 37654 1454 5.69077 01556 1148 0 77948 03204 1775	9.98783 15157 9.99995 73828 9.99999 99994 0.00606 29332
12.5	9.33533 67506 1310 8.07896 95148 2124 5.55591 02787 2816 0.50976 05664 0927	9.98958 15131 2607 9.99996 87590 2453 9.99999 99997 1909 0.00519 36228 0877	13.6	9.37133 04166 6293 8.15286 41900 0698 5.70371 22938 5208 0.80536 45969 3105	9.98764 88394 9.99995 60937 9.99999 99994 0.00615 36268
12.6	9.33874 17620 4136 8.08594 62332 4768 5.56986 47356 5870 0.53766 94802 8900	9.98941 27773 2624 9.99996 77389 0958 9.99999 99997 0044 0.00527 74806 4189	13.7	9.37445 16528 2963 8.15928 81021 8330 5.71656 14365 6639 0.83106 28823 9349	9.98746 47627 9.99995 47752 9.99999 99994 0.00624 50059
12.7	9.34211 89719 2141 8.09286 86876 3890 5.58371 06895 0446 0.56536 13880 0025	9.98924 26524 8958 9.99996 66938 0681 9.99999 99996 8072 0.00536 20204 9897	13.8	9.37754 93033 8730 8.16566 61851 6920 5.72931 89506 5933 0.85657 79106 1501	9.98727 92844 9.99995 34271 9.99999 99993 0 00633 70709
12.8	9.34546 88093 0881 8.09973 77363 6526 5.59744 98574 2075 0.59282 97238 5368	9.98907 11375 2747 9.99996 56233 0154 9.99999 99996 5986 0.00544 72427 1696	13.9	9.38062 37024 1024 8.17199 91073 9592 5.74198 61734 5074 0.88191 23562 3532	9.98709 24034 9.99995 20486 9.99999 99993 0.00642 98222

θ.	Log c, c°, c°°, c°°°.	Log b, b°, b°°, K.	θ.	Log c, c°, c°°, c°°°.	Log b, b°, b°°, K.
°0	9.38367 51767 8594 8.17828 75229 2284 5.75456 44135 2093 0.90706 88364 1517	9.98690 41185 0959 9.99995 06395 9426 9.99999 99992 9873 0.00652 32601 9170	15°5	9.42689 88240 2170 8.26767 81304 6256 5.93337 07713 4354 1.26468 15529 5682	9.98391 05163 6931 9.99992 54950 5821 9.99999 99984 0230 0.00800 74885 4560
.1	9.38670 40464 1969 8.18453 20718 4738 5.76705 49515 3004 0.93204 99124 7490	9.98671 44283 6642 9.99994 91993 5119 9.99999 99992 5721 0.00661 73851 2099	16.0	9.44033 80750 8540 8.29560 50571 5532 5.98923 48511 8188 1.37640 97131 0225	9.98284 16370 2333 9.99991 52676 6791 9.99999 99979 3355 0.00853 68142 8906
.2	9.38971 06244 3193 8.19073 33806 9930 5.77945 90410 0699 0.95685 80914 7247	9.98652 33318 1809 9.99994 77274 9074 9.99999 99992 1355 0.00671 21974 4310	16.5	9 45334 18046 2526 8.32269 46675 8700 6.04342 53315 5839 1.48479 06744 4100	9.98173 69643 0211 9.99990 40069 8327 9.99999 99973 4781 0.00908 35200 1449
.3	9.39269 52173 4906 8.19689 20628 2224 5.79177 79091 1259 0.98149 58277 2959	9.98633 08276 2634 9.99994 62235 3921 9.99999 99991 6764 0.00680 76975 4026	17.0	9.46593 53399 7743 8.34899 76681 7566 6.09604 36761 1722 1.59002 73642 8590	9.98059 63156 4586 9.99989 16427 4731 9.99999 99966 2058 0.00964 76618 6102
.4	9.39565 81252 8683 8.20300 87187 4086 5.80401 27573 7357 1.00596 55242 9978	9.98613 69145 4281 9.99994 46870 1898 9.99999 99991 1940 0.00690 38857 9779	17.5	9.47814 18041 1781 8.37456 03191 8598 6.14718 25365 6510 1.69230 50860 7904	9.97941 95015 7227 9.99987 81019 2530 9.99999 99957 2319 0.01022 92980 3811
.5	9.39859 96421 2791 8.20908 39365 1594 5.81616 47623 9298 1.03026 95343 8929	9.98594 15913 0865 9.99994 31174 4836 9.99999 99990 6871 0.00700 07626 0421	18.0	9.48998 23640 8607 8.39942 50285 8386 6.19692 67464 4173 1.79179 35069 3335	9.97820 63255 4501 9.99986 33086 4235 9.99999 99946 2216 0.01082 84888 5975
.6	9.40152 00556 9340 8.21511 82920 8684 5.82823 50765 3520 1.05441 01627 2697	9.98574 48566 5495 9.99994 15143 4147 9.99999 99990 1548 0.00709 83283 5100	18.5	9.50147 64453 6292 8.42363 06837 9836 6.24535 41787 0707 1.88864 83728 0763	9.97695 65838 3711 9.99984 71841 1880 9.99999 99932 7855 0.01144 52967 8012
.7	9.40441 96479 0785 8.22111 23496 0242 5.84022 48285 8753 1.07838 96668 8751	9 98554 67093 0239 9.99993 98772 0854 9.99999 99989 5959 0.00719 65834 3287	19.0	9.51264 19176 5476 8.44721 30717 9768 .6 29253 64889 6026 1.98301 29949 4527	9.97567 00653 8733 9.99982 96466 0173 9.99999 99916 4729 0.01207 97864 3084
.8	9.40729 86949 5970 8.22706 66617 4124 5.85213 51244 0086 1.10221 02585 7283	9.98534 71479 6125 9.99993 82055 5553 9.99999 99989 0093 0.00729 55282 4760	19.5	9.52349 52565 3965 8.47020 51926 8922 6.33853 97621 0878 2.07501 95432 1326	9.97434 65516 5086 9.99981 06112 9437 9.99999 99896 7634 0.01273 20246 5992
.9	9.41015 74674 5557 8.23298 17700 2038 5.86396 70475 0719 1.12587 41048 4704	9.98514 61713 3155 9.99993 64988 8438 9.99999 99988 3938 0.00739 51631 9610	20.0	9.53405 16846 4555 8.49263 75420 8350 6.38342 50771 6908 2.16479 01757 0438	9.97298 58164 4290 9.99978 99902 8161 9.99999 99873 0582 0.01340 20805 7227
.0	9.41299 62305 6937 8.23885 82050 9366 5.87572 16597 1624 1.14938 33293 2969	9.98494 37781 0267 9.99993 47566 9278 9.99999 99987 7483 0.00749 54886 8247	20.5	9.54432 52953 9244 8.51453 83585 8648 6.42724 90023 2652 2.25243 80288 5797	9.97158 76257 7583 9.99976 76924 5270 9.99999 99844 6711 0.01409 00255 7199

θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}, K.
21° 0	9.55432 91618 2157 8.53593 38414 6634 6.47006 40303 4811 2.33806 80882 8657	9.97015 17376 8881 9.99974 36234 1999 9.99999 99810 1831 0.01479 59334 0644
21.5	9.56407 54326 1623 8.55684 83427 0370 6.51191 89627 6480 2.42177 79571 4158	9.96867 79020 7033 9.99971 76854 3477 9.99999 99770 6006 0.01551 98802 1225
22.0	9.57357 54170 8339 8.57730 45369 6282 6.55285 92498 9995 2.50365 85361 7150	9.96716 58604 7322 9.99968 97772 9861 9.99999 99723 0044 0.01626 19445 6292
22.5	9.58283 96605 8310 8.59732 35724 6080 6.59292 72926 9663 2.58379 46273 7793	9.96561 53459 2094 9.99965 97942 7175 9.99999 99666 8737 0.01702 22075 1909
23.0	9.59187 80116 6658 8.61692 52052 5140 6.63216 27113 7887 2.66226 54713 3960	9.96402 60827 0645 9.99962 76279 7632 9.99999 99600 9018 0.01780 07526 8003
23.5	9.60069 96819 9343 8.63612 79190 7038 6.67060 25852 3879 2.73914 52267 8829	9.96239 77861 8189 9.99959 31662 9669 9.99999 99523 6134 0.01859 76662 3807
24.0	9.60931 32999 4026 8.65494 90325 6164 6.70828 16671 9041 2.81450 33997 1823	9.96073 01625 3927 9.99955 62932 7418 9.99999 99433 3463 0.01941 30370 3477
24.5	9.61772 69586 7965 8.67340 47954 4530 6.74523 25762 1098 2.88840 52282 7084	9.95902 29085 8202 9.99951 68889 9799 9.99999 99328 2317 0.02024 69566 1957
25.0	9.62594 82594 0315 8.69151 04749 7406 6.78148 59703 6354 2.96091 20287 8193	9.95727 57114 8638 9.99947 48294 9105 9.99999 99206 1716 0.02109 95193 1092
25.5	9.63398 43502 6242 8.70928 04338 2640 6.81707 07026 9739 3.03208 15075 8495	9.95548 82485 5286 9.99942 99865 9119 9.99999 99064 8187 0.02197 08222 6010
26.0	9.64184 19615 2863 8.72672 82004 3570 6.85201 39620 2574 3.10196 80425 6904	9.95366 01869 4693 9.99938 22278 2667 9.99999 98901 5448 0.02286 09655 1711

θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}.	Log b, b^{o},
26° 5	9.64952 74374 0309 8.74386 65326 2306 6 88634 14003 1534 3.17062 29379 6085	9.95179 118 9.99933 141 9.99999 987 0.02377 005
27.0	9.65704 67648 5299 8.76070 74752 7962 6.92007 72481 8060 3.23809 46553 1593	9.94988 088 9.99927 741 9.99999 984 0.02469 818
27.5	9.66440 55998 0202 8.77726 24127 6060 6.95324 44198 0627 3.30442 90233 6732	9.94792 892 9.99922 006 9.99999 982 0.02564 548
28.0	9.67160 92909 5951 8.79354 21165 5270 6.98586 46084 2298 3.36966 94289 8020	9.94593 492 9.99915 922 9.99999 979 0.02661 204
28.5	9.67866 29015 4139 8.80955 67887 3302 7.01795 83733 7122 3.43385 69912 8369	9 94389 850 9.99909 474 9.99999 976 0.02759 800
29.0	9.68557 12291 0054 8.82531 61016 3852 7.04954 52195 9269 3.49703 07206 5779 $\bar{6}$.39200 14499 8764	9.94181 925 9.99902 644 9.99999 972 9.99999 999 0.02860 345
29.5	9.69233 88236 6248 8.84082 92341 5132 7.08064 36703 6049 3.55922 76641 9822 $\bar{6}$.51639 53370 6851	9.93969 677 9.99895 417 9.99999 968 9.99999 999 0.02962 854
30.0	9.69897 00043 3602 8.85610 49049 3328 7 11127 13339 1388 3.62048 30389 9082 $\bar{6}$.63890 60866 5372	9.93753 063 9.99887 775 9.99999 963 9.99999 999 0.03067 338
30.5	9.70546 88745 5072 8.87115 14029 1484 7.14144 49646 0865 3.68083 03544 1768 $\bar{6}$.75960 07175 0745	9.93532 038 9.99879 701 9.99999 958 9.99999 999 0.03173 810
31.0	9.71183 93362 5499 8.88597 66153 0478 7.17118 05191 1716 3.74030 15245 6288 $\bar{6}$.87854 30577 9787	9.93306 559 9.99871 176 9.99999 952 9.99999 999 0.03282 284

θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, c^{oooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}, b^{ooo}, K.	θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, c^{oooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}, b^{ooo}, K.
1°5	9.71808 51017 9397	9.93076 57866 1105	36°0	9.76921 86852 9506	9.90795 76445 8597
	8.90058 80533 5926	9.99862 18138 5517		9.02355 20770 8212	9.99756 61712 0297
	7.20049 32081 5502	9.99999 94533 0981		7.44747 45817 8406	9.99999 82950 7537
	$\bar{3}$.79892 69716 7210	9.99999 99999 9991		$\bar{4}$.29289 08771 6312	9.99999 99999 9916
	$\bar{6}$.99579 39520 1633	0.03392 77402 7692		7.98372 17629 9912	0.04480 34108 4577
.0	9.72420 97077 7271	9.92842 04835 1024	36.5	9.77438 75973 2607	9.90517 87226 5581
	8.91499 28761 2414	9.99852 69677 0846		9.03637 10496 4886	9.99741 72844 9025
	7.22939 75441 6128	9.99999 93754 7471		7.47326 09836 8310	9.99999 80801 0179
	$\bar{3}$.85673 57215 1967	9.99999 99999 9989		$\bar{4}$.34446 38959 3432	9.99999 99999 9894
	$\bar{7}$.11141 14517 1148	0.03505 29298 3641		$\bar{8}$.08686 78005 4174	0.04611 83209 6758
5	9.73021 65239 9902	9.92602 91918 2338	37.0	9.77946 30248 6401	9.90234 86164 9534
	8.92919 79123 3468	9.99842 70237 4399		9.04903 97230 5162	9.99726 11405 7345
	7.25790 73853 0292	9.99999 92878 5276		7.49875 39960 8423	9.99999 78409 4122
	$\bar{3}$.91375 54914 2483	9.99999 99999 9985		$\bar{4}$.39545 01598 9660	9.99999 99999 9866
	$\bar{7}$.22545 09915 2185	0.03619 85598 8661		$\bar{8}$.18884 03284 6658	0.04745 51825 0899
0	9.73610 87645 9135	9.92359 14022 8394	37.5	9.78444 71278 3059	9.89946 66546 0810
	8.94320 96806 4630	9.99832 17725 3775		9.06156 25235 8606	9.99709 74569 3047
	7.28603 59761 5044	9.99999 91893 6177		7.52396 27492 4317	9.99999 75751 6474
	$\bar{3}$.97001 27716 1077	9.99999 99999 9981		$\bar{4}$.44586 79319 9024	9.99999 99999 9831
	$\bar{7}$.33796 55518 9377	0.03736 47798 0770		$\bar{8}$.28967 58726 5421	0.04881 41887 4271
.5	9.74188 94971 2528	9.92110 65899 1719	38 0	9.78934 19787 0607	9.89653 21441 3954
	8.95703 44083 4368	9.99821 09976 6913		9.07394 37045 3486	9.99692 59412 9511
	7.31379 59853 1878	9.99999 90788 1426		7.54889 60366 9460	9.99999 72801 2398
	$\bar{4}$.02553 29004 9485	9.99999 99999 9976		$\bar{4}$.49573 48019 3301	9.99999 99999 9787
	$\bar{7}$.44900 58096 6198	0.03855 17432 8298		$\bar{8}$.38940 96125 4019	0.05019 55386 3871
0	9.94756 16512 8727	9.91857 42135 2197	38.5	9.79414 95670 7095	9.89354 43700 8847
	8.97067 80486 6314	9.99809 44754 6926		9.08618 73552 7174	9.99674 62912 7314
	7.34119 95403 4545	9.99999 89549 0820		7.57356 23338 0801	9.99999 69529 3281
	$\bar{4}$.08034 01344 5411	9.99999 99999 9969		$\bar{4}$.54506 77233 4991	9.99999 99999 9733
	$\bar{7}$.55862 02775 8057	0.03975 96084 2759		$\bar{8}$.48807 54553 7453	0.05159 94370 5740
5	9.75312 80268 9774	9.91599 37151 2709	39.0	9.79887 18038 5449	9.89050 25944 7926
	8.98414 62968 5620	9.99797 19747 5789		9.09829 74097 7758	9.99655 81939 3791
	7.36825 82600 6098	9.99999 88162 1721		7.59796 98151 8471	9.99999 65904 4771
	$\bar{4}$.13445 77125 7599	9 99999 99999 9960		$\bar{4}$.59388 30485 8706	9.99999 99999 9665
	$\bar{7}$.66685 54338 2442	0.04098 85379 2380		$\bar{8}$.58570 61058 4951	0.05302 60949 5151
0	9.75859 13013 5406	9.91336 45194 2486	39.5	9.80351 05253 1226	9.88740 60554 9276
	8.99744 46050 9108	9.99784 32565 6799		9.11027 76546 1556	9.99636 13254 0588
	7.39498 32846 4596	9.99999 86611 7988		7.62212 63709 9009	9.99999 61892 4641
	$\bar{4}$.18790 79167 8305	9.99999 99999 9948		$\bar{4}$.64219 65613 9746	9.99999 99999 9582
	$\bar{7}$.77375 58422 3866	0.04223 86991 6125		$\bar{8}$.68233 31314 7114	0.05447 57295 7767
5	9.76395 40365 4769	9.91068 60331 7566	40.0	9.80806 74967 5243	9.88425 39665 5351
	9.01057 81963 0506	9.99770 80738 5665		9.12213 17364 0530	9.99615 53503 9095
	7.42138 53036 0206	9.99999 84880 8828		7.64603 96223 0162	9.99999 57456 0496
	$\bar{4}$.24071 21277 8656	9.99999 99999 9934		$\bar{4}$.69002 35076 5990	9.99999 99999 9479
	$\bar{7}$.87936 42642 4582	0.04351 02643 8431		$\bar{8}$.77798 70239 9705	0.05594 85647 1860

θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, c^{oooo}.	Log b, b^{o}, b^{oo}, b^{ooo}, K.	θ.	Log c, c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, c^{oooo}.	Log b, b^{o}, b
40° 5	9.81254 44160 3118 9.13386 31688 3276 7.66971 69355 4924 $\underline{4}$.73737 86242 8465 $\bar{8}$.87269 72572 4782	9.88104 55153 6992 9.99593 99217 3414 9.99999 52554 7291 9.99999 99999 9352 0.05744 48309 1533	43° 0	9.83378 33303 5054 9.19079 50610 9180 7.78480 60816 1055 $\underline{4}$.96756 02325 8876 $\bar{9}$.33306 04732 6826	9.86412 7 9.99470 7 9.99999 1 9.99999 9 0.06528 6
41.0	9 81694 29168 3225 9.14547 53392 3322 7.69316 54361 2032 $\underline{4}$.78427 61664 5009 $\bar{8}$.96649 23415 8026	9.87777 98629 2565 9.99571 46799 1117 9.99999 47144 4650 9.99999 99999 9196 0.05896 47657 1199	43.5	9 83781 22036 4207 9.20185 77219 4458 7.80720 98224 3844 $\underline{5}$.01236 85903 2056 $\bar{9}$.42267 71893 3615	9.86056 2 9.99442 7 9.99999 1 9.99999 9 0.06692 8
41.5	9.82126 45717 4779 9.15697 15147 7310 7.71639 20211 8164 $\underline{4}$.83072 99332 7571 $\bar{9}$.05939 98752 3342	9.87445 61424 1850 9.99547 92525 1199 9.99999 41177 3970 9.99999 99999 9004 0.06050 86139 1161	44.0	9.84177 12732 2059 9.21281 91132 2034 7.82942 31121 6924 $\underline{5}$.05679 61323 8982 $\bar{9}$.51153 22734 7989	9.85693 4 9.99413 5 9.99999 0 9.99999 9 0.06859 5
42.0	9.82551 08951 7436 9.16835 48482 6552 7.73940 33718 1465 $\underline{4}$.87675 32921 2387 $\bar{9}$.15144 65929 3209	9.87107 34581 4351 9.99523 32536 9414 9.99999 34601 5285 9.99999 99999 8769 0.06207 66278 4559	44.5	9.84566 18003 2841 9.22368 18919 6442 7.85145 17115 3354 $\underline{5}$.10085 43880 9060 $\bar{9}$.59964 87848 8779	9.85324 2 9.99383 0 9.99998 9 9.99999 9 0.07028 8
42.5	9.82968 33460 3618 9.17962 83836 3888 7.76220 59644 2119 $\underline{4}$.92235 92014 4540 $\bar{9}$.24265 84115 7803	9.86763 08843 1734 9.99497 62836 0591 9.99999 27360 3865 9.99999 99999 8481 0.06366 90676 5601	45.0	9.84948 50021 6801 9.23444 86293 2427 7.87330 12255 4180 $\underline{5}$.14455 45759 3947 $\bar{9}$.68704 91605 9324	9.84948 5 9.99351 1 9.99998 7 9.99999 9 0.07200 7

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.	θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
0°0	9° 0′ 0″00000 00	2427 02	4854 04	8	4°5	9° 0′ 49″21568 67	2.21489 73	4896 66	187
0.1	9. 0. 0.02427 02	7281 06	4854 12	9	4.6	9. 0.51.43058 40	2.26386 39	4898 53	193
0.2	9. 0. 0.09708 08	12135 18	4854 21	14	4.7	9. 0.53.69444 79	2.31284 92	4900 46	196
0.3	9. 0. 0.21843 26	16989 39	4854 35	18	4.8	9. 0.56.00729 71	2.36185 38	4902 42	201
0.4	9. 0. 0.38832 65	21843 74	4854 53	23	4.9	9. 0.58.36915 09	2.41087 80	4904 43	204
0.5	9. 0. 0.60676 39	26698 27	4854 76	25	5.0	9. 1. 0.78002 89	2.45992 23	4906 47	210
0.6	9. 0. 0.87374 66	31553 03	4855 01	31	5.1	9. 1. 3.23995 12	2.50898 70	4908 57	213
0.7	9. 0. 1.18927 69	36408 04	4855 32	33	5.2	9. 1. 5.74893 82	2.55807 27	4910 70	215
0.8	9. 0. 1.55335 73	41263 36	4855 65	39	5.3	9. 1. 8.30701 09	2.60717 97	4912 85	223
0.9	9. 0. 1.96599 09	46119 01	4856 04	41	5.4	9. 1.10.91419 06	2.65630 82	4915 08	225
1.0	9. 0. 2.42718 10	50975 05	4856 45	48	5.5	9. 1.13.57049 88	2.70545 90	4917 33	229
1.1	9. 0. 2.93693 15	55831 50	4856 93	49	5.6	9. 1.16.27595 78	2.75463 23	4919 62	235
1.2	9. 0. 3.49524 65	60688 43	4857 42	55	5.7	9. 1.19.03059 01	2.80382 85	4921 97	236
1.3	9. 0. 4.10213 08	65545 85	4857 97	58	5.8	9. 1.21.83441 86	2.85304 82	4924 33	243
1.4	9. 0. 4.75758 93	70403 82	4858 55	61	5.9	9. 1.24.68746 68	2.90229 15	4926 76	247
1.5	9. 0. 5.46162 75	75262 37	4859 16	67	6.0	9. 1.27.58975 83	2.95155 91	4929 23	250
1.6	9. 0. 6.21425 12	80121 53	4859 83	70	6.1	9. 1.30.54131 74	3.00085 14	4931 73	255
1.7	9. 0. 7.01546 65	84981 36	4860 53	75	6.2	9. 1.33.54216 88	3.05016 87	4934 28	258
1.8	9. 0. 7.86528 01	89841 89	4861 28	78	6.3	9. 1.36.59233 75	3.09951 15	4936 86	264
1.9	9. 0. 8.76369 90	94703 17	4862 06	83	6.4	9. 1.39.69184 90	3.14888 01	4939 50	267
2.0	9. 0. 9.71073 07	99565 23	4862 89	86	6.5	9. 1.42.84072 91	3.19827 51	4942 17	270
2.1	9. 0.10.70638 30	1.04428 12	4863 75	90	6.6	9.. 1.46.03900 42	3.24769 68	4944 87	277
2.2	9. 0.11.75066 42	1.09291 87	4864 65	95	6.7	9. 1.49.28670 10	3.29714 55	4947 64	280
2.3	9. 0.12.84358 29	1.14156 52	4865 60	99	6.8	9. 1.52.58384 65	3.34662 19	4950 44	284
2.4	9. 0.13.98514 81	1.19022 12	4866 59	101	6.9	9. 1.55.93046 84	3.39612 63	4953 28	288
2.5	9. 0.15.17536 93	1.23888 71	4867 60	108	7.0	9. 1.59.32659 47	3.44565 91	4956 16	294
2.6	9. 0.16.41425 64	1.28756 31	4868 68	110	7.1	9. 2. 2.77225 38	3.49522 07	4959 10	297
2.7	9. 0.17.70181 95	1.33624 99	4869 78	115	7.2	9. 2. 6.26747 45	3.54481 17	4962 07	300
2.8	9. 0.19.03806 94	1.38494 77	4870 93	118	7.3	9. 2. 9.81228 62	3.59443 24	4965 07	306
2.9	9. 0.20.42301 71	1.43365 70	4872 11	124	7.4	9. 2.13.40671 86	3.64408 31	4968 13	310
3.0	9. 0.21.85667 41	1.48237 81	4873 35	127	7.5	9. 2.17.05080 17	3.69376 44	4971 23	314
3.1	9. 0.23.33905 22	1.53111 16	4874 62	130	7.6	9. 2.20.74456 61	3.74347 67	4974 37	318
3.2	9. 0.24.87016 38	1.57985 78	4875 92	135	7.7	9. 2.24.48804 28	3.79322 04	4977 55	323
3.3	9. 0.26.45002 16	1.62861 70	4877 27	140	7.8	9. 2.28.28126 32	3.84299 59	4980 78	327
3.4	9. 0.28.07863 86	1.67738 97	4878 67	142	7.9	9. 2.32.12425 91	3.89280 37	4984 05	331
3.5	9. 0.29.75602 83	1.72617 64	4880 09	148	8.0	9. 2.36.01706 28	3.94264 42	4987 36	337
3.6	9. 0.31.48220 47	1.77497 73	4881 57	150	8.1	9. 2.39.95970 70	3.99251 78	4990 73	339
3.7	9. 0.33.25718 20	1.82379 30	4883 07	157	8.2	9. 2.43.95222 48	4.04242 51	4994 12	344
3.8	9. 0.35.08097 50	1.87262 37	4884 64	158	8.3	9. 2 47.99464 99	4.09236 63	4997 56	350
3.9	9. 0.36.95359 87	1.92147 01	4886 22	165	8.4	9. 2.52.08701 62	4.14234 19	5001 06	352
4.0	9. 0.38.87506 88	1 97033 23	4887 87	168	8.5	9. 2.56.22935 81	4.19235 25	5004 58	357
4.1	9. 0.40.84540 11	2.01921 10	4889 55	170	8.6	9. 3. 0.42171 06	4.24239 83	5008 15	364
4.2	9. 0.42.86461 21	2.06810 65	4891 25	176	8.7	9. 3. 4.66410 89	4.29247 98	5011 79	364
4.3	9. 0.44.93271 86	2.11701 90	4893 01	181	8.8	9. 3. 8·95658 87	4.34259 77	5015 43	372
4.4	9. 0.47.04973 76	2.16594 91	4894 82	184	8.9	9. 3.13.29918 64	4.39275 20	5019 15	374
4.5	9. 0.49.21568 67	2.21489 73	4896 66	187	9.0	9. 3.17.69193 84	4.44294 35	5022 89	380

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.	θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
9°0	9° 3′17″69193 84	4.44294 35	5022 89	380	13°5	9° 7′27″95676 60	6.74725 34	5239 02	590
9.1	9. 3.22.13488 19	4.49317 24	5026 69	385	13.6	9. 7.34.70401 94	6.79964 36	5244 92	593
9.2	9. 3.26.62805 43	4.54343 93	5030 54	387	13.7	9. 7.41.50366 30	6.85209 28	5250 85	602
9.3	9. 3.31.17149 36	4.59374 47	5034 41	393	13.8	9. 7.48.35575 58	6.90460 13	5256 87	603
9.4	9. 3.35.76523 83	4.64408 88	5038 34	397	13.9	9. 7.55.26035 71	6.95717 00	5262 90	612
9.5	9. 3.40.40932 71	4.69447 22	5042 31	403	14.0	9. 8. 2.21752 71	7.00979 90	5269 02	613
9.6	9. 3.45.10379 93	4.74489 53	5046 34	405	14.1	9. 8. 9.22732 61	7.06248 92	5275 1[illegible]	621
9.7	9. 3.49.84869 46	4.79535 87	5050 39	412	14.2	9. 8.16.28981 53	7.11524 07	5281 3[illegible]	625
9.8	9. 3.54.64405 33	4.84586 25	5054 51	414	14.3	9. 8.23.40505 60	7.16805 43	5287 6[illegible]	629
9.9	9. 3.59.48991 58	4.89640 76	5058 65	419	14.4	9. 8.30.57311 03	7.22093 04	5293 9[illegible]	636
10.0	9. 4. 4.38632 34	4.94699 41	5062 84	425	14.5	9. 8.37.79404 07	7.27386 94	5300 2[illegible]	640
10.1	9. 4. 9.33331 75	4.99762 25	5067 09	429	14.6	9. 8.45.06791 01	7.32687 20	5306 6[illegible]	646
10.2	9. 4.14.33094 00	5.04829 34	5071 38	433	14.7	9. 8.52.39478 21	7.37993 86	5313 1[illegible]	649
10.3	9. 4.19.37923 34	5.09900 72	5075 71	437	14.8	9. 8.59.77472 07	7.43306 98	5319 6[illegible]	65[illegible]
10.4	9. 4.24.47824 06	5.14976 43	5080 08	444	14.9	9. 9. 7.20779 05	7.48626 59	5326 1[illegible]	66[illegible]
10.5	9. 4.29.62800 49	5.20056 51	5084 52	446	15.0	9. 9.14.69405 64	7.53952 77	5332 7[illegible]	66[illegible]
10.6	9. 4.34.82857 00	5.25141 03	5088 98	451	15.1	9. 9.22.23358 41	7.59285 56	5339 4[illegible]	67[illegible]
10.7	9. 4.40.07998 03	5.30230 01	5093 49	457	15.2	9. 9.29.82643 97	7.64625 01	5346 1[illegible]	67[illegible]
10.8	9. 4.45.38228 04	5.35323 50	5098 06	460	15.3	9. 9.37.47268 98	7.69971 17	5352 9[illegible]	68[illegible]
10.9	9. 4.50.73551 54	5.40421 56	5102 66	466	15.4	9. 9.46.17240 15	7.75324 10	5359 7[illegible]	68[illegible]
11.0	9. 4.56.13973 10	5.45524 22	5107 32	470	15.5	9. 9.52.92564 25	7.80683 85	5366 6[illegible]	69[illegible]
11.1	9. 5. 1.59497 32	5.50631 54	5112 02	474	15.6	9.10. 0.73248 10	7.86050 46	5373 5[illegible]	69[illegible]
11.2	9. 5. 7.10128 86	5.55743 56	5116 76	480	15.7	9.10. 8.59298 56	7.91424 02	5380 5[illegible]	7[illegible]
11.3	9. 5.12.65872 42	5.60860 32	5121 56	483	15.8	9.10.16.50722 58	7.96804 53	5387 5[illegible]	7[illegible]
11.4	9. 5.18.26732 74	5.65981 88	5126 39	489	15.9	9.10.24.47527 11	8.02192 08	5394 6[illegible]	7[illegible]
11.5	9. 5.23.92714 62	5.71108 27	5131 28	494	16.0	9.10.32.49719 19	8.07586 72	5401 7[illegible]	7[illegible]
11.6	9. 5.29.63822 89	5.76239 55	5136 22	497	16.1	9.10.40.57305 91	8.12988 49	5408 9[illegible]	[illegible]
11.7	9. 5.35.40062 44	5.81375 77	5141 19	503	16.2	9.10.48.70294 40	8.18397 46	5416 2[illegible]	[illegible]
11.8	9. 5.41.21438 21	5.86516 96	5146 22	507	16.3	9.10.56.88691 86	8.23813 67	5423 5[illegible]	[illegible]
11.9	9. 5.47.07955 17	5.91663 18	5151 29	514	16.4	9.11. 5.12505 53	8.29237 18	5430 8[illegible]	7[illegible]
12.0	9. 5.52.99618 35	5.96814 47	5156 43	514	16.5	9.11.13.41742 71	8.34668 05	5438 2[illegible]	7[illegible]
12.1	9. 5.58.96432 82	6.01970 90	5161 57	524	16.6	9.11.21.76410 76	8.40106 32	5445 7[illegible]	[illegible]
12.2	9. 6. 4.98403 72	6.07132 47	5166 81	526	16.7	9.11.30.16517 08	8.45552 06	5453 2[illegible]	[illegible]
12.3	9. 6.11.05536 19	6.12299 28	5172 07	531	16.8	9.11.38.62069 14	8.51005 31	5460 8[illegible]	[illegible]
12.4	9. 6.17.17835 47	6.17471 35	5177 38	535	16.9	9.11.47.13074 45	8.56466 14	5468 4[illegible]	[illegible]
12.5	9. 6.23.35306 82	6.22648 73	5182 73	543	17.0	9.11.55.69540 59	8.61934 60	5476 1[illegible]	[illegible]
12.6	9. 6.29.57955 55	6.27831 46	5188 16	544	17.1	9.12. 4.31475 19	8.67410 75	5483 8[illegible]	[illegible]
12.7	9. 6.35.85787 01	6.33019 62	5193 60	551	17.2	9.12.12.98885 94	8.72894 64	5491 68	[illegible]
12.8	9. 6.42.18806 63	6.38213 22	5199 11	556	17.3	9.12.21.71780 58	8.78386 32	5499 54	[illegible]
12.9	9. 6.48.57019 85	6.43412 33	5204 67	559	17.4	9.12.30.50166 90	8.83885 86	5507 45	[illegible]
13.0	9. 6.55.00432 18	6.48617 00	5210 26	567	17.5	9.12.39.34052 76	8.89393 31	5515 41	[illegible]
13.1	9. 7. 1.49049 18	6.53827 26	5215 93	568	17.6	9.12.48.23446 07	8.94908 72	5523 44	8[illegible]
13.2	9. 7. 8.02876 44	6.59043 19	5221 61	576	17.7	9.12.57.18354 79	9.00432 16	5531 52	8[illegible]
13.3	9. 7.14.61919 63	6.64264 80	5227 37	580	17.8	9.13. 6.18786 95	9.05963 68	5539 65	8[illegible]
13.4	9. 7.21.26184 43	6.69492 17	5233 17	585	17.9	9.13.15.24750 63	9.11503 33	5547 85	[illegible]
13.5	9. 7.27.95676 60	6.74725 34	5239 02	590	18.0	9.13.24.36253 96	9.17051 18	5556 11	[illegible]

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
27°0	9°31′ 3″59684 10	14.57910 73	6570 02	1476
27.1	9.31.18.17594 83	14.64480 75	6584 78	1482
27.2	9.31.32.82075 58	14.71065 53	6599 60	1492
27.3	9.31.47.53141 11	14 77665 13	6614 52	1502
27.4	9.32. 2.30806 24	14.84279 65	6629 54	1510
27.5	9.32.17.15085 89	14.90909 19	6644 64	1520
27.6	9.32.32.05995 08	14.97553 83	6659 84	1528
27.7	9.32.47.03548 91	15.04213 67	6675 12	1537
27.8	9.33. 2.07762 58	15.10888 79	6690 49	1548
27.9	9.33.17.18651 37	15.17579 28	6705 97	1556
28.0	9.33.32.36230 65	15.24285 25	6721 53	1566
28.1	9.33.47.60515 90	15.31006 78	6737 19	1574
28.2	9.34. 2.91522 68	15.37743 97	6752 93	1585
28.3	9.34.18.29266 65	15.44496 90	6768 78	1593
28.4	9.34.33.73763 55	15.51265 68	6784 71	1606
28.5	9.34.49 25029 23	15.58050 39	6800 77	1611
28.6	9.35. 4.83079 62	15.64851 16	6816 88	1623
28.7	9.35.20.87930 78	15.71668 04	6833 11	1633
28.8	9.35.36.19598 82	15.78501 15	6849 44	1642
28.9	9.35.51.98099 97	15.85350 59	6865 86	1651
29.0	9.36. 7.83450 56	15.92216 45	6882 37	1664
29.1	9.36.23.75667 01	15.99098 82	6899 01	1669
29.2	9.36.39.74765 83	16 05997 83	6915 70	1684
29.3	9.36.55.80763 66	16.12913 53	6932 54	1691
29.4	9.37.11.93677 19	16.19846 07	6949 45	1703
29.5	9.37.28.13523 26	16.26795 52	6966 48	1711
29.6	9.37.44.40318 78	16.33762 00	6983 59	1723
29.7	9.38. 0.74080 78	16.40745 59	7000 82	1733
29.8	9.38.17.14826 37	16.47746 41	7018 15	1741
29.9	9.38.33.62572 78	16.54764 56	7035 56	1756
30.0	9.38.50.17337 34	16.61800 12	7053 12	1763
30.1	9.39. 6.79137 47	16.68853 25	7070 75	1774
30.2	9.39.23.47990 72	16.75924 00	7088 49	1786
30.3	9.39.40.23914 72	16.83012 49	7106 35	1795
30.4	9.39.57.06927 21	16.90118 84	7124 30	1807
30.5	9.40.13.97046 05	16.97243 14	7142 37	1818
30.6	9.40.30.94289 19	17.04385 51	7160 55	1826
30.7	9.40.47.98674 70	17.11546 06	7178 81	1840
30.8	9.41. 5.10220 76	17.18724 87	7197 21	1850
30.9	9.41.28.28945 63	17.25922 08	7215 71	1862
31.0	9.41.39.54867 71	17.33137 79	7234 33	1872
31.1	9.41.56.88005 50	17.40372 12	7253 05	1882
31.2	9.42.14.28377 62	17.47625 17	7271 87	1896
31.3	9.42.31.76002 79	17.54897 04	7290 83	1906
31.4	9.42.49.30899 83	17.62187 87	7309 89	1916
31.5	9.43. 6.93087 70	17.69497 76	7329 05	1930

θ.	φ.	Diff. I.	II.
31.5	9°43′ 6″93087 70	17.69497 76	7329 05
31.6	9.43.24.62585 46	17.76826 81	7348 35
31.7	9.43.42.39412 27	17.84175 16	7367 74
31.8	9.44. 0.23587 43	17.91542 90	7387 26
31.9	9.44.18.15130 33	17.98930 16	7406 91
32.0	9.44.36.14060 49	18.06337 07	7426 67
32.1	9.44.54.20397 56	18.13763 74	7446 52
32.2	9.45.12.34161 30	18.21210 26	7466 53
32.3	9.45.30.55371 56	18.28676 79	7486 62
32.4	9.45.48.84048 35	18.36163 41	7506 87
32.5	9.46. 7.20211 76	18.43670 28	7527 21
32.6	9.46.25.63882 04	18.51197 49	7547 70
32.7	9.46.44.15079 53	18.58745 19	7568 27
32.8	9.47. 2.73824 72	18.66313 46	7589 01
32.9	9.47.21.40138 18	18.73902 47	7609 85
33.0	9.47.40.14040 65	18.81512 32	7630 82
33.1	9.47.58.95552 97	18.89143 14	7651 93
33.2	9.48.17.84696 11	18.96795 07	7673 13
33.3	9.48.36.81491 18	19.04468 20	7694 49
33.4	9.48.55.85959 38	19.12162 69	7715 97
33.5	9.49.14.98122 07	19.19878 66	7737 58
33.6	9.49.34.18000 73	19.27616 24	7759 31
33.7	9.49.53.45616 97	19.35375 55	7781 19
33.8	9.50.12.80992 52	19.43156 74	7803 17
33.9	9.50.32.24149 26	19 50959 91	7825 32
34.0	9.50.51.75109 17	19.58785 23	7847 59
34.1	9.51.11.33894 40	19.66632 82	7869 98
34.2	9.61.31.00527 22	19.74502 80	7892 51
34.3	9.51.50.75030 02	19.82395 31	7915 19
34.4	9.52.10.57425 33	19.90310 50	7938 00
34.5	9.52.30.47735 83	19.98248 50	7960 95
34.6	9.52.50.45984 33	20.06209 45	7984 04
34.7	9.53.10.52193 78	20.14193 49	8007 26
34.8	9.53.30.66387 27	20.22200 75	8030 61
34.9	9.53.50.88588 02	20.30231 36	8054 12
35.0	9.54.11.18819 38	20.38285 48	8077 80
35.1	9.54.31.57104 86	20.46363 28	8101 58
35.2	9.54.52.03468 14	20.54464 86	8125 52
35.3	9.55.12.57933 00	20.62590 38	8149 58
35.4	9.55.33.20523 38	20.70739 96	8173 83
35 5	9.55.53.91263 34	20.78913 79	8198 21
35.6	9.56.14.70177 13	20.87112 00	8222 73
35.7	9.56.35 57289 13	20.95334 73	8247 40
35.8	9.56.56.52623 86	21.03582 13	8272 23
35.9	9.57.17.56205 99	21.11854 36	8297 21
36.0	9.57.38.68060 35	21.20151 57	8322 35

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.	θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
36°0	9°57′38″68060 35	21.20151 57	8322 35	2527	40°5	10°14′58″97206 69	25.22054 66	9630 03	3347
36.1	9.57.59.88211 92	21.28473 92	8347 62	2543	40.6	10.15.24.19261 35	25.31684 69	9663 50	3365
36.2	9.58.21.16685 84	21.36821 54	8373 05	2560	40.7	10.15.49.50946 04	25.41348 19	9697 15	3390
36.3	9.58.42.53507 38	21.45194 59	8398 65	2576	40.8	10.16.14.92294 23	25.51045 34	9731 05	3412
36.4	9.59. 3.98701 97	21.53593 24	8424 41	2591	40.9	10.16.40.43339 57	25.60776 39	9765 17	3435
36.5	9.59.25.52295 21	21.62017 65	8450 32	2606	41.0	10.17. 6.04115 96	25.70541 56	9799 52	3454
36.6	9.59.47.14312 86	21.70467 97	8476 38	2623	41.1	10.17.31.74657 52	25.80341 08	9834 06	3476
36.7	10. 0. 8.84780 83	21.78944 35	8502 61	2639	41.2	10.17.57.54998 60	25.90175 14	9868 82	3500
36.8	10. 0.30.63725 18	21.87446 96	8529 00	2655	41.3	10.18.23.45173 74	26.00043 96	9903 82	3524
36.9	10. 0.52.51172 14	21.95975 96	8555 55	2672	41.4	10.18.49.45217 70	26.09947 78	9939 06	3546
37.0	10. 1.14.47148 10	22.04531 51	8582 27	2688	41.5	10.19.15.55165 48	26.19886 84	9974 52	3566
37.1	10. 1.36.51679 61	22.13113 78	8609 15	2703	41.6	10.19.41.75052 32	26.29861 36	10010 18	3593
37.2	10. 1.58.64793 39	22.21722 93	8636 18	2722	41.7	10.20. 8.04913 68	26.39871 54	10046 11	3614
37.3	10. 2.20.86516 31	22.30359 11	8663 40	2738	41.8	10.20.34.44785 22	26.49917 65	10082 25	3640
37.4	10. 2.43.16875 42	22.39022 51	8690 78	2756	41.9	10.21. 0.94702 87	26.59999 90	10018 65	3662
37.5	10. 3. 5.55897 93	22.47713 29	8718 34	2771	42.0	10.21.27.54702 77	26.70118 55	10155 27	3687
37.6	10. 3.28.03611 22	22.56431 63	8746 05	2788	42.1	10.21.54.24821 32	26.80273 82	10192 14	3708
37.7	10. 3.50.60042 85	22 65177 68	8773 93	2808	42.2	10.22.21.05095 14	26.90465 96	10229 22	3735
37.8	10. 4.13.25220 53	22.73951 61	8802 01	2823	42.3	10.22.47.95561 10	27.00695 18	10266 57	3760
37.9	10. 4.35.99172 14	22.82753 62	8830 24	2845	42.4	10.23.14.96256 28	27.10961 75	10304 17	3786
38.0	10. 4.58.81925 76	22.91583 86	8858 69	2855	42.5	10.23.42.07218 03	27.21265 92	10342 03	3807
38.1	10. 5.21.73509 62	23.00442 55	8887 24	2879	42.6	10.24. 9.28483 95	27.31607 95	10380 10	3833
38.2	10. 5.44.73952 17	23.09329 79	8916 03	2894	42.7	10.24.36.60091 90	27.41988 05	10418 43	3859
38.3	10. 6. 7.83281 96	23.18245 82	8944 97	2914	42.8	10.25. 4.02079 95	27.52406 48	10457 02	3886
38.4	10 6.31.01527 78	23.27190 79	8974 11	2931	42.9	10.25.31.54486 43	27.62863 50	10495 88	3911
38.5	10. 6.54.28718 57	23.36164 90	9003 42	2949	43.0	10.25.59.27349 93	27.73359 38	10534 99	3935
38.6	10. 7.17.64883 47	23.45168 32	9032 91	2968	43.1	10.26.26.90709 31	27.83894 37	10574 34	3962
38.7	10. 7.41.10051 79	23.54201 23	9062 59	2986	43.2	10.26.54.74603 68	27.94468 71	10613 96	3988
38.8	10. 8. 4.64253 02	23.63263 82	9092 45	3005	43.3	10.27.22.69072 39	28.05082 67	10653 84	4018
38.9	10. 8.28.27516 84	23.72356 27	9122 50	3027	43.4	10.27 50.74155 06	28.15736 51	10694 02	4042
39.0	10. 8.51.99873 11	23.81478 77	9152 77	3042	43.5	10.28.18.89891 57	28.26430 53	10734 44	4069
39.1	10. 9.15 81351 88	23.90631 54	9183 19	3062	43.6	10 28.47.16322 10	28.37164 97	10775 13	4095
39.2	10. 9.39 71983 42	23.99814 73	9213 81	3083	43.7	10.29.15.53487 07	28.47940 10	10816 08	4123
39.3	10.10. 3.71798 15	24.09028 54	9244 64	3098	43.8	10.29.44.01427 17	28.58756 18	10857 31	4155
39.4	10.10 27.80826 69	24.18273 18	9275 62	3123	43.9	10.30.12.60183 35	28.69613 49	10898 86	4179
39.5	10.10.51.99099 87	24.27548 80	9306 85	3141	44.0	10.30.41.29796 84	28.80512 35	10940 65	4207
39.6	10.11.16.26648 67	24.36855 65	9338 26	3158	44.1	10.31.10.10309 19	28.91453 00	10982 72	4234
39.7	10.11.40.63504 32	24.46193 91	9369 84	3182	44.2	10.31.39.01762 19	29.02435 72	11025 06	4265
39,8	10.12. 5.09698 23	24.55563 75	9401 66	3200	44.3	10.32. 8.04197 90	29.13460 78	11067 71	4296
39.9	10.12.29.65261 98	24.64965 41	9433 66	3223	44.4	10.32.37.17658 68	29.24528 49	11110 67	4322
40.0	10.12.54.30227 39	24.74399 07	9465 89	3240	44.5	10.33. 6.42187 17	29.35639 16	11153 89	4352
40.1	10.13.19.04626 46	24.83864 96	9498 29	3260	44.6	10.33.35.77826 33	29.46793 05	11197 41	4380
40.2	10.13.43.88491 42	24.93363 25	9530 89	3285	44.7	10.34. 5.24619 38	29.57990 46	11241 21	4410
40.3	10.14. 8.81854 67	25.02894 14	9563 74	3304	44.8	10.34.34.82609 85	29.69231 67	11285 31	
40.4	10.14.33.84748 81	25.12457 88	9596 78	3325	44.9	10.35. 4.51841 52	29.80516 98		
40.5	10.14.58.97206 69	25.22054 66	9630 03	3347	45.0	10.35.34.32358 50			

θ.	E (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°	0.78539 81633 97	2 17326 22	4 34449 61	608 49	405 49	[illegible]
1	0.78537 64307 75	6 51775 83	4 33841 12	1013 98	405 27	[illegible]
2	0.78531 12531 92	10 85616 95	4 32827 14	1419 25	404 88	[illegible]
3	0.78520 26914 97	15 18444 09	4 31407 89	1824 13	404 49	[illegible]
4	0.78505 08470 88	19 49851 98	4 29583 76	2228 62	403 89	[illegible]
5	0.78485 58618 90	23 79435 74	4 27355 14	2632 51	403 32	[illegible]
6	0.78461 79183 16	28 06790 88	4 24722 63	3035 83	402 43	[illegible]
7	0.78433 72392 28	32 31513 51	4 21686 80	3438 26	401 69	1 [illegible]
8	0.78401 40878 77	36 53200 31	4 18248 54	3839 95	400 63	1 [illegible]
9	0.78364 87678 46	40 71448 85	4 14408 59	4240 58	399 54	1 [illegible]
10	0.78324 16229 61	44 85857 44	4 10168 01	4640 12	398 34	1 [illegible]
11	0.78279 30372 17	48 96025 45	4 05527 89	5038 46	396 93	1 [illegible]
12	0.78230 34346 72	53 01553 34	4 00489 43	5435 39	395 49	1 [illegible]
13	0.78177 32793 38	57 02042 77	3 95054 04	5830 88	393 81	1 [illegible]
14	0.78120 30750 61	60 97096 81	3 89223 16	6224 69	392 06	1 [illegible]
15	0.78059 33653 80	64 86319 97	3 82998 47	6616 75	390 09	2 [illegible]
16	0.77994 47333 83	68 69318 44	3 76381 72	7006 84	388 02	2 [illegible]
17	0.77925 78015 39	72 45700 16	3 69374 88	7394 86	385 69	2 [illegible]
18	0.77853 32315 23	76 15075 04	3 61980 02	7780 55	383 27	2 [illegible]
19	0.77777 17240 19	79 77055 06	3 54199 47	8163 82	380 58	2 [illegible]
20	0.77697 40185 13	83 31254 53	3 46035 65	8544 40	377 74	3 [illegible]
21	0.77614 08930 60	86 77290 18	3 37491 25	8922 14	374 61	3 [illegible]
22	0.77527 31640 42	90 14781 43	3 28569 11	9296 75	371 33	3 [illegible]
23	0.77437 16858 99	93 43350 54	3 19272 36	9668 08	367 75	3 [illegible]
24	0.77343 73508 45	96 62622 90	3 09604 28	10035 83	363 90	4 [illegible]
25	0.77247 10885 55	99 72227 18	2 99568 45	10399 73	359 82	4 [illegible]
26	0.77147 38658 37	102 71795 63	2 89168 72	10759 55	355 39	4 [illegible]
27	0.77044 66862 74	105 60964 35	2 78409 17	11114 94	350 61	4 [illegible]
28	0.76939 05898 39	108 39373 52	2 67294 23	11465 58	345 69	5 [illegible]
29	0.76830 66524 87	111 06667 75	2 55828 65	11811 27	340 15	5 [illegible]
30	0.76719 59857 12	113 62496 40	2 44017 38	12151 42	334 40	6 [illegible]
31	0.76605 97360 72	116 06513 78	2 31865 96	12485 82	328 25	6 [illegible]
32	0.76489 90846 94	118 38379 74	2 19380 14	12814 07	321 56	7 [illegible]
33	0.76371 52467 20	120 57759 88	2 06566 07	13135 63	314 55	7 [illegible]
34	0.76250 94707 32	122 64325 95	1 93430 44	13450 18	306 96	8 [illegible]
35	0.76128 30381 37	124 57756 39	1 79980 26	13757 14	298 88	8 [illegible]
36	0.76003 72624 98	126 37736 65	1 66223 12	14056 02	290 33	9 [illegible]
37	0.75877 34888 33	128 03959 77	1 52167 10	14346 35	281 14	9 [illegible]
38	0.75749 30928 56	129 56126 87	1 37820 75	14627 49	271 36	10 [illegible]
39	0.75619 74801 69	130 93947 62	1 23193 26	14898 85	261 00	11 [illegible]
40	0.75488 80854 07	132 17140 88	1 08294 41	15159 85	249 88	11 [illegible]
41	0.75356 63713 19	133 25435 29	93134 56	15409 73	238 17	12 [illegible]
42	0.75223 38277 90	134 18569 85	77724 83	15647 90	225 66	13 [illegible]
43	0.75089 19708 05	134 96294 68	62076 93	15873 56	212 33	14 [illegible]
44	0.74954 23413 37	135 58371 61	46203 37	16085 89	198 32	14 [illegible]
45	0.74818 65041 76	136 04574 98	30117 48	16284 21	183 39	15 [illegible]

F (45°).	Diff. I	II.	III.	IV.	V.	VI.
0.78539 81633 97	2 17336 56	4 34594 14	237 15	159 11	1 44	59
0.78541 98970 53	6 51930 70	4 34356 99	396 26	160 55	2 03	69
0.78548 50901 23	10 86287 69	4 33960 73	556 81	162 58	2 72	43
0.78559 37188 92	15 20248 42	4 33403 92	719 39	165 30	3 15	73
0.78574 57437 34	19 53652 34	4 32684 53	884 69	168 45	3 88	59
0.78594 11089 68	23 86336 87	4 31799 84	1053 14	172 33	4 47	53
0.78617 97426 55	28 18136 71	4 30746 70	1225 47	176 80	5 00	68
0.78646 15563 26	32 48883 41	4 29521 23	1402 27	181 80	5 68	60
0.78678 64446 67	36 78404 64	4 28118 96	1584 07	187 48	6 28	63
0.78715 42851 31	41 06523 60	4 26534 89	1771 55	193 76	6 91	61
0.78756 49374 91	45 33058 49	4 24763 34	1965 31	200 67	7 52	68
0.78801 82433 40	49 57821 83	4 22798 03	2165 98	208 19	8 20	60
0.78851 40255 23	53 80619 86	4 20632 05	2374 17	216 39	8 80	62
0.78905 20875 09	58 01251 91	4 18257 88	2590 56	225 19	9 42	80
0.78963 22[illegible]27 00	62 19509 79	4 15667 32	2815 75	234 61	10 22	46
0.79025 41636 79	66 35177 11	4 12851 57	3050 39	244 83	10 68	76
0.79091 76813 90	70 48028 68	4 09801 21	3295 19	255 51	11 44	73
0.79162 24842 58	74 57829 89	4 06506 02	3550 70	266 95	12 17	53
0.79236 82672 47	78 64335 91	4 02955 32	3817 65	279 12	12 70	71
0.79315 47008 38	82 67291 23	3 99137 67	4096 77	291 82	13 41	73
0.79398 14299 61	86 66428 90	3 95040 90	4388 59	305 23	14 14	53
0.79484 80728 51	90 61469 80	3 90652 31	4693 82	319 37	14 67	73
0.79575 42198 31	94 52122 11	3 85958 49	5013 19	334 04	15 40	60
0.79669 94320 42	98 38080 60	3 80945 30	5347 23	349 44	16 00	59
0.79768 32401 02	102 19025 90	3 75598 07	5696 67	365 44	16 59	61
0.79870 51426 92	105 94623 97	3 69901 40	6062 11	382 03	17 20	57
0.79976 46050 89	109 64525 37	3 63839 29	6444 14	399 23	17 77	52
0.80086 10576 26	113 28364 66	3 57395 15	6843 37	417 00	18 29	42
0.80199 38940 92	116 85759 81	3 50551 78	7260 37	435 29	18 71	54
0.80316 24700 73	120 36311 59	3 43291 41	7695 66	454 00	19 25	30
0.80436 61012 32	123 79603 00	3 35595 75	8149 66	473 25	19 55	37
0.80560 40615 32	127 15198 75	3 27446 09	8622 91	492 80	19 92	20
0.80687 55814 07	130 42644 84	3 18823 18	9115 71	512 72	20 12	10
0.80817 98458 91	133 61468 02	3 09707 47	9628 43	532 84	20 22	+ 18
0.80951 59926 93	136 71175 49	3 00079 04	10161 27	553 06	20 40	− 23
0.81088 31102 42	139 71254 53	2 89917 77	10714 33	573 46	20 17	1
0.81228 02356 95	142 61172 30	2 79203 44	11287 79	593 63	20 16	54
0.81370 63529 25	145 40375 74	2 67915 65	11881 42	613 79	19 62	36
0.81516 03904 99	148 08291 39	2 56034 23	12495 21	633 41	19 26	70
0.81664 12196 38	150 64325 62	2 43539 02	13128 62	652 67	18 56	90
0.81814 76522 00	153 07864 64	2 30410 40	13781 29	671 23	17 66	1 05
0.81967 84386 64	155 38275 04	2 16629 11	14452 52	688 89	16 61	1 34
0.62123 22661 68	157 54904 14	2 02176 59	15141 41	705 50	15 27	1 56
0.82280 77565 83	159 57080 74	1 87035 18	15846 91	720 77	13 71	1 85
0.82440 34646 57	161 44115 92	1 71188 27	16567 68	734 48	11 86	2 11
0.82601 78762 49	163 15304 19	1 54620 59	17302 16	746 34	9 75	2 46

θ.	E (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45°	0.74818 65041 76	136 04574 98	30117 48	16284 21	183 39	15 79
46	0.74682 60466 78	136 34692 46	+ 13833 27	16467 60	167 60	16 73
47	0.74546 25774 32	136 48525 73	− 2634 33	16635 20	150 87	17 62
48	0.74409 77248 59	136 45891 40	19269 53	16786 07	133 25	18 58
49	0.74273 31357 19	136 26621 87	36055 60	16919 32	114 67	19 69
50	0.74137 04735 32	135 90566 27	52974 92	17033 99	94 98	20 55
51	0.74001 14169 05	135 37591 35	70008 91	17128 97	- 74 43	21 72
52	0.73865 76577 70	134 67582 44	87137 88	17203 40	52 71	22 78
53	0.73731 08995 26	133 80444 56	1 04341 28	17256 11	29 93	23 76
54	0.73597 28550 70	132 76103 28	1 21597 39	17286 04	+ 6 17	24 93
55	0.73464 52447 42	131 54505 89	1 38883 43	17292 21	−18 76	26 00
56	0.73332 97941 53	130 15622 46	1 56175 64	17273 45	44 76	27 01
57	0.73202 82319 07	128 59446 82	1 73449 09	17228 69	71 77	28 17
58	0.73074 22872 25	126 85997 73	1 90677 78	17156 92	99 94	29 13
59	0.72947 36874 52	124 95319 95	2 07834 70	17056 98	129 07	30 15
60	0.72822 41554 57	122 87485 25	2 24891 68	16927 91	159 22	31 08
61	0.72699 54069 32	120 62593 57	2 41819 59	16768 69	190 30	32 04
62	0.72578 91475 75	118 20773 98	2 58588 28	16578 39	222 34	32 76
63	0.72460 70701 77	115 62185 70	2 75166 67	16356 05	255 10	33 57
64	0.72345 08516 07	112 87019 03	2 91522 72	16100 95	288 67	34 24
65	0.72232 21497 04	109 95496 31	3 07623 67	15812 28	322 91	34 69
66	0.72122 26000 73	106.87872 64	3 23435 95	15489 37	357 60	35 13
67	0.72015 38128 09	103 64436 69	3 38925 32	15131 77	392 73	35 42
68	0.71911 73691 40	100 25511 37	3 54057 09	14739 04	428 15	35 49
69	0.71811 48180 03	96 71454 28	3 68796 13	14310 89	463 64	35 47
70	0.71714 76725 75	93 02658 15	3 83107 02	13847 25	499 11	35 26
71	0.71621 74067 60	89 19551 13	3 96954 27	13348 14	534 37	34 76
72	0.71532 54516 47	85 22596 86	4 10302 41	12813 77	569 13	34 18
73	0.71447 31919 61	81 12294 45	4 23116 18	12244 64	603 31	33 42
74	0.71366 19625 16	76 89178 27	4 35360 82	11641 33	636 73	32 26
75	0.71289 30446 89	72 53817 45	4 47002 15	11004 60	668 99	31 05
76	0.71216 76629 44	68 06815 30	4 58006 75	10335 61	700 04	29 59
77	0.71148 69814 14	63 48808 55	4 68342 36	9635 57	729 63	27 90
78	0.71085 21005 59	58 80466 19	4 77977 93	8905 94	757 53	25 96
79	0.71026 40539 40	54 02488 26	4 86883 87	8148 41	783 49	23 86
80	0.70972 38051 14	49 15604 39	4 95032 28	7364 92	807 35	21 55
81	0.70923 22446 75	44 20572 11	5 02397 20	6557 57	828 90	19 13
82	0.70879 01874 64	39 18174 91	5 08954 77	5728 67	848 03	16 41
83	0.70839 83699 73	34 09220 14	5 14683 44	4880 64	864 44	13 63
84	0.70805 74479 59	28 94536 70	5 19564 08	4016 20	878 07	10 79
85	0.70776 79942 89	23 74972 62	5 23580 28	3138 13	888 86	7 73
86	0.70753 04970 27	18 51392 34	5 26718 41	2249 27	896 59	4 67
87	0.70734 53577 93	13 24673 93	5 28967 68	1352 68	901 26	+ 1 58
88	0.70721 28904 00	7 95706 25	5 30320 36	+ 451 42	902 84	− 1 58
89	0.70713 33197 75	+ 2 65385 89	5 30771 78	− 451 42	901 26	4 67
90	0.70710 67811 86	− 2 65385 89	5 30320 36	1352 68	896 59	7 73

θ.	F (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
45°	0.82605 78762 49	163 15304 19	1 54620 59	17302 16	746 34	9 75	2 46
46	0.82764 94066 68	164 69924 78	1 37318 43	18048 50	756 09	7 29	2 82
47	0.82929 63991 46	166 07243 21	1 19269 93	18804 59	763 38	4 47	3 05
48	0.83095 71234 67	167 26513 14	1 00465 34	19567 97	767 85	+ 1 42	3 55
49	0.83262 97747 81	168 26978 48	80897 37	20335 82	769 27	− 2 13	3 82
50	0.83431 24726 29	169 07875 85	60561 55	21105 09	767 14	5 95	4 35
51	0.83600 32602 14	169 68437 40	39456 46	21872 23	761 19	10 30	4 53
52	0.83770 01039 54	170 07893 86	+ 17584 23	22633 42	750 89	14 83	5 05
53	0.83940 08933 40	170 25478 09	− 5049 19	23384 31	736 06	19 88	5 57
54	0.84110 34411 49	170 20428 90	28433 50	24120 37	716 18	25 45	5 72
55	0.84280 54840 39	169 91995 40	52553 87	24836 55	690 73	31 17	6 13
56	0.84450 46835 79	169 39441 53	77390 42	25527 28	659 56	37 30	6 60
57	0.84619 86277 32	168 62051 11	1 02917 70	26186 84	622 26	43 90	6 79
58	0.84788 48328 43	167 59133 41	1 29104 54	26809 10	578 36	50 69	7 13
59	0.84956 07461 84	166 30028 87	1 55913 64	27387 46	527 67	57 82	7 25
60	0.85122 37490 71	164 74115 23	1 83301 10	27915 13	469 85	65 07	7 43
61	0.85287 11605 94	162 90814 13	2 11216 23	28384 98	404 78	72 50	7 54
62	0.85450 02420 07	160 79597 90	2 39601 21	28789 76	332 28	80 04	7 52
63	0.85610 82017 97	158 39996 69	2 68390 97	29122 04	252 24	87 56	7 32
64	0.85769 22014 66	155 71605 72	2 97513 01	29374 28	164 68	94 88	7 19
65	0.85924 93620 38	152 74092 71	3 26887 29	29538 96	+ 69 80	102 07	6 86
66	0.86077 67713 09	149 47205 42	3 56426 25	29608 76	− 32 27	108 93	6 32
67	0.86227 14918 51	145 90779 17	3 86035 01	29576 49	141 20	115 25	5 88
68	0.86373 05697 68	142 04744 16	4 15611 50	29435 29	256 45	121 13	4 95
69	0.86515 10441 84	137 89132 66	4 45046 79	29178 84	377 58	126 08	4 34
70	0.86652 99574 50	133 44085 87	4 74225 63	28801 26	503 66	130 42	3 24
71	0.86786 43660 37	128 69860 24	5 03026 89	28297 60	634 08	133 66	2 05
72	0.86915 13520 61	123 66833 35	5 31324 49	27663 52	767 74	135 71	+1 07
73	0.87038 80353 96	118 35508 86	5 58988 01	26895 78	903 45	136 78	− 46
74	0.87157 15862 82	112 76520 85	5 85883 79	25992 33	1040 23	136 32	1 78
75	0.87269 92383 67	106 90637 06	6 11876 12	24952 10	1176 55	134 54	3 25
76	0.87376 83020 73	100 78760 94	6 36828 22	23775 55	1311 09	131 29	4 73
77	0.87477 61781 67	94 41932 72	6 60603 77	22464 46	1442 38	126 56	6 31
78	0.87572 03714 39	87 81328 95	6 83068 23	21022 08	1568 94	120 25	7 76
79	0.87659 85043 34	80 98260 72	7 04090 31	19453 14	1689 19	112 49	9 28
80	0.87740 83304 06	73 94170 41	7 23543 45	17763 95	1801 68	103 21	10 56
81	0.87814 77474 47	66 70626 96	7 41307 40	15962 27	1904 89	92 65	11 92
82	0.87881 48101 43	59 29319 56	7 57269 67	14057 38	1997 54	80 73	13 04
83	0.87940 77420 99	51 72049 89	7 71327 05	12059 84	2078 27	67 69	13 94
84	0.87992 49470 88	44 00722 84	7 83386 89	9981 57	2145 96	53 75	14 87
85	0.88036 50193 72	36 17335 95	7 93368 46	7835 61	2199 71	38 88	15 22
86	0.88072 67529 67	28 23967 49	8 01204 07	5635 90	2238 59	23 66	15 79
87	0.88100 91497 16	20 22763 42	8 06839 97	3397 31	2262 25	+ 7 87	15 74
88	0.88121 14260 58	12 15923 45	8 10237 28	+ 1135 06	2270 12	− 7 87	15 79
89	0.88133 30184 03	+ 4 05686 17	8 11372 34	− 1135 06	2262 25	23 66	15 22
90°	0.88137 35870 20	− 4.05686 17	8 10237 28	3397 31	2238 59	38 88	14 87

θ.	E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°	1.57079 63267 95	11 96176 67	23 91715 64	1913 22	1275 77	52
1	1.57067 67091 28	35 87892 31	23 89802 42	3188 99	1276 29	72
2	1.57031 79198 97	59 77694 73	23 86613 43	4465 28	1277 01	82
3	1.56972 01504 24	83 64308 16	23 82148 15	5742 29	1277 83	1 19
4	1.56888 37196 08	107 46456 31	23 76405 86	7020 12	1279 02	1 28
5	1.56780 90739 77	131 22862 17	23 69385 74	8299 14	1280 30	1 60
6	1.56649 67877 60	154 92247 91	23 61086 60	9579 44	1281 90	1 76
7	1.56494 75629 69	178 53334 51	23 51507 16	10861 34	1283 66	2 13
8	1.56316 22295 18	202 04841 67	23 40645 82	12145 00	1285 79	2 26
9	1.56114 17453 51	225 45487 49	23 28500 82	13430 79	1288 05	2 69
10	1.55888 71966 02	248 73988 31	23 25070 03	14718 84	1290 74	2 88
11	1.55639 97977 71	271 89058 34	23 00351 19	16009 58	1293 62	3 27
12	1.55368 08919 37	294 89409 53	22 84341 61	17303 20	1296 89	3 62
13	1.55073 19509 84	317 73751 14	22 67038 41	18600 09	1300 51	3 97
14	1.54755 45758 70	340 40789 55	22 48438 32	19900 60	1304 48	4 39
15	1.54415 04969 15	362 89227 87	22 28537 72	21205 08	1308 87	4 85
16	1.54052 15741 28	385 17765 59	22 07332 64	22513 95	1313 72	5 23
17	1.53666 97975 69	407 25098 23	21 84818 69	23827 67	1318 95	5 84
18	1.53259 72877 46	429 09916 92	21 60991 02	25146 62	1324 79	6 34
19	1.52830 62960 54	450 70907 94	21 35844 40	26471 41	1331 13	6 94
20	1.52379 92052 60	472 06752 34	21 09372 99	27802 54	1338 07	7 47
21	1.51907 85300 26	493 16125 33	20 81570 45	29140 61	1345 54	8 33
22	1.51414 69174 93	513 97695 78	20 52429 84	30486 15	1353 87	8 95
23	1.50900 71479 15	534 50125 62	20 21943 69	31840 02	1362 82	9 81
24	1.50366 21353 53	554 72069 31	19 90103 67	33202 84	1372 63	10 59
25	1.49811 49284 22	574 62172 98	19 56900 83	34575 47	1383 22	11 57
26	1.49236 87111 24	594 19073 81	19 22325 36	35958 69	1394 79	12 69
27	1.48642 68037 43	613 41399 17	18 86366 67	37353 48	1407 48	13 57
28	1.48029 26638 26	632 27765 84	18 49013 19	38760 96	1421 05	14 94
29	1.47396 98872 42	650 76779 03	18 10252 23	40182 01	1435 99	16 13
30	1.46746 22093 39	668 87031 26	17 70070 22	41618 00	1452 12	17 58
31	1.46077 35062 13	686 57101 48	17 28452 22	43070 12	1469 70	19 02
32	1.45390 77960 65	703 85553 70	16 85382 10	44539 82	1488 72	20 77
33	1.44686 92406 95	720 70935 80	16 40842 28	46028 54	1509 49	22 46
34	1.43966 21471 15	737 11778 08	15 94813 74	47538 03	1531 95	24 45
35	1.43229 09693 07	753 06591 82	15 47275 71	49069 98	1556 40	26 56
36	1.42476 03101 25	768 53867 53	14 98205 73	50626 38	1582 96	28 85
37	1.41707 49233 72	783 52073 26	14 47579 35	52209 34	1611 81	31 37
38	1.40923 97160 46	797 99652 61	13 95370 01	53821 15	1643 16	34 12
39	1.40125 97507 85	811 95022 62	13 41548 86	55464 31	1677 28	37 10
40	1.39314 02485 23	825 36571 48	12 86084 55	57141 59	1714 38	40 35
41	1.38488 65913 75	838 22656 03	12 28942 96	58855 97	1754 73	43 96
42	1.37650 43257 72	850 51598 99	11 70086 99	60610 70	1798 69	47 86
43	1.36799 91658 73	862 21685 98	11 09476 29	62409 39	1846 55	52 24
44	1.35937 69972 75	873 31162 27	10 47066 90	64255 94	1898 79	56 90
45	1.35064 38810 48	883 78229 17	9 82810 96	66154 73	1955 69	62 19

θ.	F¹.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0°	1.57079 63267 95	11 96313 32	23 93629 13	3009 84	2014 58	12 10	4 85
1	1.57091 59581 27	35 89942 45	23 96638 97	5024 42	2026 68	16 95	5 11
2	1.57127 49523 72	59 86581 42	24 01663 39	7051 10	2043 63	22 06	4 99
3	1.57187 36105 14	83 88244 81	24 08714 49	9094 73	2065 69	27 06	5 36
4	1.57271 24349 95	107 96959 30	24 17809 22	11160 42	2092 74	32 41	5 37
5	1.57379 21309 25	132 14768 52	24 28969 64	13253 16	2125 15	37 78	5 65
6	1.57511 36077 77	156 43738 16	24 42222 80	15378 31	2162 93	43 43	5 81
7	1.57667 79815 93	180 85960 96	24 57601 11	17541 24	2206 36	49 24	6 16
8	1.57848 65776 89	205 43562 07	24 75142 35	19747 60	2255 60	55 40	6 36
9	1.58054 09338 96	230 18704 42	24 94889 95	22003 20	2311 00	61 76	6 84
10	1.58284 28043 38	255 13594 37	25 16893 15	24314 20	2372 76	68 60	7 02
11	1.58539 41637 75	280 30487 52	25 41207 35	26686 96	2441 36	75 62	7 66
12	1.58819 72125 27	305 71694 87	25 67894 31	29128 32	2516 98	83 28	7 98
13	1.59125 43820 14	331 39589 18	25 97022 63	31645 30	2600 26	91 26	8 55
14	1.59456 83409 32	357 36611 81	26 28667 93	34245 56	2691 52	99 81	9 25
15	1.59814 20021 13	383 65279 74	26 62913 49	36937 08	2791 33	109 06	9.76
16	1.60197 85300 87	410 28193 23	26 99850 57	39728 41	2900 39	118 82	10 54
17	1.60608 13494 10	437 28043 80	27 39578 98	42628 80	3019 21	129 36	11 45
18	1.61045 41537 90	464 67622 78	27 82207 78	45648 01	3148 57	140 81	12 24
19	1.61510 09160 68	492 49830 56	28 27855 79	48796 58	3289 38	153 05	13 30
20	1.62002 58991 24	520 77686 35	28 76652 37	52085 96	3442 43	166 35	14 46
21	1.62523 36677 59	549 54338 72	29 28738 33	55528 39	3608 78	180 81	15 69
22	1.63072 91016 31	578 83077 05	29 84266 72	59137 17	3789 59	196 50	17 04
23	1.63651 74093 36	608 67343 77	30 43403 89	62926 76	3986 09	213 54	18 69
24	1.64260 41437 13	639 10747 66	31 06330 65	66912 85	4199 63	232 23	20 46
25	1.64899 52184 79	670 17078 31	31 73243 50	71112 48	4431 86	252 69	22 27
26	1.65569 69263 10	701 90321 81	32 44355 98	75544 34	4684 55	274 96	24 65
27	1.66271 59584 91	734 34677 79	33 19900 32	80228 89	4959 51	299 61	27 00
28	1.67005 94262 70	767 54578 11	34 00129 21	85188 40	5259 12	326 61	29 77
29	1.67773 48840 81	801 54707 32	34 85317 61	90447 52	5585 73	356 38	33 06
30	1.68575 03548 13	836 40024 93	35 75765 13	96033 25	5942 11	389 44	36 32
31	1.69411 43573 06	872 15790 06	36 71798 38	1 01975 36	6331 55	425 76	40 56
32	1.70283 52364 12	908 87588 44	37 73773 74	1 08306 91	6757 31	466 32	44 96
33	1.71192 46951 56	946 61362 18	38 82080 65	1 15064 22	7223 63	511 28	50 12
34	1.72139 08313 74	985 43442 83	39 97144 87	1 22287 85	7734 91	561 40	56 03
35	1.73124 51756 57	1025 40587 70	41 19432 72	1 30022 76	8296 31	617 43	62 50
36	1.74149 92344 27	1066 60020 42	42 49455 48	1 38319 07	8913 74	679 93	70 55
37	1.75216 52364 69	1109 09475 90	43 87774 55	1 47232 81	9593 67	750 48	78 89
38	1.76325 61840 59	1152 97250 45	45 35007 36	1 56826 48	10344 15	829 37	89 18
39	1.77478 59091 04	1198 32257 81	46 91833 84	1 67170 63	11173 52	918 55	100 81
40	1.78676 91348 85	1245 24091 65	48 59004 47	1 78344 15	12092 07	1019 36	114 30
41	1.79922 15440 50	1293 83096 12	50 37348 62	1 90436 22	13111 43	1133 66	129 51
42	1.81215 98536 62	1344 20444 74	52 27784 84	2 03547 65	14245 09	1263 17	148 62
43	1.82560 18981 36	1396 48229 58	54 31332 49	2 17792 74	15508 26	1411 79	168 75
44	1.83956 67210 94	1450 79562 07	56 49125 23	2 33301 00	16920 05	1580 54	194 26
45	1.85407 46773 01	1507 28687 30	58 82426 23	2 50221 05	18500 59	1774 80	223 61

θ.	E'.	Diff.	θ.	F'.	Diff.
45°	1.35064 38810 48	883 78229 17	45°	1.85407 46773 01	1507 28687 30
46	1.34180 60581 31	893 61040 13	46	1.86914 75460 31	1566 11113 53
47	1.33286 99541 18	902 77696 36	47	1.88480 86573 84	1627 43760 81
48	1.32384 21844 82	911 26242 17	48	1.90108 30334 65	1691 45129 73
49	1.31472 95602 65	919 04659 68	49	1.91799 75464 38	1758 35495 68
50	1.30553 90942 97	926 10863 03	50	1.93558 10960 06	1828 37132 46
51	1.29627 80079 94	932 42691 11	51	1.95386 48092 52	1901 74570 23
52	1.28695 37387 83	937 97905 33	52	1.97288 22662 75	1978 74894 60
53	1.27757 39482 50	942 74171 86	53	1.99266 97557 35	2059 68094 66
54	1.26814 65310 64	946 69062 86	54	2.01326 65652 01	2144 87469 85
55	1.25867 96247 78	949 80041 71	55	2.03471 53121 86	2234 70106 11
56	1.24918 16206 07	952 04453 18	56	2.05706 23227 97	2329 57438 95
57	1.23966 11752 89	953 39511 03	57	2.08035 80666 92	2429 95917 99
58	1.23012 72241 86	953 82284 32	58	2.10465 76584 91	2536 37799 08
59	1.22058 89957 54	953 29681 86	59	2.13002 14383 99	2649 42091 01
60	1.21105 60275 68	951 78434 54	60	2.15651 56475 00	2769 75694 49
61	1.20153 81841 14	949 25075 34	61	2.18421 32169 49	2898 14780 32
62	1.19204 56765 80	945 65916 35	62	2.21319 46949 81	3035 46467 28
63	1.18258 90849 45	940 97022 61	63	2.24354 93416 99	3182 70879 03
64	1.17317 93826 84	935 14181 91	64	2.27537 64296 12	3341 03685 55
65	1.16382 79644 93	928 12869 68	65	2.30878 67981 67	3511 79262 81
66	1.15454 66775 25	919 88208 44	66	2.34390 47244 47	3696 54661 57
67	1.14534 78566 81	910 34919 97	67	2.38087 01906 04	3897 14631 35
68	1.13624 43646 84	899 47269 27	68	2.41984 16537 39	4115 78045 65
69	1.12724 96377 57	887 18997 87	69	2.46099 94583 04	4355 06206 98
70	1.11837 77379 70	873 43244 27	70	2.50455 00790 02	4618 13706 25
71	1.10964 34135 43	858 12447 85	71	2.55073 14496 27	4908 82804 34
72	1.10106 21687 58	841 18232 22	72	2.59981 97300 61	5231 82745 69
73	1.09265 03455 36	822 51261 62	73	2.65213 80046 30	5592 96099 60
74	1.08442 52193 74	802 01062 98	74	2.70806 76145 90	5999 55307 79
75	1.07640 51130 76	779 55800 98	75	2.76806 31453 69	6460 94375 49
76	1.06860 95329 78	755 01992 24	76	2.83267 25829 18	6989 23577 52
77	1.06105 93337 54	728 24133 47	77	2.90256 49406 70	7600 40105 11
78	1.05377 69204 07	699 04210 62	78	2.97856 89511 81	8315 96608 58
79	1.04678 64993 45	667 21036 39	79	3.06172 86120 39	9165 66398 49
80	1.04011 43957 06	632 49333 15	80	3.15338 52518 88	10191 76902 55
81	1.03378 94623 91	594 58326 50	81	3.25530 29421 43	11456 50845 25
82	1.02784 36197 41	553 10315 73	82	3.36986 80266 68	13055 44725 05
83	1.02231 25881 68	507 56698 27	83	3.50042 24991 73	15143 34703 06
84	1.01723 69183 41	457 34121 07	84	3.65185 59694 79	17988 60302 87
85	1.01266 35062 34	401 55493 27	85	3.83174 19997 66	22101 61697 83
86	1.00864 79569 07	338 93696 98	86	4.05275 81695 49	28589 58064 51
87	1.00525 85872 09	267 45016 81	87	4.33865 39760 00	40406 32892 79
88	1.00258 40855 28	183 25078 26	88	4.74271 72652 79	69219 25643 46
89	1.00075 15777 02	75 15777 02	89	5.43490 98296 25	
90°	1.00000 00000 00		$\frac{1}{2}\pi - \omega$	log hyp. $\frac{4}{\omega}$.	

TABLE IX

OU

TABLE GÉNÉRALE des Fonctions F et E, calculées pour chaque degré de l'amplitude φ et de l'angle du module θ, avec dix décimales depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=45°$, et avec neuf seulement depuis $\theta=45°$ jusqu'à $\theta=90°$.

φ.	E(0°).	E(1°).	E(2°).	E(3°).	E(4°).	E(5°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 0000
1	0.01745 32925	0.01745 32922	0.01745 32914	0.01745 32901	0.01745 32882	0.01745 3285
2	0.03490 65850	0.03490 65829	0.03490 65764	0.03490 65656	0.03490 65505	0.03490 6531
3	0.05235 98776	0.05235 98703	0.05235 98484	0.05235 98121	0.05235 97612	0.05235 9696
4	0.06981 31701	0.06981 31528	0.06981 31010	0.06981 30149	0.06981 28944	0.06981 2739
5	0.08726 64626	0.08726 64290	0.08726 63278	0 08726 61597	0.08726 59244	0.08726 5622
6	0.10471 97551	0.10471 96970	0.10471 95224	0.10471 92320	0.10471 88258	0.10471 8304
7	0.12217 30476	0.12217 29554	0.12217 26784	0.12217 22176	0.12217 15731	0.12217 0745
8	0.13962 63402	0.13962 62026	0.13962 57896	0.13962 51023	0.13962 41411	0.13962 2907
9	0.15707 96327	0.15707 94369	0.15707 88497	0.15707 78720	0.15707 65048	0.15707 4749
10	0.17453 29252	0.17453 26569	0.17453 18525	0.17453 05129	0.17452 86395	0.17452 6235
11	0.19198 62177	0.19198 58611	0.19198 47917	0.19198 30110	0.19198 05208	0.19197 7324
12	0.20943 95102	0.20943 90479	0.20943 76615	0.20943 53528	0.20943 21244	0.20942 7980
13	0.22689 28028	0.22689 22158	0.22689 04558	0.22688 75250	0.22688 34266	0.22687 8165
14	0.24434 60953	0.24434 53635	0.24434 31688	0.24433 95143	0.24433 44039	0.24432 7843
15	0.26179 93878	0.26179 84893	0.26179 57948	0.26179 13078	0.26178 50333	0.26177 69787
16	0.27925 26803	0.27925 15919	0.27924 83281	0.27924 28927	0.27923 52920	0.27922 5535
17	0.29670 59728	0.29670 46700	0.29670 07631	0.29669 42565	0.29668 51579	0.29667 3478
18	0.31415 92654	0.31415 77221	0.31415 30943	0.31414 53870	0.31413 46094	0.31412 0774
19	0.33161 25579	0.33161 07469	0.33160 53164	0.33159 62723	0.33158 36253	0.33156 7390
20	0.34906 58504	0.34906 37432	0.34905 74244	0.34904 69007	0.34903 21847	0.34901 3293
21	0.36651 91429	0.36651 67096	0.36650 94131	0.36649 72610	0.36648 02677	0.36645 84526
22	0.38397 24354	0.38396 96451	0.38396 12776	0.38394 73420	0.38392 78546	0.38390 28376
23	0.40142 57280	0.40142 25483	0.40141 30133	0.40139 71333	0.40137 49266	0.40134 64184
24	0.41887 90205	0.41887 54182	0.41886 46156	0.41884 66245	0.41882 14653	0.41878 91667
25	0.43633 23130	0.43632 82535	0.43631 60800	0.43629 58056	0.43626 74531	0.43623 10547
26	0.45378 56055	0.45378 10534	0.45376 74022	0.45374 46670	0.45371 28731	0.45367 20559
27	0.47123 88980	0.47123 38166	0.47121 85783	0.47119 31996	0.47115 77087	0.47111 21449
28	0.48869 21906	0.48868 65424	0.48866 96043	0.48864 13947	0.48860 19445	0.48855 12971
29	0.50614 54831	0.50613 92296	0.50612 04765	0.50608 92439	0.50604 55656	0.50598 94895
30	0.52359 87756	0.52359 18776	0.52357 11914	0.52353 67391	0.52348 85580	0.52342 67000
31	0.54105 20681	0.54104 44854	0.54102 17457	0.54098 38730	0.54093 09081	0.54086 29077
32	0.55850 53606	0.55849 70522	0.55847 21362	0.55843 06385	0.55837 26035	0.55829 80929
33	0.57595 86532	0.57594 95774	0.57592 23598	0.57587 70289	0.57581 36324	0.57573 22372
34	0.59341 19457	0.59340 20602	0.59337 24140	0.59332 30381	0.59325 39838	0.59316 53236
35	0.61086 52382	0.61085 44999	0.61082 22962	0.61076 86604	0.61069 36477	0.61059 73361
36	0.62831 85307	0.62830 68961	0.62827 20041	0.62821 38904	0.62813 26146	0.62802 82601
37	0.64577 18232	0.64575 92482	0.64572 15355	0.64565 87236	0.64557 08761	0.64545 80825
38	0.66322 51158	0.66321 15557	0.66317 08885	0.66310 31555	0.66300 84247	0.66288 67913
39	0.68067 84083	0.68066 38181	0.68062 00615	0.68054 71826	0.68044 52536	0.68031 43760
40	0.69813 17008	0.69811 60351	0.69806 90531	0.69799 08014	0.69788 13568	0.69774 08275
41	0.71558 49933	0.71556 82065	0.71551 78619	0.71543 40091	0.71531 67296	0.71516 61379
42	0.73303 82858	0.73302 03319	0.73296 64871	0.73287 68035	0.73275 13677	0.73259 03009
43	0.75049 15784	0.75047 24112	0.75041 49277	0.75031 91828	0.75018 52681	0.75001 33113
44	0.76794 48709	0.76792 44442	0.76786 31831	0.76776 11458	0.76761 84283	0.76743 51657
45	0.78539 81634	0.78537 64308	0.78531 12532	0.78520 26915	0.78505 08471	0.78485 58619

φ.	F(0°).	F(1°).	F(2°).	F(3°).	F(4°).	F(5°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32925	0.01745 32928	0.01745 32936	0.01745 32949	0.01745 32969	0.01745 32993
2	0.03490 65850	0.03490 65871	0.03490 65936	0.03490 66044	0.03490 66196	0.03490 66389
3	0.05235 98776	0.05235 98848	0.05235 99067	0.05235 99430	0.05235 99939	0.05236 00591
4	0.06981 31701	0.06981 31873	0.06981 32391	0.06981 33252	0.06981 34458	0.06981 36004
5	0.08726 64626	0.08726 64962	0.08726 65972	0.08726 67655	0.08726 70008	0.08726 73027
6	0.10471 97551	0.10471 98132	0.10471 99877	0.10472 02782	0.10472 06844	0.10472 12058
7	0.12217 30476	0.12217 31399	0.12217 34167	0.12217 38776	0.12217 45222	0.12217 53496
8	0.13962 63402	0.13962 64777	0.13962 68905	0.13962 75780	0.13962 85392	0.13962 97731
9	0.15707 96327	0.15707 98284	0.15708 04155	0.15708 13934	0.15708 27606	0.15708 45156
10	0.17453 29252	0.17453 31934	0.17453 39978	0.17453 53376	0.17453 72110	0.17453 96158
11	0.19198 62177	0.19198 65742	0.19198 76437	0.19198 94245	0.19199 19149	0.19199 51118
12	0.20943 95102	0.20943 99725	0.20944 13589	0.20944 36678	0.20944 68965	0.20945 10412
13	0.22689 28028	0.22689 33896	0.22689 51496	0.22689 80807	0.22690 21795	0.22690 74414
14	0.24434 60953	0.24434 68270	0.24434 90217	0.24435 26765	0.24435 77876	0.24436 43491
15	0.26179 93878	0.26180 02863	0.26180 29809	0.26180 74682	0.26181 37437	0.26182 18003
16	0.27925 26803	0.27925 37688	0.27925 70326	0.27926 24686	0.27927 00706	0.27927 98303
17	0.29670 59728	0.29670 72757	0.29671 11827	0.29671 76900	0.29672 67904	0.29673 84738
18	0.31415 92654	0.31416 08087	0.31416 54366	0.31417 31448	0.31418 39248	0.31419 77648
19	0.33161 25579	0.33161 43689	0.33161 97996	0.33162 88449	0.33164 14950	0.33165 77366
20	0.34906 58504	0.34906 79576	0.34907 42768	0.34908 48019	0.34909 95219	0.34911 84215
21	0.36651 91429	0.36652 15762	0.36652 88732	0.36654 10272	0.36655 80255	0.36657 98510
22	0.38397 24354	0.38397 52258	0.38398 35938	0.38399 75318	0.38401 70255	0.38404 20556
23	0.40142 57280	0.40142 89077	0.40143 84433	0.40145 43262	0.40147 65407	0.40150 50652
24	0.41887 90205	0.41888 26228	0.41889 34262	0.41891 14209	0.41893 65896	0.41896 89085
25	0.43633 23130	0.43633 63725	0.43634 85470	0.43636 88259	0.43639 71899	0.43643 36130
26	0.45378 56055	0.45379 01577	0.45380 38100	0.45382 65507	0.45385 83587	0.45389 92055
27	0.47123 88980	0.47124 39795	0.47125 92192	0.47128 46044	0.47132 01121	0.47136 57116
28	0.48869 21906	0.48869 78387	0.48871 47785	0.48874 29958	0.48878 24660	0.48883 31558
29	0.50614 54831	0.50615 17365	0.50617 04917	0.50620 17334	0.50624 54353	0.50630 15615
30	0.52359 87756	0.52360 56736	0.52362 63622	0.52366 08251	0.52370 90341	0.52377 09509
31	0.54105 20681	0.54105 96508	0.54108 23934	0.54112 02784	0.54117 32759	0.54124 13450
32	0.55850 53606	0.55851 36692	0.55853 85885	0.55858 03004	0.55863 81732	0.55871 27636
33	0.57595 86532	0.57596 77291	0.57599 49504	0.57604 02978	0.57610 37380	0.57618 52253
34	0.59341 19457	0.59342 18314	0.59345 14819	0.59350 08768	0.59356 99812	0.59365 87474
35	0.61086 52382	0 61087 59767	0.61090 81855	0.61096 18430	0.61103 69131	0.61113 33460
36	0.62831 85307	0.62833 01657	0.62836 50634	0.62842 32017	0.62850 45430	0.62860 90357
37	0.64577 18232	0.64578 43987	0.64582 21178	0.64588 49576	0.64597 28795	0.64608 58300
38	0.66322 51158	0.66323 86764	0.66327 93507	0.66334 71152	0.66344 19301	0.66356 37410
39	0.68067 84083	0.68069 29991	0.68073 67637	0.68080 96781	0.68091 17019	0.68104 27792
40	0.69813 17008	0.69814 73672	0.69819 43582	0.69827 26497	0.69838 22006	0.69852 29541
41	0.71558 49933	0.71560 17809	0.71565 21356	0.71573 60328	0.71585 34313	0.71600 42737
42	0.73303 82858	0.73305 62406	0.73311 09968	0.73319 98298	0.73332 53982	0.73348 67445
43	0.75049 15784	0.75051 07464	0.75056 82426	0.75066 40424	0.75079 81044	0.75097 03717
44	0.76794 48709	0.76796 52985	0.76802 65736	0.76812 86718	0.76827 15525	0.76845 51590
45	0.78539 81634	0.78541 98970	0.78548 50901	0.78559 37189	0.78574 57437	0.78594 11090

φ.	E(0°).	E(1°).	E(2°).	E(3°).	E(4°).	E(5°).
45°	0.78539 81634	0.78537 64308	0.78531 12532	0.78520 26915	0.78505 08471	0.78485 5861
46	0.80285 14559	0.80282 83710	0.80275 91377	0.80264 38199	0.80248 25239	0.80227 5399
47	0.82030 47484	0.82028 02650	0.82020 68368	0.82008 45310	0.81991 34592	0.81969 3777
48	0.83775 80410	0.83773 21126	0.83765 43507	0.83752 48258	0.83734 36542	0.83711 1000
49	0.85521 13335	0.85518 39142	0.85510 16802	0.85496 47054	0.85477 31114	0.85452 7069
50	0.87266 46260	0.87263 56698	0.87254 88259	0.87240 41716	0.87220 18336	0.87194 1990
51	0.89011 79185	0.89008 73796	0.88999 57889	0.88984 32266	0.88952 98250	0.88935 5770
52	0.90757 12110	0.90753 90441	0.90744 25703	0.90728 18732	0.90705 70905	0.90676 8415
53	0.92502 45036	0.92499 06635	0.92488 91718	0.92472 01148	0.92448 36358	0.92417 9935
54	0.94247 77961	0.94244 22384	0.94233 55948	0.94215 79551	0.94190 94677	0.94159 0341
55	0.95993 10886	0.95989 37692	0.95978 18414	0.95959 53983	0.95933 45936	0.95899 9643
56	0.97738 43811	0.97734 52564	0.97722 79136	0.97703 24491	0.97675 90221	0.97640 7856
57	0.99483 76736	0.99479 67005	0.99467 38138	0.99446 91128	0.99418 27623	0.99381 4993
58	1.01229 09662	1.01224 81023	1.01211 95443	1.01190 53950	1.01160 58244	1.01122 1071
59	1.02974 42587	1.02969 94623	1.02956 51081	1.02934 13019	1.02902 82193	1.02862 6106
60	1.04719 75512	1.04715 07815	1.04701 05081	1.04677 68402	1.04644 99586	1.04603 0117
61	1.06465 08437	1.06460 20604	1.06445 57474	1.06421 20169	1.06387 10551	1.06343 3123
62	1.08210 41362	1.08205 32999	1.08190 08293	1.08164 68394	1.08129 15219	1.08083 5145
63	1.09955 74288	1.09950 45011	1.09934 57573	1.09908 13157	1.09871 13732	1.09823 6205
64	1.11701 07213	1.11695 56647	1.11679 05351	1.11651 54542	1.11613 06237	1.11563 6326
65	1.13446 40138	1.13440 67917	1.13423 51668	1.13394 92636	1.13354 92892	1.13303 5534
66	1.15191 73063	1.15185 78833	1.15167 96563	1.15138 27531	1.15096 73858	1.15043 3852
67	1.16937 05988	1.16930 89403	1.16912 40079	1.16881 59323	1.16838 49306	1.16783 1307
68	1.18682 38914	1.18675 99640	1.18656 82260	1.18624 88110	1.18580 19413	1.18522 7928
69	1.20427 71839	1.20421 09554	1.20401 23152	1.20368 13996	1.20321 84361	1.20262 3742
70	1.22173 04764	1.22166 19158	1.22145 62802	1.22111 37087	1.22063 44340	1.22001 8780
71	1.23918 37689	1.23911 28463	1.23890 01258	1.23854 57494	1.23804 99545	1.23741 3072
72	1.25663 70614	1.25656 37484	1.25634 38572	1.25597 75331	1.25546 50178	1.25480 6649
73	1.27409 03540	1.27401 46231	1.27378 74795	1.27340 90712	1.27287 96445	1.27219 9544
74	1.29154 36465	1.29146 54719	1.29123 09981	1.29084 03757	1.29029 38559	1.28959 1790
75	1.30899 69390	1.30891 62961	1.30867 44183	1.30827 14589	1.30770 76737	1.30698 3420
76	1.32645 02315	1.32636 70971	1.32611 77457	1.32570 23333	1.32512 11203	1.32437 4470
77	1.34390 35240	1.34381 78763	1.34356 09859	1.34313 30116	1.34253 42180	1.34176 4975
78	1.36135 68166	1.36126 86352	1.36100 41449	1.36056 35068	1.35994 69901	1.35915 4971
79	1.37881 01091	1.37871 93753	1.37844 72283	1.37799 38321	1.37735 94602	1.37654 4495
80	1.39626 34016	1.39617 00979	1.39589 02422	1.39542 40009	1.39477 16520	1.39393 3583
81	1.41371 66941	1.41362 08047	1.41333 31926	1.41285 40269	1.41218 35898	1.41132 2275
82	1.43116 99866	1.43107 14971	1.43077 60857	1.43028 39238	1.42959 52980	1.42871 0608
83	1.44862 32792	1.44852 21767	1.44821 89276	1.44771 37056	1.44700 68014	1.44609 8621
84	1.46607 65717	1.46597 28452	1.46566 17245	1.46514 33863	1.46441 81251	1.46348 6353
85	1.48352 98642	1.48342 35039	1.48310 44830	1.48257 29801	1.48182 92943	1.48087 3843
86	1.50098 31567	1.50087 41547	1.50054 72092	1.50000 25015	1.49924 03346	1.49826 1132
87	1.51843 64492	1.51832 47989	1.51798 99094	1.51743 19647	1.51665 12715	1.51564 8250
88	1.53588 97418	1.53577 54383	1.53543 25904	1.53486 13842	1.53406 21307	1.53303 5265
89	1.55334 30343	1.55322 60745	1.55287 52585	1.55229 07746	1.55147 29381	1.55042 2180
90	1.57079 63268	1.57067 67091	1.57031 79199	1.56972 01504	1.56888 37196	1.56780 9074

φ.	F(0°).	F(1°).	F(2°).	F(3°).	F(4°).	F(5°).
45°	0.78539 81634	0.78541 98970	0.78548 50901	0.78559 37189	0.78574 57437	0.78594 11090
46	0.80285 14559	0.80287 45419	0.80294 37923	0.80305 91841	0.80322 06788	0.80342 82223
47	0.82030 47484	0.82032 92332	0.82040 26801	0.82052 50671	0.82069 63572	0.82091 64986
48	0.83775 80410	0.83778 39707	0.83786 17530	0.83799 13671	0.83817 27777	0.83840 59360
49	0.85521 13335	0.85523 87544	0.85532 10106	0.85545 80829	0.85564 99383	0.85589 65312
50	0.87266 46260	0.87269 35840	0.87278 04521	0.87292 52127	0.87312 78357	0.87338 82795
51	0.89011 79185	0.89014 84593	0.89024 00765	0.89039 27542	0.89060 64661	0.89088 11746
52	0.90757 12110	0.90760 33800	0.90769 98825	0.90786 07049	0.90808 58246	0.90837 52092
53	0.92502 45036	0.92505 83458	0.92515 98687	0.92532 90614	0.92556 59053	0.92587 03742
54	0 94247 77961	0.94251 33561	0.94262 00334	0.94279 78199	0.94304 67018	0.94336 66594
55	0.95993 10886	0.95996 84106	0.96008 03747	0.96026 69762	0.96052 82064	0.96086 40531
56	0.97738 43811	0.97742 35087	0.97754 08905	0.97773 65256	0.97801 04108	0.97836 25421
57	0.99483 76736	0.99487 86497	0.99500 15785	0.99520 64627	0.99549 33057	0.99586 21123
58	1.01229 09662	1.01233 38332	1.01246 24362	1.01267 67820	1.01297 68811	1.01336 27478
59	1.02974 42587	1.02978 90584	1.02992 34609	1.03014 74774	1.03046 11261	1.03086 44316
60	1.04719 75512	1.04724 43246	1.04738 46496	1.04761 85423	1.04794 60290	1.04836 71455
61	1.06465 08437	1.06469 96308	1.06484 59991	1.06508 99695	1.06543 15770	1.06587 08698
62	1.08210 41362	1.08215 49765	1.08230 75061	1.08256 17516	1.08291 77571	1.08337 55838
63	1.09955 74288	1.09961 03607	1.09976 91671	1.10003 38806	1.10040 45551	1.10088 12655
64	1.11701 07213	1.11706 57824	1.11723 09784	1.11750 64382	1.11789 19563	1.11838 78915
65	1.13446 40138	1.13452 12407	1.13469 29361	1.13497 91456	1.13537 99446	1.13589 54377
66	1.15191 73063	1.15197 67345	1.15215 50360	1.15245 22636	1.15286 85041	1.15340 38784
67	1.16937 05988	1.16943 22628	1.16961 72740	1.16992 56927	1.17035 76177	1.17091 31870
68	1.18682 38914	1.18688 78245	1.18707 96457	1.18739 94229	1.18784 72677	1.18842 33359
69	1.20427 71839	1.20434 34184	1.20454 21465	1.20487 34439	1.20533 74357	1.20593 42963
70	1.22173 04764	1.22179 90434	1.22200 47715	1.22234 77450	1.22282 81027	1.22344 60385
71	1.23918 37689	1.23925 46981	1.23946 75160	1.23982 23152	1.24031 92491	1.24095 85319
72	1.25663 70614	1.25671 03815	1.25693 03749	1.25729 71432	1.25781 08548	1.25847 17448
73	1.27409 03540	1.27416 60921	1.27439 33430	1.27477 22172	1.27530 28990	1.27598 56448
74	1.29154 36465	1.29162 18288	1.29185 64150	1.29224 75255	1.29279 53603	1.29350 01985
75	1.30899 69390	1.30907 75899	1.30931 95853	1.30972 30556	1.31028 82170	1.31101 53717
76	1.32645 02315	1.32653 33743	1.32678 28487	1.32719 87951	1.32778 14468	1.32853 11296
77	1.34390 35240	1.34398 91805	1.34424 61993	1.34467 47312	1.34527 50268	1.34604 74364
78	1.36135 68166	1.36144 50069	1.36170 96313	1.36215 08509	1.36276 89339	1.36356 42559
79	1.37881 01091	1.37890 08524	1.37917 31390	1.37962 71409	1.38026 31446	1.38108 15511
80	1.39626 34016	1.39635 67151	1.39663 67161	1.39710 35878	1.39775 76349	1.39859 92845
81	1.41371 66941	1.41381 25937	1.41410 03569	1.41458 01780	1.41525 23804	1.41611 74179
82	1.43116 99866	1.43126 84867	1.43156 40551	1.43205 68976	1.43274 73566	1.43363 59128
83	1.44862 32792	1.44872 43925	1.44902 78045	1.44953 37325	1.45024 25385	1.45115 47302
84	1.46607 65717	1.46618 03095	1.46649 15989	1.46701 06688	1.46773 79010	1.46867 38306
85	1.48352 98642	1.48363 62361	1.48395 54319	1.48448 76922	1.48523 34187	1.48619 31743
86	1.50098 31567	1.50109 21708	1.50141 92972	1.50196 47884	1.50272 90660	1.50371 27211
87	1.51843 64492	1.51854 81120	1.51888 31883	1.51944 19428	1.52022 48171	1.52123 24308
88	1.53588 97418	1.53600 40580	1.53634 70988	1.53691 91410	1.53772 06464	1.53875 22628
89	1.55334 30343	1.55346 00072	1.55381 10223	1.55439 63684	1.55521 65277	1.55627 21764
90	1.57079 63268	1.57091 59581	1.57127 49524	1.57187 36105	1.57271 24350	1.57379 21309

φ.	E(5°).	E(6°).	E(7°).	E(8°).	E(9°).	E(1
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.0000
1	0.01745 32858	0.01745 32829	0.01745 32793	0.01745 32753	0.01745 32709	0.0174
2	0.03490 65312	0.03490 65076	0.03490 64798	0.03490 64477	0.03490 64116	0.0349
3	0.05235 96960	0.05235 96163	0.05235 95224	0.05235 94144	0.05235 92924	0.0523
4	0.06981 27397	0.06981 25511	0.06981 23286	0.06981 20727	0.06981 17836	0.0698
5	0.08726 56225	0.08726 52543	0.08726 48200	0.08726 43204	0.08726 37561	0.0023
6	0.10471 83045	0.10471 76684	0.10471 69186	0.10471 60559	0.10471 50814	0.1047
7	0.12217 07458	0.12216 97366	0.12216 85469	0.12216 71781	0.12216 56317	0.1221
8	0.13962 29073	0.13962 14023	0.13961 96279	0.13961 75865	0.13961 52802	0.1396
9	0.15707 47499	0.15707 26092	0.15707 00854	0.15706 71817	0.15706 39012	0.1570
10	0.17452 62350	0.17452 33019	0.17451 98438	0.17451 58651	0.17451 13702	0.1745
11	0.19197 73243	0.19197 34253	0.19196 88284	0.19196 35393	0.19195 75641	0.1919
12	0.20942 79803	0.20942 29253	0.20941 69655	0.20941 01081	0.20940 23612	0.2093
13	0.22687 81657	0.22687 17483	0.22686 41823	0.22685 54767	0.22684 56417	0.2268
14	0.24432 78438	0.24431 98417	0.24431 04071	0.24429 95515	0.24428 72873	0.2442
15	0.26177 69787	0.26176 71536	0.26175 55696	0.26174 22407	0.26172 71820	0.2617
16	0.27922 55350	0.27921 36332	0.27919 96006	0.27918 34510	0.27916 52118	0.2791
17	0.29667 34781	0.29665 92307	0.29664 24323	0.29662 31030	0.29660 12649	0.2965
18	0.31412 07742	0.31410 38973	0.31408 39984	0.31406 11012	0.31403 52317	0.3140
19	0.33156 73900	0.33154 75853	0.33152 42341	0.33149 73639	0.33146 70053	0.3314
20	0.34901 32933	0.34899 02482	0.34896 30761	0.34893 18086	0.34889 64813	0.3488
21	0.36645 84526	0.36643 18409	0.36640 04629	0.36636 43551	0.36632 35584	0.3662
22	0.38390 28376	0.38387 23194	0.38383 63347	0.38379 49252	0.38374 81378	0.3836
23	0.40134 64184	0.40131 16410	0.40127 06337	0.40122 34435	0.40117 01238	0.4011
24	0.41878 91667	0.41874 97647	0.41870 33039	0.41864 98368	0.41858 94238	0.4185
25	0.43623 10547	0.43618 66507	0.43613 42910	0.43607 40345	0.43600 59487	0.4359
26	0.45367 20559	0.45362 22608	0.45356 35431	0.45349 59686	0.45341 96123	0.4533
27	0.47111 21449	0.47105 65582	0.47099 10102	0.47091 55739	0.47083 03322	0.4707
28	0.48855 12971	0.48848 95079	0.48841 66447	0.48833 27879	0 48823 80294	0.4881
29	0.50598 94895	0.50592 10765	0.50584 04009	0.50574 75512	0.50564 26284	0 5055
30	0.52342 67000	0.52335 12321	0.52326 22356	0.52315 98073	0.52304 40577	0.5229
31	0.54086 29077	0.54077 99447	0.54068 21078	0.54056 95025	0.54044 22495	0.5403
32	0.55829 80929	0.55820 71858	0.55809 99789	0.55797 65865	0.55783 71400	0.5576
33	0.57573 22372	0.57563 29292	0.57551 58128	0.57538 10120	0.57522 86692	0.5750
34	0.59316 53236	0.59305 71499	0.59292 95758	0.59278 27350	0.59261 67812	0.5924
35	0.61059 73361	0.61047 98251	0.61034 12367	0.61018 17146	0.61000 14245	0.6098
36	0.62802 82601	0.62790 09340	0.62775 07669	0.62757 79135	0.62738 25515	0.6271
37	0.64545 80825	0.64532 04573	0.64515 81404	0.64497 12975	0.64476 01189	0.6445
38	0.66288 67913	0.66273 83779	0.66256 33339	0.66236 18360	0.66213 40878	0.6618
39	0.68031 43760	0.68015 46805	0.67996 63264	0.67974 95018	0.67950 44237	0.6792
40	0.69774 08275	0.69756 93521	0.69736 70999	0.69713 42712	0.69687 10963	0.6965
41	0.71516 61379	0.71498 23812	0.71476 56390	0.71451 61238	0.71423 40800	0.7139
42	0.73259 03009	0.73239 37586	0.73216 19311	0 73189 50430	0.73159 33534	0.7312
43	0.75001 33113	0.74980 34771	0.74955 59662	0.74927 10159	0.74894 89000	0.7485
44	0.76743 51657	0.76721 15513	0.76694 77370	0.76664 40328	0.76630 07073	0.7659
45	0.78485 58619	0.78461 79183	0.78433 72392	0.78401 40879	0.78364 87678	0.7832

φ.	F (5°).	F (6°).	F (7°).	F (8°).	F (9°).	F (10°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32993	0.01745 33022	0 01745 33057	0.01745 33096	0.01745 33142	0.01745 33193
2	0.03490 66389	0.03490 66624	0.03490 66903	0.03490 67222	0.03490 67584	0.03490 67988
3	0.05236 00591	0.05236 01388	0.05236 02327	0.05236 03406	0.05236 04627	0.05236 05986
4	0.06981 36004	0.06981 37891	0.06981 40115	0.06981 42674	0.06981 45566	0.06981 48785
5	0.08726 73027	0.08726 76710	0.08729 81052	0.08726 86048	0.08726 91693	0.08726 97977
6	0.10472 12058	0.10472 18419	0.10472 25918	0.10472 34545	0.10472 44292	0.10472 55146
7	0.12217 53496	0.12217 63588	0.12217 75487	0.12217 89177	0.12218 04643	0.12218 21868
8	0.13962 97731	0.13963 12783	0.13963 30530	0.13963 50948	0.13963 74016	0.13963 99707
9	0.15708 45156	0.15708 66567	0.15708 91809	0.15709 20854	0.15709 53669	0.15709 90214
10	0.17453 96158	0.17454 25495	0.17454 60083	0.17454 99883	0.17455 44849	0.17455 94928
11	0.19199 51118	0.19199 90117	0.19200 36098	0.19200 89009	0.19201 48790	0.19202 15370
12	0.20945 10412	0.20945 60975	0.20946 20593	0.20946 89197	0.20947 66711	0.20948 53044
13	0.22690 74414	0.22691 38607	0.22692 14297	0.22693 01398	0.22693 99814	0.22695 09432
14	0.24436 43491	0.24437 23539	0.24438 17927	0.24439 26549	0.24440 49285	0.24441 85996
15	0.26182 18003	0.26183 16291	0.26184 32190	0.26185 65573	0.26187 16291	0.26188 84178
16	0.27927 98303	0.27929 17371	0.27930 57780	0.27932 19374	0.27934 01978	0.27936 05390
17	0.29673 84738	0.29675 27281	0.29676 95376	0.29678 88841	0.29681 07469	0.29683 51022
18	0.31419 77648	0.31421 46508	0.31423 45644	0.31425 74844	0.31428 33866	0.31431 22432
19	0.33165 77366	0.33167 75530	0.33170 09236	0.33172 78235	0.33175 82247	0.33179 20952
20	0.34911 84215	0.34914 14816	0.34916 86786	0.34919 99842	0.34293 53662	0.34927 47881
21	0.36657 98510	0.36660 64818	0.36663 78914	0.36667 40474	0.36671 49136	0.36676 04485
22	0.38404 20556	0.38407 25978	0.38410 86220	0.38415 00918	0.38419 69665	0.38424 91996
23	0.40150 50652	0.40153 98724	0.40158 09287	0.40162 81938	0.40168 16219	0.40174 11611
24	0.41896 89085	0.41900 83469	0.41905 48681	0.41910 84271	0.41916 89732	0.41923 64489
25	0.43643 36130	0.43647 80614	0.43653 04946	0.43659 08630	0.43665 91110	0.43673 51751
26	0.45389 92055	0.45394 90543	0.45400 78607	0.45407 55705	0.45415 21227	0.45423 74478
27	0.47136 57116	0.47142 13626	0.47148 70168	0.47156 26154	0.47164 80920	0.47174 33709
28	0.48883 31558	0.48889 50217	0.48896 80113	0.48905 20611	0.48914 70994	0.48925 30441
29	0.50630 15615	0.50637 00652	0.50645 08902	0.50654 39681	0.50664 92217	0.50676 65626
30	0.52377 09509	0.52384 65254	0.52393 56974	0.52403 83939	0.52415 45320	0.52428 40174
31	0.54124 13450	0.54132 44326	0.54142 24744	0.54153 53929	0.54166 30998	0.54180 54945
32	0.55871 27636	0.55880 38153	0.55891 12604	0.55903 50167	0.55917 49905	0.55933 10754
33	0.57618 52253	0.57628 47005	0.57640 20922	0.57653 73134	0.57669 02657	0.57686 08368
34	0.59365 87474	0.59376 71134	0.59389 50040	0.59404 23283	0.59420 89831	0.59439 48504
35	0.61113 33460	0.61125 10770	0.61139 00276	0.61155 01033	0.61173 11960	0.61193 31827
36	0.62860 90357	0.62873 66126	0.62888 71924	0.62906 06769	0.62925 69538	0.62947 58952
37	0.64608 58300	0.64622 37399	0.64638 65251	0.64657 40843	0.64678 63015	0.64702 30443
38	0.66356 37410	0.66371 24764	0.66388 80497	0.66409 03573	0.66431 92799	0.66457 46811
39	0.68104 27792	0.68120 28374	0.68139 17877	0.68160 95243	0.68185 59253	0.68213 08512
40	0.69852 29541	0.69869 48365	0.69889 77578	0.69913 16101	0.69939 62698	0.69969 15948
41	0.71600 42737	0.71618 84855	0.71640 59760	0.71665 66362	0.71694 03410	0.71725 69467
42	0.73348 67445	0.73368 37941	0.73391 64558	0.73418 46203	0.73448 81618	0.73482 69361
43	0.75097 03717	0.75118 07698	0.75142 92076	0.75171 55767	0.75203 97510	0.75240 15867
44	0.76845 51590	0.76867 94180	0.76894 42395	0.76924 95158	0.76959 51223	0.76998 09164
45	0.78594 11090	0.78617 97426	0.78646 15563	0.78678 64447	0.78715 42851	0.78756 4937[illegible]

TABLE IX.

φ.	E (5°).	E (6°).	E (7°).	E (8°).	E (9°).	E (10°).
45°	0.78485 58619	0.78461 79183	0.78433 72392	0.78401 40879	0.78364 87678	0.78324 16230
46	0.80227 53990	0.80202 26367	0.80172 44711	0.80138 11788	0.80099 30785	0.80056 05318
47	0.81969 37777	0.81942 56873	0.81910 94337	0.81874 53068	0.81833 36407	0.81787 48149
48	0.83711 10001	0.83682 70732	0.83649 21310	0.83610 64767	0.83567 04606	0.83518 44795
49	0.85452 70695	0.85422 67992	0.85387 25694	0.85346 46973	0.85300 35488	0.85248 95386
50	0.87194 19908	0.87162 48723	0.87125 07585	0.87081 99805	0.87033 29203	0.86979 00106
51	0.88935 57703	0.88902 13013	0.88862 67103	0.88817 23421	0.88765 85949	0.88708 59197
52	0.90676 84157	0.90641 60974	0.90600 04396	0.90552 18013	0.90498 05969	0.90437 72954
53	0.92417 99359	0.92380 92734	0.92337 19640	0.92286 83811	0.92229 89548	0.92166 41731
54	0.94159 03414	0.94120 08443	0.94074 13038	0.94021 21076	0.93961 37019	0.93894 65933
55	0.95899 96439	0.95859 08269	0.95810 84820	0.95755 30108	0.95692 48760	0.95622 46023
56	0.97640 78566	0.97597 92402	0.97547 35240	0.97489 11238	0.97423 25187	0.97349 82518
57	0.99381 49939	0.99336 61047	0.99283 64580	0.99222 64835	0.99153 66764	0.99076 75987
58	1.01122 10715	1.01075 14433	1.01019 73149	1.00955 91299	1.00883 73999	1.00803 27052
59	1.02862 61065	1.02813 52804	1.02755 61278	1.02688 91063	1.02613 47438	1.02529 36387
60	1.04603 01172	1.04551 76423	1.04491 29325	1.04421 64596	1.04342 87670	1.04255 04719
61	1.06343 31232	1.06289 85571	1.06226 77674	1.06154 12394	1.06071 95327	1.05980 32824
62	1.08083 51453	1.08027 80550	1.07962 06732	1.07886 34989	1.07800 71078	1.07705 21528
63	1.09823 62055	1.09765 61674	1.09697 16929	1.09618 32943	1.09529 15632	1.09429 71705
64	1.11563 63269	1.11503 29278	1.11432 08717	1.11350 06847	1.11257 29737	1.11153 84277
65	1.13303 55340	1.13240 83711	1.13166 82574	1.13081 57322	1.12985 14181	1.12877 60213
66	1.15043 38520	1.14978 25340	1.14901 38998	1.14812 85018	1.14712 69784	1.14601 00528
67	1.16783 13076	1.16715 54547	1.16635 78507	1.16543 90614	1.16439 97403	1.16324 06278
68	1.18522 79284	1.18452 71727	1.18370 01642	1.18274 74815	1.18166 97930	1.18046 78564
69	1.20262 37429	1.20189 77294	1.20104 08964	1.20005 38353	1.19893 72292	1.19769 18528
70	1.22001 87808	1.21926 71673	1.21838 01052	1.21735 81983	1.21620 21446	1.21491 27352
71	1.23741 30725	1.23663 55304	1.23571 78505	1.23466 06488	1.23346 46381	1.23213 06258
72	1.25480 66497	1.25400 28640	1.25305 41938	1.25196 12674	1.25072 48116	1.24934 56503
73	1.27219 95445	1.27136 92148	1.27038 91986	1.26926 01368	1.26798 27699	1.26655 79379
74	1.28959 17902	1.28873 46304	1.28772 29299	1.28655 73418	1.28523 86204	1.28376 76215
75	1.30698 34206	1.30609 91596	1.30505 54543	1.30385 29695	1.30249 24732	1.30097 48371
76	1.32437 44705	1.32346 28526	1.32238 68398	1.32114 71088	1.31974 44410	1.31817 97234
77	1.34176 49755	1.34082 57603	1.33971 71560	1.33843 98504	1.33699 46386	1.33538 24225
78	1.35915 49714	1.35818 79348	1.35704 64736	1.35573 12869	1.35424 31830	1.35258 30792
79	1.37654 44951	1.37554 94291	1.37437 48645	1.37302 15123	1.37149 01936	1.36978 18405
80	1.39393 35839	1.39291 02966	1.39170 24020	1.39031 06222	1.38873 57913	1.38697 88560
81	1.41132 22755	1.41027 05920	1.40902 91603	1.40759 87136	1.40598 00990	1.40417 42774
82	1.42871 06083	1.42763 03704	1.42635 52145	1.42488 58847	1.42322 32410	1.42136 82584
83	1.44609 86211	1.44498 96877	1.44368 06406	1.44217 22349	1.44046 53431	1.43856 09544
84	1.46348 63530	1.46234 86003	1.46100 55154	1.45945 78646	1.45770 65326	1.45575 25226
85	1.48087 38434	1.47970 71650	1.47832 99166	1.47674 28751	1.47494 69377	1.47294 31215
86	1.49826 11322	1.49706 54391	1.49565 39221	1.49402 73684	1.49218 66875	1.49013 29107
87	1.51564 82593	1.51442 34804	1.51297 76104	1.51131 14471	1.50942 59123	1.50732 20510
88	1.53303 52650	1.53178 13468	1.53030 10604	1.52859 52144	1.52666 47427	1.52451 07040
89	1.55042 21898	1.54913 90965	1.54762 43515	1.54587 87739	1.54390 33099	1.54169 90317
90	1.56780 90740	1.56649 67878	1.56494 75630	1.56296 22295	1.56114 17453	1.55888 71966

TABLE IX.

φ.	F (5°).	F (6°).	F (7°).	F (8°).	F (9°).	F (10°).
45°	0.78594 11090	0.78617 97426	0.78646 15563	0.78678 64447	0.78715 42851	0.78756 49375
46	0.80342 82[illegible]23	0.80368 17448	0.80398 11605	0.80432 63668	0.80471 72443	0.80515 36566
47	0.82091 64986	0.82118 54242	0.82150 30514	0.82186 92817	0.82228 40000	0.82274 70747
48	0.83840 59360	0.83869 07782	0.83902 72259	0.83941 51856	0.83985 45477	0.84034 51869
49	0.85589 65312	0.85619 78021	0.85655 36779	0.85696 40708	0.85742 88783	0.85794 79826
50	0.87338 82795	0.87370 64894	0.87408 23985	0.87451 59262	0.87500 69781	0.87555 54456
51	0.89088 11746	0.89121 68313	0.89161 33760	0.89207 07367	0.89258 88286	0.89316 75539
52	0.90837 52092	0.90872 88170	0.90914 65961	0.90962 84840	0.91017 44069	0.91078 42795
53	0.92587 03742	0.92624 24338	0.92668 20416	0.92718 91459	0.92776 36853	0.92840 55889
54	0.94336 66594	0.94375 76670	0.94421 96925	0.94475 26965	0.94535 66318	0.94603 14432
55	0.96086 40531	0.96127 45000	0.96175 95265	0.96231 91068	0.96295 32097	0.96366 17975
56	0.97836 25421	0.97879 29138	0.97930 15180	0.97988 83440	0.98055 33778	0.98129 66014
57	0.99586 21123	0.99631 28881	0.99684 56393	0.99746 03717	0.99815 70903	0.99893 57990
58	1.01336 27478	1.01383 44002	1.01439 18598	1.01503 51502	1.01576 42974	1.01657 93289
59	1.03086 44316	1.03135 74257	1.03194 01461	1.03261 26363	1.03337 49447	1.03422 71242
60	1.04836 71455	1.04888 19382	1.04949 04628	1.05019 27835	1.05098 89733	1.05187 91127
61	1.06587 08698	1.06640 79098	1.06704 27714	1.06777 55420	1.06860 63205	1.06953 52170
62	1.08337 55838	1.08393 53104	1.08459 70314	1.08536 08587	1.08622 69190	1.08719 53545
63	1.10088 12655	1.10146 41083	1.10215 31997	1.10294 86773	1.10385 06979	1.10485 94373
64	1.11838 78915	1.11899 42700	1.11971 12307	1.12053 89385	1.12147 75819	1.12252 73728
65	1.13589 54377	1.13652 57604	1.13727 10766	1.13813 15798	1.13910 74920	1.14019 90634
66	1.15340 38784	1.15405 85430	1.15483 26874	1.15572 65358	1.15674 03454	1.15787 44066
67	1.17091 31870	1.17159 25793	1.17239 60109	1.17332 37381	1.17437 60555	1.17555 32955
68	1.18842 33359	1.18912 78293	1.18996 09926	1.19092 31156	1.19201 45320	1.19323 56185
69	1.20593 42963	1.20666 42518	1.20752 75762	1.20852 45945	1.20965 56813	1.21092 12596
70	1.22344 60385	1.22420 18037	1.22509 57031	1.22612 80984	1.22729 94063	1.22861 00987
71	1.24095 85319	1.24174 04409	1.24266 53130	1.24373 35480	1.24494 56067	1.24630 20116
72	1.25847 17448	1.25928 01178	1.26023 63436	1.26134 08618	1.26259 41789	1.26399 68700
73	1.27598 58448	1.27682 07873	1.27780 87310	1.27894 99560	1.28024 50166	1.28169 45419
74	1.29350 01985	1.29436 24015	1.29538 24094	1.29656 07446	1.29789 80103	1.29939 48918
75	1.31101 53717	1.31190 49110	1.31295 73115	1.31417 31392	1.31555 30480	1.31709 77806
76	1.32853 11296	1.32944 82654	1.33053 33686	1.33178 70497	1.33321 00147	1.33480 30658
77	1.34604 74364	1.34699 24132	1.34811 05102	1.34940 23838	1.35086 87933	1.35251 06021
78	1.36356 42559	1.36453 73019	1.36568 86646	1.36701 90474	1.36852 92643	1.37022 02411
79	1.38108 15511	1.38208 28782	1.38326 77590	1.38463 69450	1.38619 13061	1.38793 18318
80	1.39859 92845	1.39962 90877	1.40084 77192	1.40225 59792	1.40385 47948	1.40564 52205
81	1.41611 74179	1.41717 58756	1.41842 84700	1.41987 60515	1.42151 96049	1.42336 02513
82	1.43363 59128	1.43472 31860	1.43600 99352	1.43749 70617	1.43918 56092	1.44107 67662
83	1.45115 47302	1.45227 09625	1.45359 20379	1.45511 89087	1.45685 26789	1.45879 46052
84	1.46867 38306	1.46981 91482	1.47117 47000	1.47274 14903	1.47452 06838	1.47651 36066
85	1.48619 31743	1.48736 76856	1.48875 78428	1.49036 47033	1.49218 94926	1.49423 36070
86	1.50371 27211	1.50491 65166	1.50634 13873	1.50798 84436	1.50985 89728	1.51195 44421
87	1.52123 24308	1.52246 55829	1.52392 52538	1.52561 26065	1.52752 89912	1.52967 59462
88	1.53875 22628	1.54001 48261	1.54150 93619	1.54323 70870	1.54519 94139	1.54739 79527
89	1.55627 21764	1.55756 41874	1.55909 36313	1.56086 17793	1.56287 01064	1.56512 02946
90	1.57379 21309	1.57511 36078	1.57667 79816	1.57848 65777	1.58054 09339	1.58284 28043

φ.	E(10°).	E(11°).	E(12°).	E(13°).	E(14°).	E(15°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 0000
1	0.01745 32658	0.01745 32602	0.01745 32542	0.01745 32477	0.01745 32406	0.01745 3233
2	0.03490 63713	0.03490 63270	0.03490 62787	0.03490 62264	0.03490 61703	0.03490 6110
3	0.05235 91565	0.05235 90070	0.05235 88439	0.05235 86675	0.05235 84781	0.05235 8275
4	0.06981 14617	0.06981 11074	0.06981 07209	0.06981 03031	0.06980 98542	0.06980 9374
5	0.08726 31277	0.08726 24360	0.08726 16818	0.08726 08659	0 08725 99896	0.08725 9053
6	0.10471 39961	0.10471 28016	0.10471 14992	0.10471 00903	0.10470 85770	0.10470 6960
7	0.12216 39097	0.12215 20142	0.12215 99474	0.12215 77119	0.12215 53106	0.12215 2745
8	0.13961 27120	0.13960 98851	0.13960 68026	0.13960 34685	0.13959 98869	0.13959 6061
9	0.15706 02482	0.15705 62271	0.15705 18425	0.15704 70998	0.15704 20050	0.15703 6563
10	0.17450 63648	0.17450 08549	0.17449 48469	0.17448 83483	0.17448 13668	0.17447 3910
11	0.19195 09101	0.19194 35852	0.19193 55983	0.19192 69589	0.19191 76775	0.19190 7764
12	0.20939 37341	0.20938 42371	0.20937 38816	0.20936 26799	0.20935 06456	0.20933 7792
13	0.22683 46891	0.22682 26320	0.22680 94847	0.22679 52629	0.22677 99839	0.22676 3665
14	0.24427 36295	0.24425 85940	0.24424 21988	0.24422 44633	0.24420 54091	0.24418 5058
15	0.26171 04120	0 26169 19502	0.26167 18183	0.26165 00404	0.26162 66426	0.26160 1651
16	0.27914 48961	0.27912 25306	0.27909 81415	0.27907 17577	0.27904 34107	0.27901 3133
17	0.29657 69440	0.29655 01686	0.29652 09703	0.29648 93833	0.29645 54451	0.29641 9194
18	0.31400 64205	0.31397 47012	0.31394 01109	0.31390 26901	0.31386 24827	0.31381 9535
19	0.33143 31939	0.33139 59691	0.33135 53740	0.33131 14561	0.33126 42666	0.33121 3859
20	0.34885 71356	0.34881 38167	0.34876 65748	0.34871 54648	0.34866 05459	0.34860 1881
21	0.36627 81202	0.36622 80926	0.36617 35332	0.36611 45050	0.36605 10762	0.36598 3319
22	0.38369 60261	0.38363 86497	0.38357 60743	0.38350 83717	0.38343 56199	0.38335 7901
23	0.40111 07351	0.40104 53452	0.40097 40283	0.40089 68660	0.40081 39464	0.40072 5363
24	0.41852 21332	0.41844 80410	0.41836 72311	0.41827 97951	0.41818 58325	0.41808 5449
25	0.43593 01101	0.43584 66039	0.43575 55240	0.43565 69731	0.43555 10625	0.43543 7910
26	0.45333 45597	0.45324 09054	0.45313 87542	0.45302 82206	0.45290 94286	0.45278 2510
27	0.47073 53799	0.47063 08223	0.47051 67751	0.47039 33655	0.47026 07312	0.47011 9018
28	0.48813 24734	0.48801 62364	0.48788 94461	0.48775 22430	0.48760 47790	0.48744 7216
29	0.50552 57471	0.50539 70352	0.50525 66333	0.50510 46956	0.50494 13894	0.50476 6893
30	0.52291 51125	0.52277 31116	0.52261 82090	0.52245 05735	0.52227 03884	0.52207 7849
31	0.54030 04859	0.54014 43641	0.53997 40523	0 53978 97347	0.53959 16112	0.53937 9895
32	0.55768 17882	0.55751 06970	0.55732 40493	0.55712 20454	0.55690 49024	0.55667 2852
33	0.57505 89455	0.57487 20207	0.57466 80931	0.57444 73798	0.57421 01158	0.57395 6553
34	0.59243 18887	0.59222 82515	0.59200 60840	0.59176 56205	0.59150 71150	0.59123 0840
35	0.60980 05539	0.60957 93119	0.60933 79294	0.60907 66586	0.60879 57734	0.60849 5568
36	0.62716 48823	0.62692 51304	0.62666 35440	0.62638 03940	0.62607 59744	0.62575 0601
37	0.64452 48203	0.64426 56421	0.64398 28503	0.64367 67351	0.64334 76115	0.64299 5818
38	0.66188 03196	0.66160 07884	0.66129 57783	0.66096 55994	0.66061 05884	0.66023 1107
39	0.67923 13375	0.67893 05172	0.67860 22657	0.67824 69133	0.67786 48193	0.67745 6370
40	0.69657 78365	0.69625 47830	0.69590 22579	0.69552 06125	0.69511 02290	0.69467 1518
41	0.71391 98746	0.71357 35468	0.71319 57082	0.71278 66417	0.71234 67529	0.71187 6478
42	0.73125 71554	0.73088 67763	0.73048 25778	0.73004 49549	0.72957 43371	0.72907 1187
43	0.74858 99280	0.74819 44459	0.74776 28359	0.74729 55154	0.74679 29385	0.74625 5594
44	0.76591 80871	0.76549 65368	0.76503 64598	0.76453 82962	0.76400 25249	0.76342 9662
45	0.78324 16230	0.78279 30372	0.78230 34347	0.78177 32793	0.78120 30751	0.78059 3365

φ.	F (10°).	F (11°).	F (12°).	F (13°).	F (14°).	F (15°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33193	0.01745 33248	0.01745 33308	0.01745 33373	0.01743 33444	0.01745 33518
2	0.03490 67988	0.03490 68430	0.03490 68914	0.03490 69437	0.03490 69998	0.03490 70597
3	0.05236 05986	0.05236 07481	0.05236 09113	0.05236 10877	0.05236 12771	0.05236 14794
4	0.06981 48785	0.06981 52329	0.06981 56194	0.06981 60373	0.06981 64863	0.06981 69658
5	0.08726 97977	0.08727 04895	0.08727 12440	0.08727 20599	0.08727 29365	0.08727 38727
6	0.10472 55146	0.10472 67094	0.10472 80123	0.10472 94215	0.11473 09355	0.10473 25524
7	0.12218 21868	0.12218 40828	0.12218 61503	0.12218 83868	0.12219 07895	0.12219 33556
8	0.13963 99707	0.13964 27987	0.13964 58826	0.13964 92185	0.13965 28026	0.13965 66305
9	0.15709 90214	0.15710 30445	0.15710 74317	0.15711 21775	0.15711 72767	0.15712 27229
10	0.17455 94928	0.17456 50061	0.17457 10184	0.17457 75224	0.17458 45110	0.17459 19756
11	0.19202 15370	0.19202 88672	0.19203 68611	0.19204 55092	0.19205 48020	0.19206 47281
12	0.20948 53044	0.20949 48096	0.20950 51758	0.20951 63910	0.20952 84427	0.20954 13164
13	0.22695 09432	0.22696 30125	0.22697 61757	0.22699 04176	0.22700 57225	0.22702 20723
14	0.24441 85996	0.24443 36528	0.24445 00711	0.24446 78355	0.24448 69270	0.24450 73231
15	0.26188 84178	0.26190 69045	0.26192 70688	0.26194 88876	0.26197 23376	0.26199 73917
16	0.27936 05390	0.27938 29388	0.27940 73724	0.27943 38127	0.27946 22311	0.27949 25958
17	0.29683 51022	0.29686 19236	0.29689 11820	0.29692 28453	0.29695 68797	0.29699 32476
18	0.31431 22432	0.31434 40235	0.31437 86934	0.31441 62155	0.31445 65502	0.31449 96535
19	0.33179 20952	0.33182 93996	0.33187 00985	0.33191 41485	0.33196 15040	0.33201 21139
20	0.34927 47881	0.34931 82093	0.34936 55846	0.34941 68647	0.34947 19967	0.34953 09227
21	0.36676 04485	0.36681 06058	0.36686 53346	0.36692 45789	0.36698 82781	0.36705 63669
22	0.38424 91996	0.38430 67387	0.38436 95266	0.38443 75004	0.38451 05916	0.38458 87266
23	0.40174 11611	0.40180 67531	0.40187 83337	0.40195 58328	0.40203 91737	0.40212 82742
24	0.41923 64489	0.41931 07895	0.41939 19238	0.41947 97737	0.41957 42544	0.41967 52743
25	0.43673 51751	0.43681 89839	0.43691 04590	0.43700 95144	0.43711 60563	0.43722 99837
26	0.45423 74478	0.45433 14676	0.45443 40963	0.45454 52395	0.45466 47945	0.45479 26505
27	0.47174 33709	0.47184 83669	0.47196 29866	0.47208 71272	0.47222 06767	0.47236 35143
28	0.48925 30441	0.48936 98029	0.48949 72749	0.48963 53485	0.48978 39023	0.48994 28054
29	0.50676 65626	0.50689 58916	0.50703 70999	0.50719 00671	0.50735 46626	0.50753 07449
30	0.52428 40174	0.52442 67435	0.52458 25939	0.52475 14396	0.52493 31405	0.52512 75445
31	0.54180 54945	0.54196 24636	0.54213 38829	0.54231 96149	0.54251 95100	0.54273 34059
32	0.55933 10754	0.55950 31512	0.55969 10861	0.55989 47339	0.56011 39362	0.56034 85204
33	0.57686 08368	0.57704 88999	0.57725 43156	0.57747 69299	0.57771 65752	0.57797 30692
34	0.59439 48504	0.59459 97971	0.59482 36767	0.59506 63277	0.59532 75736	0.59560 72227
35	0.61193 31827	0.61215 59242	0.61239 92677	0.61266 30438	0.61294 70683	0.61325 11402
36	0.62947 58952	0.62971 73567	0.62998 11792	0.63026 71864	0.63057 51865	0.63090 49701
37	0.64702 30443	0.64728 41637	0.64756 94946	0.64787 88548	0.64821 20455	0.64856 88493
38	0.66457 46811	0.66485 64078	0.66516 42898	0.66549 81396	0.66585 77521	0.66624 29030
39	0.68213 08512	0.68243 41452	0.68276 56329	0.68312 51225	0.68351 24031	0.68392 72448
40	0.69969 15948	0.70001 74256	0.70037 35845	0.70075 98759	0.70117 60846	0.70162 19761
41	0.71725 69467	0.71760 62920	0.71798 81970	0.71840 24631	0.71884 88722	0.71932 71862
42	0.73482 69361	0.73520 07808	0.73560 95148	0.73605 29381	0.73653 08306	0.73704 29521
43	0.75240 15867	0.75280 09216	0.75323 75746	0.75371 13454	0.75422 20135	0.75476 93380
44	0.76998 09164	0.77040 67371	0.77087 24048	0.77137 77201	0.77192 24637	0.77250 63955
45	0.78756 49375	0.78801 82433	0.78851 40255	0.78905 20875	0.78963 22127	0.79025 41637

φ.	E(10°).	E(11°).	E(12°).	E(13°).	E(14°).	E(15°).
45°	0.78324 16230	0.78279 30372	0.78230 34347	0.78177 32793	0.78120 30751	0.78059 33654
46	0.80056 05318	0.80008 39417	0.79956 37541	0.79900 04566	0.79839 45787	0.79774 66918
47	0.81787 48149	0.81736 92519	0.81681 74195	0.81621 98292	0.81557 70366	0.81488 96413
48	0.83518 44795	0.83464 89762	0.83406 44404	0.83343 14079	0.83275 04606	0.83202 22266
49	0.85248 95386	0.85192 31299	0.85130 48347	0.85063 52130	0 84991 48734	0.84914 4473
50	0.86979 00106	0.86919 17350	0.86853 86280	0.86783 12742	0.86707 03090	0.86625 6418
51	0.88708 59197	0.88645 48204	0.88576 58542	0.88501 96306	0.88421 68121	0.88335 8113
52	0.90437 72954	0.90371 24217	0.90298 65554	0.90220 03310	0.90135 44385	0.90044 9622
53	0.92166 41731	0.92096 45810	0.92020 07814	0.91937 34336	0.91848 32550	0.91753 1019
54	0.93894 65933	0.93821 13475	0.93740 85901	0.93653 90057	0.93560 33391	0.93450 2393
55	0.95622 46023	0.95545 27767	0 95461 00474	0.95369 71241	0.95271 47791	0.95166 3845
56	0.97349 82518	0.97268 89308	0.97180 52267	0.97084 78746	0.96981 76741	0.96871 5488
57	0.99076 75987	0.98991 98783	0.98899 42094	0.98799 13521	0.98691 21335	0.98575 7446
58	1.00803 27052	1.00714 56944	1.00617 70845	1.00512 76607	1.00399 82774	1.00278 9856
59	1.02529 36387	1.02436 64604	1.02335 39484	1.02225 69132	1.02107 62362	1.01981 2869
60	1.04255 04719	1.04158 22639	1.04052 49052	1.03937 92311	1.03814 61503	1.03682 6643
61	1.05980 32824	1.05879 31985	1.05769 00660	1.05649 47447	1.05520 81702	1.05383 1352
62	1.07705 21528	1.07599 93641	1.07484 95492	1.07360 35925	1.07226 24562	1.07082 7179
63	1.09429 71705	1.09320 08663	1.09200 34803	1.09070 59215	1.08930 91783	1.08781 4318
64	1.11153 84277	1.11039 78165	1.10915 19918	1.10780 18867	1.10634 85160	1.10479 2976
65	1.12877 60213	1.12759 03317	1.12629 52226	1.12489 16510	1.12338 06578	1.12176 3368
66	1.14601 00528	1.14477 85344	1.14343 33183	1.14197 53851	1.14040 58015	1.13872 5720
67	1.16324 06278	1.16196 25526	1.16056 64311	1.15905 32673	1.15742 41536	1.15568 0270
68	1.18046 78564	1.17914 25192	1.17769 47192	1.17612 54831	1.17443 59289	1.17262 7264
69	1.19769 18528	1.19631 85725	1.19481 83468	1.19319 22252	1.19144 13507	1.18956 6958
70	1.21491 27352	1.21349 08554	1.21193 74839	1.21025 36931	1.20844 06503	1.20649 9617
71	1.23213 06258	1.23065 95155	1.22905 23062	1.22731 00928	1.22543 40666	1.22342 5515
72	1.24934 56503	1.24782 47050	1.24616 29949	1.24436 16368	1.24242 18461	1.24034 4936
73	1.26655 79379	1.26498 65804	1.26326 97361	1.26140 85436	1.25940 42422	1.25725 8170
74	1.28376 76215	1.28214 53023	1.28037 27210	1.27845 10378	1.27638 15151	1.27416 5517
75	1.30097 48371	1.29930 10352	1.29747 21455	1.29548 93492	1.29335 39316	1.29106 7281
76	1.31817 97234	1.31645 39475	1.31456 82100	1.31252 37131	1.31032 17647	1.30796 3778
77	1.33538 24225	1.33360 42109	1.33166 11190	1.32955 43696	1.32728 52931	1.32485 5327
78	1.35258 30792	1.35075 20005	1.34875 10811	1 34658 15637	1.34424 48009	1.34174 2254
79	1.36978 18405	1.36789 74946	1.36583 83083	1.36360 55445	1.36120 05774	1.35862 4892
80	1.38697.88560	1.38504 08742	1.38292 30163	1.38062 65653	1.37815 29167	1.37550 3578
81	1.40417 42774	1.40218 23230	1.40000 54240	1.39764 48831	1.39510 21172	1.39237 8657
82	1.42136 82584	1.41932 20271	1.41708 57532	1.41466 07585	1.41204 84812	1.40925 0474
83	1.43856 09544	1.43646 01748	1.43416 42280	1.43167 44550	1.42899 23147	1.42611 9383
84	1.45575 25226	1.45359 69565	1.45124 10752	1.44868 62389	1.44593 39269	1.44298 5738
85	1.47294 31215	1.47073 25641	1.46831 65235	1.46569 63789	1.46287 36299	1.45984 9897
86	1.49013 29107	1.48786 71910	1.48539 08032	1.48270 51457	1.47981 17382	1.47671 2224
87	1.50732 20510	1.50500 10318	1.50246 41464	1.49971 28119	1.49674 85683	1.49357 3080
88	1.52451 07040	1.52213 42822	1.51953 67862	1.51671 96514	1.51368 44382	1.51043 2833
89	1.54169 90317	1.53926 71386	1.53660 89565	1.53372 59392	1.53061 96673	1.52729 1849
90	1.55888 71966	1.55639 97978	1.55368 08919	1.55073 19510	1.54755 45759	1.54415 0496

φ.	F(10°).	F(11°).	F(12°).	F(13°).	F(14°).	F(15°).
45°	0.78756 49375	0.78801 82433	0.78851 40255	0.78905 20875	0.78963 22127	0.79025 41637
46	0.80515 36566	0.80563 54491	0.80616 24488	0.80673 44635	0.80735 12810	0.80801 26684
47	0.82274 70747	0.82325 83566	0.82381 76784	0.82442 48540	0.82507 96775	0.82578 19227
48	0.84034 51869	0.84088 69609	0.84147 97097	0.84212 32552	0.84281 73999	0.84356 19264
49	0.85794 79826	0 85852 12501	0.85914 85298	0.85982 96535	0.86056 44344	0.86135 26661
50	0.87555 54456	0.87616 12053	0.87682 41175	0.87754 40255	0.87832 07558	0.87915 41152
51	0.89316 75539	0.89380 68008	0.89450 64431	0.89526 63380	0.89608 63273	0.89696 62340
52	0.91078 42795	0.91145 80038	0.91219 54687	0.91299 65478	0.91386 11007	0.91478 89692
53	0.92840 55889	0.92911 47745	0.92989 11480	0.93073 46020	0.93164 50163	0.93262 22545
54	0.94603 14432	0.94677 70663	0.94759 34266	0.94848 04378	0.94943 80029	0.95046 60100
55	0.96366 17975	0.96444 48257	0.96530 22415	0.96623 39827	0.96723 99779	0.96832 01428
56	0.98129 66014	0.98211 79923	0.98301 75219	0.98399 51544	0.98505 08472	0.98618 45467
57	0.99893 57990	0.99979 64990	1.00073 91887	1.00176 38611	1.00287 05055	1.00405 91024
58	1.01657 93289	1.01748 02721	1.01846 71545	1.01954 00013	1.02069 88363	1.02194 36774
59	1.03422 71242	1.03516 92311	1.03620 13243	1.03732 34641	1.03853 57119	1.03983 81265
60	1.05187 91127	1.05286 32889	1.05394 15951	1.05511 41292	1.05638 09937	1.05774 22915
61	1.06953 52170	1.07056 23521	1.07168 78561	1.07291 18671	1.07423 45320	1.07565 60016
62	1 08719 53545	1.08826 63210	1.08943 99887	1.09071 65391	1.09209 61666	1.09357 90735
63	1.10485 94373	1.10597 50895	1.10719 78669	1.10852 79977	1.10996 57266	1.11151 13115
64	1.12252 73728	1.12368 85456	1.12496 13575	1.12634 60864	1.12784 30309	1.12945 25077
65	1.14019 90634	1.14140 65710	1.14273 03198	1.14417 06402	1.14572 78881	1.14740 24426
66	1.15787 44066	1.15912 90418	1.16050 46062	1.16200 14856	1.16362 00968	1.16536 08848
67	1.17555 32955	1.17685 58283	1.17828 40620	1.17983 84410	1.18151 94459	1.18332 75915
68	1.19323 56185	1.19458 67953	1.19606 85260	1.19768 13166	1.19942 57148	1.20130 23089
69	1.21092 12596	1.21232 18020	1.21385 78303	1.21552 99148	1.21733 86737	1.21928 47723
70	1.22861 00987	1.23006 07026	1.23165 18008	1.23338 40305	1.23525 80839	1.23727 47065
71	1.24630 20116	1.24780 33465	1.24945 02573	1.25124 34515	1.25318 36979	1.25527 18262
72	1.26399 68700	1.26554 95778	1.26725 30136	1.26910 79582	1.27111 52600	1.27327 58362
73	1.28169 45419	1.28329 92359	1.28505 98780	1.28697 73244	1.28905 25064	1.29128 64319
74	1.29939 48918	1.30105 21562	1.30287 06533	1.30485 13173	1.30699 51656	1.30930 32997
75	1.31709 77806	1.31880 81694	1.32068 51370	1.32272 96981	1.32494 29588	1.32732 61173
76	1 33480 30658	1.33656 71024	1.33850 31220	1.34061 22221	1.34289 56001	1.34535 45542
77	1.35251 06021	1.35432 87783	1.35632 43964	1.35849 86389	1.36085 27971	1.36338 82721
78	1.37022 02411	1.37209 30165	1.37414 87438	1.37638 86929	1.37881 42512	1.38142 69253
79	1.38793 18318	1 38985 96331	1.39197 59439	1.39428 21237	1.39677 96579	1.39947 01612
80	1·40564 52205	1.40762 84411	1.40980 57727	1.41217 86661	1.41474 87072	1.41751 76210
81	1.42336 02513	1.42539 92506	1.42763 80025	1.43007 80509	1.43272 10842	1.43556 89399
82	1.44107 67662	1.44317 18690	1.44547 24024	1.44798 00050	1.45069 64694	1.45362 37476
83	1.45879 46052	1.46094 61013	1.46330 87386	1.46588 42517	1.46867 45391	1.47168 16689
84	1.47651 36066	1.47872 17505	1.48114 67749	1.48379 05114	1.48665 49659	1.48974 23243
85	1.49423 36070	1.49649 86177	1.49898 62726	1.50169 85016	1.50463 74192	1.50780 53304
86	1.51195 44421	1.51427 65024	1.51682 69912	1.51960 79376	1.52262 15656	1.52587 03005
87	1 52967 59462	1.53205 52027	1.53466 86884	1.53751 85325	1.54060 70693	1.54393 68452
88	1.54739 79527	1.54983 45156	1.55251 11208	1.55542 99980	1.55859 35926	1.56200 45728
89	1.56512 02946	1.56761 42374	1.57035 40839	1.57334 20446	1.57658 07965	1.58007 30900
90	1.58284 28043	1.58539 41638	1.58819 72125	1.59125 43820	1.59456 83409	1.59814 20021

φ.	E(15°).	E(16°).	E(17°).	E(18°).	E(19°).	E(20°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 0000
1	0.01745 32332	0.01745 32252	0.01745 32168	0.01745 32079	0.01745 31986	0.01745 3188
2	0.03490 61104	0.03490 60466	0.03490 59793	0.03490 59083	0.03490 58339	0.03490 5756
3	0.05235 82758	0.05235 80608	0.05235 78335	0.05235 75941	0.05235 73430	0.05235 7080
4	0.06980 93748	0.06980 88654	0.06980 83268	0.06980 77596	0.06980 71645	0.06980 6542
5	0.08725 90537	0.08725 80594	0.08725 70080	0.08725 59007	0.08725 47389	0.08725 3524
6	0.10470 69607	0.10470 52436	0.10470 34278	0.10470 15155	0.10469 95091	0.10469 7410
7	0.12215 27458	0.12215 00211	0.12214 71397	0.12214 41052	0.12214 09211	0.12213 7591
8	0.13959 60617	0.13959 19978	0.13958 77002	0.13958 31741	0.13957 84248	0.13957 3458
9	0.15703 65638	0.15703 07829	0.15702 46694	0.15701 82307	0.15701 14745	0.15700 4409
10	0.17447 39107	0.17446 59891	0.17445 76116	0.17444 87881	0.17443 95295	0.17442 9846
11	0.19190 77649	0.19189 72333	0.19188 60954	0.19187 43644	0.19186 20546	0.19184 9180
12	0.20933 77928	0.20932 41370	0.20930 96949	0.20929 44834	0.20927 85209	0.20926 1826
13	0.22676 36653	0.22674 63269	0.22672 79895	0.22670 86751	0.22668 84065	0.22666 7208
14	0.24418 50580	0.24416 34347	0.24414 05650	0.24411 64761	0.24409 11967	0.24406 4755
15	0.26160 16518	0.26157 50983	0.26154 70134	0.26151 74305	0.26148 63848	0.26145 3913
16	0.27901 31333	0.27898 09617	0.27894 69339	0.27891 10902	0.27887 34729	0.27883 4126
17	0.29641 91949	0.29638 06759	0.29633 99333	0.29629 70152	0.29625 19722	0.29620 4857
18	0.31381 95352	0.31377 38987	0.31372 56262	0.31367 47746	0.31362 14036	0.31356 5576
19	0.33121 38599	0.33116 02956	0.33110 36357	0.33104 39467	0.33098 12984	0.33091 5764
20	0.34860 18813	0.34853 95400	0.34847 35938	0.34840 41198	0.34833 11987	0.34825 4915
21	0.36598 33194	0.36591 13137	0.36583 51418	0.36575 48922	0.36567 06579	0.36558 2536
22	0.38335 79016	0.38327 53071	0.38318 79306	0.38309 58734	0.38299 92415	0.38289 8146
23	0.40072 53635	0.40063 12196	0.40053 16214	0.40042 66840	0.40031 65274	0.40020 1278
24	0.41808 54490	0.41797 87601	0.41786 58860	0.41774 69562	0.41762 21063	0.41749 1479
25	0.43543 79109	0.43531 76474	0.43519 04070	0.43505 63347	0.43491 55825	0.43476 8310
26	0.45278 25106	0.45264 76103	0.45250 48783	0.45235 44766	0.45219 65742	0.45203 1350
27	0.47011 90189	0.46996 83881	0.46980 90058	0.46964 10519	0.46946 47140	0.46928 0190
28	0.48744 72163	0.48727 97309	0.48710 25074	0.48691 57444	0.48671 96493	0.48651 4441
29	0.50476 68930	0.50458 13998	0.50438 51132	0.50417 82515	0.50396 10429	0.50373 3729
30	0.52207 78491	0.52187 31674	0.52165 65662	0.52142 82849	0.52118 85732	0.52093 7696
31	0.53937 98953	0.53915 48180	0.53891 66227	0.53866 55707	0.53840 19348	0.53812 6005
32	0.55667 28528	0.55642 61477	0.55616 50522	0.55588 98502	0.55560 08390	0.55529 8334
33	0.57395 65536	0.57368 69650	0.57340 16379	0.57310 08799	0.57278 50137	0.57245 4381
34	0.59123 08406	0.59093 70909	0.59062 61772	0.59029 84319	0.58995 42042	0.58959 3864
35	0.60849 55681	0.60817 63589	0.60783 84815	0.60748 22941	0.60710 81735	0.60671 6518
36	0.62575 06017	0.62540 46155	0.62503 83770	0.62465 22708	0.62424 67023	0.62382 2099
37	0.64299 58186	0.64262 17205	0.64222 57044	0.64180 81825	0.64136 95898	0.64091 0385
38	0.66023 11078	0.65982 75469	0.65940 03195	0.65894 98667	0.65847 66536	0.65798 1171
39	0.67745 63702	0.67702 19810	0.67656 20934	0.67607 71777	0.67556 77302	0.67503 4275
40	0.69467 15188	0.69420 49231	0.69371 09124	0.69318 99868	0.69264 26750	0.69206 9535
41	0.71187 64787	0.71137 62872	0.71084 66783	0.71028 81829	0.70970 13628	0.70908 6810
42	0.72907 11872	0.72853 60012	0.72796 93087	0.72737 16724	0.72674 36878	0.72608 5982
43	0.74625 55942	0.74568 40071	0.74507 87371	0.74444 03794	0.74376 95638	0.74306 6954
44	0.76342 96620	0.76282 02610	0.76217 49129	0.76149 42458	0.76077 89247	0.76002 9651
45	0.78059 33654	0.77994 47334	0.77925 78015	0.77853 32315	0.77777 17240	0.77697 4018

φ.	F(15°).	F(16°).	F(17°).	F(18°).	F(19°).	F(20°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33518	0.01745 33598	0.01745 33682	0.01745 33772	0.01745 33865	0.01745 33962
2	0.03490 70597	0.03490 71235	0.03490 71908	0.03490 72618	0.03490 73363	0.03490 74141
3	0.05236 14794	0.05236 16944	0 05236 19217	0.05236 21612	0.05236 24124	0.05236 26750
4	0.06981 69658	0.06981 74751	0.06981 80139	0.06981 85813	0.06981 91766	0.06981 97991
5	0.08727 38727	0.08727 48672	0.08727 59190	0.08727 70267	0.08727 81892	0.08727 94047
6	0.10473 25524	0.10473 42702	0.10473 60870	0.10473 80003	0.10474 00082	0.10474 21080
7	0.12219 33556	0.12219 60819	0.12219 89654	0.12220 20024	0.12220 51894	0.12220 85225
8	0.13965 66305	0.13966 06976	0.13966 49993	0.13966 95302	0.13967 42851	0.13967 92582
9	0.15712 27229	0.15712 85097	0.15713 46305	0.15714 10777	0.15714 78441	0.15715 49212
10	0.17459 19756	0.17459 99074	0.17460 82973	0.17461 71351	0.17462 64109	0.17463 61132
11	0.19206 47281	0.19207 52762	0.19208 64339	0.19209 81881	0.19211 05253	0.19212 34308
12	0.20954 13164	0.20955 49975	0.20956 94702	0.20958 47175	0.20960 07220	0.20961 74650
13	0.22702 20723	0.22703 94484	0.22705 78310	0.22707 71989	0.22709 75300	0.22711 88006
14	0.24450 73231	0.24452 90009	0.24455 19359	0.24457 61020	0.24460 14717	0.24462 80159
15	0.26199 73917	0.26202 40220	0.26205 21988	0.26208 18902	0.26211 30630	0.26214 56817
16	0.27949 25958	0.27952 48730	0.27955 90273	0.27959 50203	0.27963 28123	0.27967 23608
17	0.29699 32476	0.29703 19091	0.29707 28222	0.29711 59416	0.29716 12202	0.29720 86078
18	0.31449 96535	0.31454 54791	0.31459 39774	0.31464 50959	0.31469 87791	0.31475 49684
19	0.33201 21139	0.33206 59249	0.33212 28794	0.33218 29166	0.33224 59723	0.33231 19785
20	0.34953 09227	0.34959 35812	0.34965 99064	0.34972 98285	0.34980 32737	0.34988 [illegible]641
21	0.36705 63669	0.36712 87754	0.36720 54286	0.36728 62473	0.36737 11474	0.36746 00402
22	0.38458 87266	0.38467 18267	0.38475 98073	0.38485 25790	0.38495 00469	0.38505 21108
23	0.40212 82742	0.40222 30460	0.40232 33945	0.40242 92196	0.40254 04149	0.40265 68681
24	0.41967 52743	0.41978 27355	0.41989 65328	0.42001 65546	0.42014 26826	0.42027 47917
25	0.43722 99837	0.43735 11885	0.43747 95545	0.43761 49583	0.43775 72691	0.43790 63485
26	0.45479 26505	0.45492 86887	0 45507 27817	0.45522 47937	0.45538 45811	0,45555 19917
27	0.47236 35143	0 47251 55102	0.47267 65256	0.47284 64119	0.47302 50124	0.47321 21606
28	0.48994 28054	0.49011 19170	0.49029 10861	0.49048 01517	0.49067 89433	0.49088 72797
29	0.50753 07449	0.50771 81623	0.50791 67517	0.50812 63390	0.50834 67400	0.50857 77584
30	0.52512 75445	0.52533 44890	0.52555 37988	0.52578 52866	0.52602 87542	0.52628 39905
31	0.54273 34059	0.54296 11288	0.54320 24914	0.54345 72935	0.54372 53229	0.54400 63534
32	0.56034 85204	0.56059 83017	0.56086 30808	0.56114 26448	0.56143 67675	0.56174 72078
33	0.57797 30692	0.57824 62162	0.57853 58054	0.57884 16111	0.57916 33936	0.57950 08970
34	0.59560 72227	0.59590 50688	0.59622 08899	0.59655 44481	0.59690 54904	0.59727 37465
35	0.61325 11402	0.61357 50435	0.61391 85454	0.61428 13963	0.61466 33303	0.61506 40635
36	0.63090 49701	0.63125 63119	0.63162 89689	0.63202 26805	0.63243 71687	0.63287 21363
37	0.64856 88493	0.64894 90327	0.64935 23430	0.64977 85096	0.65022 72430	0.65069 82339
38	0.66624 29030	0.66665 33513	0.66708 88356	0.66754 90760	0.66803 37728	0.66854 26053
39	0.68392 72448	0 68436 93998	0.68483 85995	0 68533 45555	0.68585 69591	0.68640 54795
40	0.70162 19761	0.70209 72970	0.70260 17724	0.70313 51069	0.70369 69842	0.70428 70645
41	0.71932 71862	0.71983 71475	0.72037 84762	0.72095 08716	0.72155 40109	0.72218 75473
42	0.73704 29521	0.73758 90419	0.73816 88173	0.73878 19733	0.73942 81826	0.74010 70932
43	0.75476 93380	0.75535 30567	0.75597 28858	0.75662 85178	0.75731 96228	0.75804 58454
44	0.77250 63955	0.77312 92541	0 77379 07556	0.77449 05927	0.77522 84346	0.77600 39249
45	0.79025 41637	0.79091 76814	0.79162 24843	0.79236 82672	0.79315 47008	0.79398 14299

φ.	E(15°).	E(16°).	E(17°).	E(18°).	E(19°).	E(20°).
45°	0.78059 33654	0.77994 47234	0.77925 78015	0.77853 32315	0.77777 17240	0.77697 40185
46	0.79774 66918	0.79705 74090	0.79632 73844	0.79555 73143	0.79474 79355	0.79390 0025
47	0.81488 96413	0.81415 82868	0.81338 36594	0.81256 64903	0.81170 75531	0.81080 7664
48	0.83202 22266	0.83124 73801	0.83042 66405	0.82956 07737	0.82865 05909	0.82769 6948
49	0.84914 44730	0.84832 47169	0.84745 63577	0.84654 01969	0.84557 70833	0.84456 7913
50	0.86625 64186	0.86539 03395	0.86447 28577	0.86350 48106	0.86248 70850	0.86142 0617
51	0.88335 81139	0.88244 43043	0.88147 62031	0.88045 46835	0.87938 06710	0.87825 5142
52	0.90044 96223	0.89948 66825	0.89846 64728	0.89738 99027	0.89625 79365	0.89507 1592
53	0.91753 10195	0.91651 75591	0.91544 37617	0.91431 05733	0.91311 89968	0.91187 0091
54	0.93460 23938	0.93353 70336	0.93240 81810	0.93121 68184	0.92996 39876	0.92865 0789
55	0.95166 38457	0.95054 52196	0.94935 98577	0.94810 87789	0.94679 30642	0.94541 3855
56	0.96871 54881	0.96754 22446	0.96629 89346	0.96498 66138	0.96360 64021	0.96215 9482
57	0.98575 74461	0.98452 82500	0.98322 55703	0.98185 04994	0.98040 41963	0.97888 7885
58	1.00278 98568	1.00150 33908	1.00013 99388	0.99870 06296	0.99718 66614	0.99559 9300
59	1.01981 28691	1.01846 78357	1.01704 22294	1.01553 72156	1.01395 40312	1.01229 3983
60	1.03682 66437	1.03542 17667	1.03393 26468	1.03236 04856	1.03070 65586	1.02897 2213
61	1.05383 13526	1.05236 53790	1.05081 14104	1.04917 06845	1.04744 45153	1.04563 4291
62	1.07082 71795	1.06929 88807	1.06767 87543	1.06596 80739	1.06416 81915	1.06228 0536
63	1.08781 43189	1.08622 24925	1.08453 49269	1.08275 29313	1.08087 78955	1.07891 1288
64	1.10479 29764	1.10313 64478	1.10138 01910	1.09952 55505	1.09757 39534	1.09552 6908
65	1.12176 33680	1.12004 09920	1.11821 48230	1.11628 62406	1.11425 67088	1.11212 7776
66	1.13872 57205	1.13693 63824	1.13503 91128	1.13303 53259	1.13092 65224	1.12871 4290
67	1.15568 02704	1.15382 28879	1.15185 33636	1.14977 31458	1.14758 37714	1.14528 6866
68	1.17262 72642	1.17070 07886	1.16865 78912	1.16650 00538	1.16422 88493	1.16184 5942
69	1.18956 69580	1.18757 03757	1.18545 30238	1.18321 64176	1.18086 21653	1.17839 1968
70	1.20649 96171	1.20443 19507	1.20223 91017	1.19992 26183	1.19748 41437	1.19492 5416
71	1.22342 55158	1.22128 58255	1.21901 64768	1.21661 90503	1.21409 52235	1.21144 6771
72	1.24034 49367	1.23813 23217	1.23578 55122	1.23330 61205	1.23069 58580	1.22795 6536
73	1.25725 81709	1.25497 17704	1.25254 65816	1.24998 42478	1.24728 65140	1.24445 5227
74	1.27416 55172	1.27180 45117	1.26930 00689	1.26665 38627	1.26386 76713	1.26094 3376
75	1.29106 72819	1.28863 08944	1.28604 63679	1.28331 54069	1.28043 98222	1.27742 1529
76	1.30796 37784	1.30545 12751	1.30278 58817	1.29996 93326	1.29700 34707	1.29389 0245
77	1.32485 53270	1.32226 60184	1.31951 90220	1.31661 61017	1 31355 91319	1.31035 0095
78	1.34174 22541	1.33907 54960	1.33624 62088	1.33325 61855	1.33010 73314	1.32680 1662
79	1.35862 48921	1.35588 00865	1.35296 78698	1.34989 00640	1.34664 86047	1.34324 5540
80	1.37550 35789	1.37268 01746	1.36968 44400	1.36651 82254	1.36318 34964	1.35968 2333
81	1.39237 86573	1.38947 61510	1.38639 63609	1.38314 11652	1.37971 25595	1.37611 2655
82	1.40925 04749	1.40626 84116	1.40310 40799	1.39975 93860	1.39623 63546	1.39253 7128
83	1.42611 93833	1.42305 73570	1.41980 80501	1.41637 33963	1.41275 54493	1.40895 6383
84	1.44298 57380	1.43984 33922	1 43650 87294	1.43298 37102	1.42927 04176	1.42537 1055
85	1.45984 98978	1.45662 69260	1.45320 65798	1.44959 08468	1.44578 18386	1.44178 1789
86	1.47671 22241	1.47340 83702	1.46990 20671	1.46619 53293	1.46229 02964	1.45818 9232
87	1.49357 30807	1.49018 81395	1 48659 56603	1.48279 76842	1.47879 63789	1.47459 4038
88	1.51043 28334	1.50696 66508	1.50328 78308	1.49939 84410	1.49530 06771	1.49099 6862
89	1.52729 18494	1.52374 43225	1.51997 90518	1.51599 81312	1.51180 37845	1.50739 8364
90	1.54415 04969	1.54052 15741	1.53666 97976	1.53259 72877	1.52830 62961	1.52379 9205

φ.	F(15°).	F(16°).	F(17°).	F(18°).	F(19°).	F(20°).
45°	0.79025 41637	0.79091 76814	0.79162 24843	0.79236 82672	0.79315 47008	0.79398 14299
46	0.80801 26684	0.80871 83713	0.80946 81128	0.81026 15918	0.81109 84831	0.81197 84355
47	0.82578 19227	0.82653 13419	0.82732 76651	0.82817 05980	0.82905 98223	0.82999 49932
48	0.84356 19264	0.84435 65960	0.84520 11483	0.84609 52984	0.84703 87377	0.84803 11311
49	0.86135 26661	0.86219 41216	0.86308 85525	0.86403 56863	0.86503 52272	0.86608 68531
50	0.87915 41152	0.88004 38912	0.88098 98503	0.88199 17356	0.88304 92670	0.88416 21388
51	0.89696 62340	0.89790 58625	0.89890 49974	0.89996 34006	0.90108 08113	0.90225 69437
52	0.91478 89692	0.91577 99778	0.91683 39321	0.91795 06162	0.91912 97923	0.92037 11986
53	0.93262 22545	0.93366 61640	0.93477 65751	0.93595 32974	0.93719 61201	0.93850 48093
54	0.95046 60100	0.95156 43329	0.95273 28298	0.95397 13396	0.95527 96826	0.95665 76569
55	0.96832 01428	0.96947 43811	0.97070 25822	0.97200 46186	0.97338 03455	0.97482 95976
56	0.98618 45467	0.98739 61898	0.98868 57011	0.99005 29903	0.99149 79521	0.99302 04625
57	1.00405 91024	1.00532 96252	1.00668 20377	1.00811 62910	1.00963 23236	1.01123 00579
58	1.02194 36774	1.02327 45385	1.02469 14262	1.02619 43374	1.02778 32591	1.02945 81648
59	1.03983 81265	1.04123 07659	1.04271 36836	1.04428 69267	1.04595 05354	1.04770 45395
60	1.05774 22915	1.05919 81287	1.06074 86098	1.06239 38366	1.06413 39075	1.06596 89136
61	1.07565 60016	1.07717 64337	1.07879 59881	1.08051 48259	1.08233 31085	1.08425 09940
62	1.09357 90735	1.09516 54731	1.09685 55850	1.09864 96341	1.10054 78500	1.10255 04630
63	1.11151 13115	1.11316 50249	1.11492 71506	1.11679 79821	1.11877 78221	1.12086 69790
64	1.12945 25077	1.13117 48530	1.13301 04188	1.13495 95721	1.13702 26939	1.13920 01762
65	1.14740 24426	1.14919 47075	1.15110 51077	1.15313 40883	1.15528 21137	1.15754 96654
66	1.16536 08848	1.16722 43251	1.16921 09197	1.17132 11968	1.17355 57095	1.17591 50342
67	1.18332 75915	1.18526 34290	1.18732 75419	1.18952 05461	1.19184 30889	1.19429 58473
68	1.20130 23089	1.20331 17296	1.20545 46464	1.20773 17678	1.21014 38403	1.21269 16471
69	1.21928 47723	1.22136 89248	1.22359 18910	1.22595 44766	1.22845 75327	1.23110 19544
70	1.23727 47065	1.23943 47001	1.24173 89191	1.24418 82709	1.24678 37165	1.24952 62685
71	1.25527 18262	1.25750 87293	1.25989 53604	1.26243 27335	1.26512 19241	1.26796 40680
72	1.27327 58362	1.27559 06747	1.27806 08314	1.28068 74315	1.28347 16703	1.28641 48117
73	1.29128 64319	1.29368 01876	1.29623 49359	1.29895 19178	1.30183 24529	1.30487 79390
74	1.30930 32997	1.31177 69086	1.31441 72653	1.31722 57307	1.32020 37537	1.32335 28706
75	1.32732 61173	1.32988 04682	1.33260 73993	1.33550 83953	1.33858 50386	1.34183 90096
76	1.34535 45542	1.34799 04877	1.35080 49066	1.35379 94235	1.35697 57590	1.36033 57418
77	1.36338 82721	1.36610 65789	1.36900 93451	1.37209 83152	1.37537 53519	1.37884 24371
78	1.38142 69253	1.38422 83450	1.38722 02629	1.39040 45586	1.39378 32412	1.39735 84500
79	1.39947 01612	1.40235 53813	1.40543 71985	1.40871 76311	1.41219 88382	1.41588 31207
80	1.41751 76210	1.42048 72755	1.42365 96818	1.42703 70001	1.43062 15426	1.43441 57761
81	1.43556 89399	1.43862 36085	1.44188 72347	1.44536 21235	1.44905 07434	1.45295 57306
82	1.45362 37476	1.45676 39547	1.46011 93716	1.46369 24506	1.46748 58197	1.47150 22872
83	1.47168 16689	1.47490 78829	1.47835 56003	1.48202 74231	1.48592 61414	1.49005 47388
84	1.48974 23243	1.49305 49568	1.49659 54226	1.50036 64757	1.50437 10707	1.50861 23690
85	1.50780 53304	1.51120 47353	1.51483 83349	1.51870 90370	1.52281 99626	1.52717 44532
86	1.52587 03005	1.52935 67738	1.53308 38292	1.53705 45303	1.54127 21659	1.54574 02599
87	1.54393 68452	1.54751 06241	1.55133 13938	1.55540 23744	1.55972 70246	1.56430 90516
88	1.56200 45728	1.56566 58355	1.56958 05137	1.57375 19849	1.57818 38785	1.58288 00862
89	1.58007 30900	1.58382 19555	1.58783 06718	1.59210 27744	1.59664 20641	1.60145 26180
90	1.59814 20021	1.60197 85301	1.60608 13494	1.61045 41538	1.61510 09161	1.62002 58991

TABLE IX.

φ.	E(20°).	E(21°).	E(22°).	E(23°).	E(24°).	E(25°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 31889	0.01745 31788	0.01745 31682	0.01745 31573	0.01745 31460	0.01745 3134
2	0.03490 57560	0.03490 56749	0.03490 55905	0.03490 55030	0.03490 54126	0.03490 5319
3	0.05235 70803	0.05235 68065	0.05235 65219	0.05235 62267	0.05235 59216	0.05235 5606
4	0.06980 65422	0.06980 58933	0.06980 52189	0.06980 45196	0.06980 37963	0.06980 3049
5	0.08725 35240	0.08725 22572	0.08725 09406	0.08724 95753	0.08724 81632	0.08724 6706
6	0.10469 74108	0.10469 52231	0.10469 29491	0.10469 05911	0.10468 81523	0.10468 56355
7	0.12213 75913	0.12213 41197	0.12213 05108	0.12212 67688	0.12212 28984	0.12211 8904
8	0.13957 34582	0.13956 82800	0.13956 28969	0.13955 73152	0.13955 15418	0.13954 5583
9	0.15700 44090	0.15699 70424	0.15698 93841	0.15698 14432	0.15697 32293	0.15696 4752
10	0.17442 98468	0.17441 97514	0.17440 92558	0.17439 83728	0.17438 71153	0.17437 5496
11	0.19184 91807	0.19183 57578	0.19182 18026	0.19180 73318	0.19179 23627	0.19177 6913
12	0.20926 18267	0.20924 44202	0.20922 63229	0.20920 75565	0.20918 81433	0.20916 8106
13	0.22666 72082	0.22664 51051	0.22662 21241	0.22659 82928	0.22657 36394	0.22654 8193
14	0.24406 47559	0.24403 71880	0.24400 85232	0.24397 87969	0.24394 80443	0.24391 6302
15	0.26145 39131	0.26142 00538	0.26138 48475	0.26134 83362	0.26131 05632	0.26127 1573
16	0.27883 41267	0.27879 30979	0.27875 04354	0.27870 61902	0.27866 04143	0.27861 3162
17	0.29620 48575	0.29615 57265	0.29610 46374	0.29605 16509	0.29599 68294	0.29594 0238
18	0.31356 55761	0.31350 73573	0.31344 68162	0.31338 40241	0.31331 90550	0.31325 1985
19	0.33091 57643	0.33084 74206	0.33077 63481	0.33070 26301	0.33062 63531	0.33054 7607
20	0.34825 49158	0.34817 53596	0.34809 26234	0.34800 68041	0.34791 80029	0.34782 6321
21	0.36558 25369	0.36549 06308	0.36539 50473	0.36529 58975	0.36519 32968	0.36508 7365
22	0.38289 81468	0.38279 27054	0.38268 30401	0.38256 92781	0.38245 15511	0.38232 9996
23	0.40020 12785	0.40008 10692	0.39995 60387	0.39982 63313	0.39969 20968	0.39955 3490
24	0.41749 14791	0.41735 52236	0.41721 34966	0.41706 64608	0.41691 42855	0.41675 7146
25	0.43476 83106	0.43461 46861	0.43445 48847	0.43428 90891	0.43411 74892	0.43394 0281
26	0.45203 13502	0.45185 89908	0.45167 96922	0.45149 36583	0.45130 11010	0.45110 2240
27	0.46928 01908	0.46908 76891	0.46888 74270	0.46867 96307	0.46846 45357	0.46824 2386
28	0.48651 44418	0.48630 03505	0.48607 76163	0.48584 64896	0.48560 72307	0.48536 0109
29	0.50373 37293	0.50349 65624	0.50324 98074	0.50299 37399	0.50272 86467	0.50245 4825
30	0.52093 76968	0.52067 59314	0.52040 35680	0.52012 09087	0.51982 82685	0.51952 5974
31	0.53812 60053	0.53783 80833	0.53753 84869	0.53722 75460	0.53690 56052	0.53657 3021
32	0.55529 83342	0.55498 26640	0.55465 41745	0.55431 32252	0.55396 01915	0.55359 5462
33	0.57245 43815	0.57210 93396	0.57175 02635	0.57137 75438	0.57099 15879	0.57059 2818
34	0.58959 38640	0.58921 77970	0.58882 64093	0.58842 01238	0.58799 93813	0.58756 4639
35	0.60671 65181	0.60630 77443	0.60588 22903	0.60544 06122	0.60498 31859	0.60451 0505
36	0.62382 20999	0.62337 89115	0.62291 76085	0.62243 86816	0.62194 26433	0.62143 0025
37	0.64091 03855	0.64043 10503	0.63993 20898	0.63941 40309	0.63887 74235	0.63832 2838
38	0.65798 11715	0.65746 39349	0.65692 54847	0.65636 63853	0.65578 72252	0.65518 8616
39	0.67503 42752	0.67447 73623	0.67389 75685	0.67329 54970	0.67267 17761	0.67202 7059
40	0.69206 95350	0.69147 11525	0.69084 81417	0.69020 11456	0.68953 08235	0.68883 7902
41	0.70908 68105	0.70844 51487	0.70777 70302	0.70708 31383	0.70636 41849	0.70562 0911
42	0.72608 59828	0.72539 92180	0.72468 40857	0.72394 13106	0.72317 16482	0.72237 5885
43	0.74306 69548	0.74233 32512	0.74156 91860	0.74077 55262	0.73995 30719	0.73910 2656
44	0.76002 96511	0.75924 71632	0.75843 22352	0.75758 56775	0.75670 83358	0.75580 1091
45	0.77697 40185	0.77614 08931	0.77527 31640	0.77437 16859	0.77343 73509	0.77247 1088

φ.	F (20°).	F (21°).	F (22°).	F (23°).	F (24°).	F (25°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33962	0.01745 34063	0.01745 34169	0.01745 34278	0.01745 34391	0.01745 34508
2	0.03490 74141	0.03490 74952	0.03490 75797	0.03490 76671	0.03490 77575	0.03490 78510
3	0.05236 26750	0.05236 29489	0.05236 32337	0.05236 35288	0.05236 38341	0.05236 41493
4	0.06981 97991	0.06982 04481	0.06982 11229	0.06982 18225	0.06982 25462	0.06982 32930
5	0.08727 94047	0.08728 06720	0.08728 19896	0.08728 33558	0.08728 47689	0.08728 62274
6	0.10474 21080	0 10474 42974	0.10474 65735	0.10474 89337	0.10475 13751	0.10475 38949
7	0.12220 85225	0.12221 19979	0.12221 56111	0.12221 93580	0.12222 32340	0.12222 72345
8	0.13967 92582	0.13968 44437	0.13968 98353	0.13969 54265	0.13970 12108	0.13970 71811
9	0.15715 49212	0.15716 23010	0.15716 99745	0.15717 79326	0.15718 61659	0.15719 46646
10	0.17463 61132	0.17464 62310	0.17465 67522	0.17466 76643	0.17467 89544	0.17469 06092
11	0.19212 34308	0.19213 68897	0.19215 08861	0.19216 54036	0.19218 04251	0.19219 59330
12	0.20961 74650	0.20963 49271	0.20965 30879	0.20967 19262	0.20969 14201	0.20971 15469
13	0.22711 88006	0.22714 09866	0.22716 40621	0.22718 80005	0.22721 27739	0.22723 83540
14	0.24462 80159	0.24465 57046	0.24468 45059	0.24471 43868	0.24474 53129	0.24477 72490
15	0.26214 56817	0.26217 97096	0.26221 51080	0.26225 18370	0.26228 98543	0.26232 91172
16	0.27967 23608	0.27971 36217	0.27975 65486	0.27980 10935	0.27984 72058	0.27989 48339
17	0 29720 86078	0.29725 80521	0.29730 94982	0.29736 28890	0.29741 81646	0.29747 52637
18	0.31475 49684	0.31481 36025	0.31487 46172	0.31493 79452	0.31500 35167	0.31507 12595
19	0.33231 19785	0.33238 08642	0.33245 25550	0.33252 69727	0.33260 40362	0.33268 36618
20	0.34988 01641	0.34996 04179	0.35004 39498	0.35013 06699	0.35022 04848	0.35031 32981
21	0.36746 00402	0.36755 28327	0.36764 94274	0.36774 97222	0.36785 36104	0.36796 09818
22	0.38505 21108	0.38515 86657	0.38526 96012	0.38538 48018	0.38550 41469	0.38562 75114
23	0.40265 68681	0.40277 84613	0.40290 50707	0.40303 65665	0.40317 28132	0.40331 36700
24	0.42027 47917	0.42041 27508	0.42055 64214	0.42070 56590	0.42086 03124	0.42102 02241
25	0.43790 63485	0.43806 20512	0 43822 42240	0.43839 27066	0.43856 73312	0.43874 79230
26	0.45555 19917	0.45572 68655	0.45590 90338	0.45609 83199	0.45629 45388	0.45649 74977
27	0.47321 21606	0.47340 76813	0.47361 13897	0.47382 30924	0.47404 25864	0.47426 96602
28	0.49088 72797	0.49110 49704	0.49133 18139	0.49156 75997	0 49181 21061	0.49206 51025
29	0.50857 77584	0.50881 91883	0.50907 08111	0.50933 23986	0.50960 37105	0.50988 44959
30	0.52628 39905	0.52655 07735	0.52682 88677	0.52711 80267	0.52741 79912	0.52772 84899
31	0.54400 63534	0.54430 01471	0.54460 64512	0.54492 50013	0.54525 55187	0.54559 77114
32	0.56174 52078	0.56206 77118	0.56240 40097	0.56275 38189	0.56311 68412	0.56349 27640
33	0.57950 08970	0.57985 38517	0.58022 19710	0.58060 49541	0.58100 24838	0.58141 42266
34	0.59727 37465	0.59765 89315	0.59806 07420	0.59847 88595	0.59891 29477	0.59936 26527
35	0.61506 40635	0.61548 32959	0.61592 07081	0.61637 59642	0.61684 87094	0.61733 85697
36	0.63287 21363	0.63332 72692	0.63380 22325	0.63429 66737	0 63481 02199	0.63534 24779
37	0 65069 82339	0.65119 11545	0.65170 56556	0 65224 13687	0.65279 79039	0.65337 48492
38	0.66854 26053	0 66907 52334	0.66963 12943	0.67021 04047	0.67081 21587	0.67143 61266
39	0.68640 54795	0 68697 97653	0.68757 94415	0.68820 41113	0.68885 33539	0.68952 67233
40	0.70428 70645	0.70490 49868	0.70555 03654	0.70622 27912	0.70692 18301	0.70764 70215
41	0.72218 75473	0.72285 11115	0 72354 43089	0.72426 67197	0.72501 78985	0.72579 73717
42	0.74010 70932	0.74081 83292	0.74156 14889	0.74233 61442	0.74314 18399	0.74397 80918
43	0.75804 58454	0.75880 68055	0.75960 20962	0.76043 12832	0.76129 39041	0.76218 94662
44	0.77600 39249	0.77681 66814	0.77766 62944	0.77855 23260	0.77947 43090	0.78043 17449
45	0.79398 14299	0.79484 80729	0.79575 42198	0.79669 94320	0.79768 32401	0.79870 51427

φ.	E (20°).	E (21°).	E (22°).	E (23°).	E (24°).	E(25°).
45°	0.77697 40185	0.77614 08931	0.77527 31640	0.77437 16859	0.77343 73509	0.77247 10886
46	0.79390 00259	0.79301 44044	0.79209 19298	0.79113 35019	0.79014 00599	0.78911 2583
47	0.81080 76647	0.80986 76851	0.80888 85169	0.80787 11052	0.80681 64374	0.80572 5542
48	0.82769 69484	0.82670 07482	0.82566 29365	0.82458 45052	0.82346 64900	0.82230 9971
49	0.84456 79132	0.84351 36309	0.84241 52271	0.84127 37407	0.84009 02566	0 83886 5906
50	0.86142 06177	0.86030 63955	0.85914 54543	0.85793 88803	0.85668 78081	0.85539 3421
51	0 87825 51428	0.87707 91291	0.87585 37108	0.87458 00221	0.87325 92479	0.87189 2625
52	0.89507 15921	0.89383 19433	0.89254 01165	0.89119 72943	0.88980 47120	0.88836 3659
53	0.91187 00915	0.91056 49746	0.90920 48187	0.90779 08545	0.90632 43685	0.90480 6704
54	0.92865 07892	0.92727 83842	0 92584 79914	0.92436 08900	0.92281 84178	0 92122 1971
55	0.94541 38555	0.94397 23577	0.94246 98358	0.94090 76177	0.93928 70926	0.93760 9711
56	0.96215 94829	0.96064 71050	0.95907 05797	0.95743 12838	0.95573 06577	0.95397 0206
57	0.97888 78858	0.97730 28604	0.97565 04778	0.97393 21637	0.97214 94096	0.97030 3774
58	0.99559 93000	0.99393 98819	0.99220 98110	0.99041 05617	0.98854 36767	0.98661 0768
59	1.01229 39831	1.01055 84515	1.00874 88865	1.00686 68109	1.00491 38185	1.00289 1575
60	1.02897 22138	1.02715 88746	1.02526 80372	1.02330 12727	1.02126 02257	1.01914 6616
61	1.04563 42915	1.04374 14796	1.04176 76216	1.03971 43366	1.03758 33198	1.03537 6344
62	1.06228 05364	1.06030 66179	1.05824 80234	1.05610 64197	1.05388 35523	1.05158 1247
63	1.07891 12888	1.07685 46632	1.07470 96511	1.07247 79663	1.07016 14047	1.06776 1844
64	1.09552 69089	1.09338 60112	1 09115 29372	1.08882 94476	1.08641 73878	1.08391 8687
65	1.11212 77764	1.10990 10793	1.10757 83383	1.10516 13608	1.10265 20410	1.10005 2360
66	1.12871 42900	1.12640 03058	1.12398 63343	1.12147 42289	1.11886 59321	1.11616 3475
67	1.14528 68668	1.14288 41498	1.14037 74280	1.13776 86001	1.13505 96562	1.13225 2678
68	1.16184 59421	1.15935 30903	1.15675 21440	1.15404 50466	1.15123 38355	1.14832 0642
69	1.17839 19688	1.17580 76260	1.17311 10287	1.17030 41649	1.16738 91181	1.16436 8069
70	1.19492 54166	1.19224 82741	1.18945 46495	1.18654 65743	1.18352 61775	1.18039 5688
71	1.21144 67716	1.20867 55704	1.20578 35939	1.20277 29162	1.19964 57118	1.19640 4256
72	1.22795 65360	1.22509 00682	1.22209 84688	1.21898 38539	1.21574 84426	1.21239 4557
73	1.24445 52270	1.24149 23376	1.23839 98998	1.23518 00712	1.23183 51143	1.22836 7397
74	1 26094 33762	1.25788 29651	1.25468 85307	1.25136 22717	1.24790 64934	1.24432 3609
75	1.27742 15293	1.27426 25524	1.27096 50223	1.26753 11780	1.26396 33670	1.26026 4046
76	1.29389 02452	1.29063 17161	1.28723 00517	1.28368 75307	1.28000 65418	1.27618 9586
77	1.31035 00951	1.30699 10865	1.30348 43113	1.29983 20872	1.29603 68437	1 29210 1124
78	1.32680 16620	1.32334 13070	1.31072 85082	1.31596 56213	1·31205 51162	1.30799 9578
79	1.34324 55400	1.33968 30335	1.33596 33630	1.33208 89217	1.32806 22193	1.32388 5882
80	1.35968 23333	1.35601 69330	1.35218 96088	1.34820 27911	1.34405 90283	1.33976 0987
81	1.37611 26554	1.37234 36830	1.36840 79906	1.36430 80450	1.36004 64330	1.35562 58617
82	1.39253 71286	1.38866 39708	1.38461 92639	1.38040 55107	1.37602 53360	1.37148 1486
83	1.40895 63830	1.40497 84922	1.40082 41938	1.39649 60264	1.39199 66519	1.38732 8855
84	1.42537 10555	1.42128 79509	1.41702 35544	1.41258 04398	1.40796 13058	1.40316 8976
85	1.44178 17892	1.43759 30573	1.43321 81270	1.42865 96068	1.42392 02320	1.41900 2864
86	1.45818 92325	1.45389 45279	1.44940 86996	1.44473 43907	1.43987 43728	1.43483 15455
87	1.47459 40382	1.47019 30839	1.46559 60656	1.46080 56609	1.45582 46773	1.45065 60518
88	1.49099 68627	1.48648 94505	1.48178 10228	1.47687 42916	1.47177 20998	1.46647 7422
89	1.50739 83648	1.50278 43558	1.49796 43724	1 49294 11605	1.48771 75988	1.48229 66989
90	1.52379 92053	1.51907 85300	1.51414 69175	1.50900 71479	1.50366 21354	1.49811 49284

φ.	F (20°).	F (21°).	F (22°).	F (23°).	F (24°).	F (25°).
45°	0.79398 14299	0.79484 80729	0.79575 42198	0.79669 94320	0.79768 32401	0.79870 51427
46	0.81197 84355	0.81290 10704	0.81386 59806	0.81487 27298	0.81592 08495	0.81700 98386
47	0.82999 49932	0.83097 57385	0.83200 16568	0.83307 23170	0.83418 72555	0.83534 59748
48	0.84803 11311	0.84907 21156	0.85016 12993	0.85129 82599	0.85248 25420	0.85371 36559
49	0.86608 68531	0.86719 02136	0.86834 49299	0.86955 05923	0.87080 67577	0.87211 29482
50	0.88416 21388	0.88533 00174	0.88655 25406	0.88782 93155	0.88915 99155	0.89054 38793
51	0.90225 69437	0.90349 14850	0.90478 40936	0.90613 43979	0.90754 19924	0.90900 64371
52	0.92037 11986	0.92167 45468	0.92303 95207	0.92446 57743	0.92595 29285	0.92750 05695
53	0.93850 48093	0.93987 91057	0.94131 87231	0.94282 33460	0.94439 26268	0.94602 61835
54	0.95665 76569	0.95810 50369	0.95962 15712	0.96120 69801	0.96286 09528	0.96458 31451
55	0.97482 95976	0.97635 21879	0.97794 79046	0.97961 65095	0.98135 77343	0.98317 12786
56	0.99302 04625	0.99462 03779	0.99629 75316	0.99805 17325	0.99988 27608	1.00179 03664
57	1.01123 00579	1.01290 93984	1.01467 02295	1.01651 24128	1.01843 57835	1.02044 01484
58	1.02945 81648	1.03121 90129	1.03306 57442	1.03499 82793	1.03701 65151	1.03912 03221
59	1.04770 45395	1.04954 89568	1.05148 37904	1.05350 90263	1.05562 46296	1.05783 05421
60	1.06596 89136	1.06789 89379	1.06992 40517	1.07204 43132	1.07425 97625	1.07657 04205
61	1.08425 09940	1.08626 86360	1.08838 61806	1.09060 37646	1.09292 15107	1.09533 95261
62	1.10255 04630	1.10465 77036	1.10686 97988	1.10918 69708	1.11160 94324	1.11413 73851
63	1.12086 69790	1.12306 57658	1.12537 44971	1.12779 34877	1.13032 30477	1.13296 34811
64	1.13920 01762	1.14149 24207	1.14389 98361	1.14642 28370	1.14906 18385	1.15181 72553
65	1.15754 96654	1.15993 72398	1.16244 53466	1.16507 45069	1.16782 52490	1.17069 81065
66	1.17591 50342	1.17839 97685	1.18101 05295	1.18374 79523	1.18661 26862	1.18960 53923
67	1.19429 58473	1.19687 95261	1.19959 48566	1.20244 25954	1.20542 35202	1.20853 84287
68	1.21269 16471	1.21537 60067	1.21819 77712	1.22115 78259	1.22425 70851	1.22749 64914
69	1.23110 19544	1.23388 86798	1.23681 86886	1.23989 30022	1.24311 26793	1.24647 88160
70	1.24952 62685	1.25241 69905	1.25545 69968	1.25864 74517	1.26198 95666	1.26548 45993
71	1.26796 40680	1.27096 03606	1.27411 20570	1.27742 04718	1.28088 69766	1.28451 29999
72	1.28641 48117	1.28951 81890	1.29278 32047	1.29621 13306	1.29980 41063	1.30356 31391
73	1.30487 79390	1.30808 98528	1.31146 97504	1.31501 92680	1.31874 01204	1.32263 41023
74	1.32335 28706	1.32667 47076	1.33017 09805	1.33384 34964	1.33769 41530	1.34172 49401
75	1.34183 90096	1.34527 20889	1.34888 61582	1.35268 32021	1.35666 53082	1.36083 46694
76	1.36033 57418	1.36388 13128	1.36761 45247	1.37153 75464	1.37565 26621	1.37996 22752
77	1.37884 24371	1.38250 16766	1.38635 53002	1.39040 56665	1.39465 52633	1.39910 67117
78	1.39735 84500	1.40113 24606	1.40510 76849	1.40928 66772	1.41367 21350	1.41826 69042
79	1.41588 31207	1.41977 29284	1.42387 08603	1.42817 96719	1.43270 22762	1.43744 17504
80	1.43441 57761	1.43842 23285	1.44264 39906	1.44708 37241	1.45174 46633	1.45663 01226
81	1.45295 57306	1.45707 98950	1.46142 62236	1.46599 78889	1.47079 82517	1.47583 08692
82	1.47150 22872	1.47574 48492	1.48021 66924	1.48492 12045	1.48986 19775	1.49504 28168
83	1.49005 47388	1.49441 64004	1.49901 45165	1.50385 26936	1.50893 47594	1.51426 47719
84	1.50861 23690	1.51309 37475	1.51781 88033	1.52279 13652	1.52801 55003	1.53349 55235
85	1.52717 44532	1.53177 60801	1.53662 86496	1.54173 62161	1.54710 30892	1.55273 38446
86	1.54574 02599	1.55046 25795	1.55544 31430	1.56068 62326	1.56619 64033	1.57197 84944
87	1.56430 90516	1.56915 24205	1.57426 13634	1.57964 03922	1.58529 43097	1.59122 82211
88	1.58288 00862	1.58584 47725	1.59308 23845	1.59859 76654	1.60439 56672	1.61048 17634
89	1.60145 26180	1.60653 88008	1.61190 52753	1.61755 70172	1.62349 93288	1.62973 78535
90	1.62002 58991	1.62523 36678	1.63072 91016	1.63631 74093	1.64260 41437	1.64899 52185

φ.	E (25°).	E (26°).	E (27°).	E (28°).	E (29°).	E (30°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 31342	0.01745 31222	0.01745 31100	0.01745 30972	0.01745 30842	0.01745 30710
2	0.03490 53192	0.03490 52231	0.03490 51244	0.03490 50230	0.03490 49192	0.03490 48132
3	0.05235 56065	0.05235 52822	0.05235 49489	0.05235 46069	0.05235 42568	0.05235 38991
4	0.06980 30499	0.06980 22812	0.06980 14914	0.06980 06811	0.06979 98516	0.06979 90038
5	0.08724 67060	0.08724 52053	0.08724 36631	0.08724 20813	0.08724 04617	0.08723 88064
6	0.10468 56355	0.10468 30436	0.10468 03800	0.10467 76478	0.10467 48504	0.10467 19912
7	0.12211 89040	0.12211 47906	0.12211 05632	0.12210 62270	0.12210 17872	0.12209 72492
8	0.13954 55833	0.13953 94473	0.13953 31411	0.13952 66724	0.13952 00490	0.13951 32791
9	0.15696 47520	0.15695 60220	0.15694 70496	0.15693 78458	0.15692 84217	0.15691 87888
10	0.17437 54968	0.17436 35315	0.17435 12338	0.17433 86185	0.17432 57010	0.17431 24969
11	0.19177 69132	0.19176 10022	0.19174 46486	0.19172 78725	0.19171 06938	0.19169 31335
12	0.20916 81067	0.20914 74709	0.20912 62605	0.20910 45015	0.20908 22196	0.20905 94420
13	0.22654 81937	0.22652 19861	0.22649 50480	0.22646 74122	0.22643 91115	0.22641 01800
14	0.24391 63023	0.24388 36088	0.24385 00031	0.24381 55256	0.24378 02174	0.24374 41209
15	0.26127 15736	0.26123 14139	0.26119 01322	0.26114 77779	0.26110 44015	0.26106 00549
16	0.27861 31624	0 27856 44907	0.27851 44571	0.27846 31217	0.27841 05451	0.27835 67906
17	0.29594 02381	0.29588 19441	0.29582 20166	0.29576 05271	0.29569 75483	0.29563 31557
18	0.31325 19858	0.31318 28958	0.31311 18667	0.31303 89830	0.31296 43307	0.31288 79989
19	0.33054 76072	0.33046 64851	0.33038 30824	0.33029 74980	0.33020 98328	0.33012 01909
20	0.34782 63213	0.34773 18698	0.34763 47584	0.34753 51018	0.34743 30172	0.34732 86253
21	0.36508 73654	0.36497 82274	0.36486 60102	0.36475 08459	0.36463 28696	0.36451 22204
22	0.38232 99963	0.38220 47557	0.38207 59749	0.38194 38049	0.38180 84002	0.38166 99200
23	0.39955 34906	0.39941 06740	0.39926 38125	0.39911 30775	0.39895 86446	0.39880 06947
24	0.41675 71460	0.41659 52240	0.41642 87068	0.41625 77877	0.41608 26651	0.41590 35433
25	0.43394 02818	0.43375 76707	0.43356 98663	0.43337 70856	0.43317 95515	0.43297 74936
26	0.45110 22400	0.45089 73031	0.45068 65251	0.45047 01486	0.45024 84227	0.45002 16039
27	0.46824 23862	0.46801 34353	0.46777 79441	0.46753 61824	0.46728 84272	0.46703 49638
28	0.48536 01099	0.48510 54072	0.48484 34116	0.48457 44218	0.48429 87445	0.48401 66957
29	0.50245 48258	0.50217 25854	0.50188 22444	0.50158 41319	0.50127 85861	0.50096 59558
30	0 51952 59742	0.51921 43641	0 51889 37886	0.51856 46089	0.51822 71965	0.51788 19349
31	0.53657 30218	0.53623 01659	0.53587 74205	0.53551 51811	0.53514 38542	0.53476 38598
32	0.55359 54626	0.55321 94420	0.55283 25473	0.55243 52097	0.55202 78726	0.55161 09942
33	0.57059 28184	0 57018 16739	0.56975 86082	0.56932 40897	0.56887 86009	0.56842 26398
34	0.58756 46396	0.58711 63736	0.58665 50749	0.58618 12510	0.58569 54253	0.58519 81373
35	0.60451 05055	0 60402 30841	0.60352 14525	0.60300 61591	0.60247 77695	0.60193 68671
36	0.62143 00254	0 62090 13804	0.62035 72802	0.61979 83155	0.61922 50960	0.61863 82506
37	0.63832 28389	0.63775 08702	0.63716 21319	0.63655 72589	0.63593 69066	0.63530 17510
38	0.65518 86163	0.65457 11942	0.65393 56172	0.65328 25660	0.65261 27433	0.65192 68740
39	0.67202 70596	0.67136 20269	0.67067 73817	0.66997 38519	0.66925 21892	0.66851 31690
40	0.68883 79027	0.68812 30772	0.68738 71078	0.68663 07710	0.68585 48690	0.68506 02295
41	0.70562 09117	0.70485 40888	0.70406 45152	0.70325 30175	0.70242 04500	0.70156 76942
42	0.72237 58856	0.72155 48406	0.72070 93614	0.71984 03261	0.71894 86425	0.71803 52476
43	0.73910 26568	0.73822 51473	0.73732 14423	0.73639 24725	0.73543 92007	0.73446 26206
44	0.75580 10912	0.75486 48599	0.75390 05926	0.75290 92740	0.75189 19230	0.75084 95913
45	0.77247 10886	0.77147 38658	0.77044 66863	0.76939 05898	0.76830 66525	0.76719 59857

φ.	F(25°).	F(26°).	F(27°).	F(28°).	F(29°).	F(30°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0 01745 34508	0.01745 34628	0.01745 34752	0.01745 34878	0.01745 35008	0.01745 35141
2	0.03490 78510	0.03490 79471	0.03490 80459	0.03490 81472	0.03490 82510	0.03490 83570
3	0.05236 41493	0.05236 44737	0.05236 48072	0.05236 51491	0.05236 54994	0.05236 58573
4	0.06982 32930	0.06982 40620	0.06982 48524	0.06982 56630	0.06982 64932	0.06982 73416
5	0.08728 62274	0.08728 77292	0.08728 92728	0.08729 08562	0.08729 24775	0.08729 41346
6	0.10475 38949	0.10475 64898	0.10475 91570	0.10476 18930	0.10476 46946	0.10476 75583
7	0.12222 72345	0.12223 13547	0.12223 55896	0.12223 99341	0.12224 43830	0.12224 89309
8	0.13970 71811	0.13971 33303	0.13971 96512	0.13972 61361	0.13973 27770	0.13973 95662
9	0.15719 46646	0.15720 34184	0.15721 24172	0.15722 16501	0.15723 11058	0.15724 07733
10	0.17469 06092	0.17470 26148	0.17471 49572	0.17472 76215	0.17474 05926	0.17475 38551
11	0.19219 59330	0.19221 19089	0.19222 83341	0.19224 51892	0.19226 24539	0.19228 01081
12	0.20971 15469	0.20973 22827	0.20975 36035	0.20977 54844	0.20979 78990	0.20982 08214
13	0.22723 83540	0.22726 47105	0.22729 18131	0.22731 96302	0.22734 81288	0.22737 72759
14	0.24477 72490	0 24481 01576	0.24484 40013	0.24487 87407	0.24491 43350	0.24495 07433
15	0.26232 91172	0.26236 95800	0.26241 11969	0.26245 39201	0.26249 76996	0.26254 24855
16	0.27989 48339	0.27994 39232	0.27999 44184	0.28004 62619	0.28009 93938	0.28015 37538
17	0.29747 52637	0.29753 41216	0.29759 46726	0.29765 68481	0.29772 05771	0.29778 57878
18	0.31507 12595	0.31514 10977	0.31521 29542	0.31528 67482	0.31536 23965	0.31543 98144
19	0.33268 36618	0.33276 57612	0.33285 02448	0.33293 70185	0.33302 59855	0.33311 70471
20	0.35031 32981	0.35040 90083	0.35050 75120	0.35060 87009	0.35071 24631	0.35081 86847
21	0.36796 09818	0.36807 17206	0.36818 57087	0.36830 28221	0.36842 29330	0.36854 59108
22	0.38562 75114	0.38575 47644	0.38588 57717	0.38602 03928	0.38615 84825	0.38629 98923
23	0.40331 36700	0.40345 89899	0.40360 86214	0.40376 24065	0.40392 01813	0.40408 17784
24	0.42102 02241	0.42118 52301	0.42135 51605	0.42152 98385	0.42170 90809	0.42189 26997
25	0.43874 79230	0.43893 42999	0.43912 62729	0.43932 36451	0.43952 62131	0.43973 37669
26	0.45649 74977	0.45670 69953	0.45692 28228	0.45714 47624	0.45737 25890	0.45760 60698
27	0.47426 96602	0.47450 40926	0.47474 56540	0.47499 41051	0.47524 91979	0.47551 06758
28	0.49206 51025	0.49232 63470	0.49259 55886	0.49287 25655	0.49315 70060	0.49344 86289
19	0.50988 44959	0.51017 44921	0.51047 34260	0.51078 10126	0.51109 69556	0.51142 09483
30	0.52772 84899	0.52804 92387	0.52837 99419	0.52872 02906	0.52906 99634	0.52942 86272
31	0.54559 77114	0.54595 12739	0.54631 58871	0.54669 12180	0.54707 69195	0.54747 26314
32	0.56349 27640	0.56388 12599	0.56428 19865	0.56469 45862	0.56511 86859	0.56555 38981
33	0.58141 42266	0.58183 98332	0.58227 89380	0.58273 11586	0.58319 60956	0.58367 33341
34	0.59936 26527	0.59982 76036	0.60030 74114	0.60080 16691	0.60130 99510	0.60183 18144
35	0.61733 85697	0.61784 51530	0.61836 80471	0.61890 68209	0.61946 10224	0.62203 01811
36	0.63534 24779	0.63589 30345	0.63646 14554	0.63704 72855	0.63765 00470	0.63826 92418
37	0 65337 48492	0.65397 17715	0.65458 82150	0.65522 37011	0.65587 77271	0.65654 97679
38	0.67143 61266	0.67208 18565	0.67274 88718	0.67343 66715	0.67414 47289	0.67487 24928
39	0.68952 67233	0.69022 37500	0.69094 39379	0.69168 67648	0.69245 16814	0.69323 81109
40	0.70764 70215	0.70839 78796	0.70917 38904	0.70997 45121	0.71079 91740	0.71164 72757
41	0.72579 73717	0.72660 46390	0.72743 91704	0.72830 04063	0.72918 77562	0.73010 05980
42	0.74397 80918	0.74484 43870	0.74754 01816	0.74666 49005	0.74761 79354	0.74859 86446
43	0.76218 94662	0.76311 74464	0.76407 72895	0.76506 84070	0.76609 01757	0.76714 19365
44	0.78043 17449	0.78142 4[illegible]31	0.78245 08198	0.78351 12960	0.78460 48962	0.78573 09472
45	0.79870 51427	0.79976 46051	0.80086 10576	0.80199 38941	0.80316 24701	0.80436 61012

φ.	E(25°).	E(26°).	E(27°).	E(28).	E(29°).	E(30°).
45°	0.77247 10886	0.77147 38658	0.77044 66863	0.76939 05898	0.76830 66525	0.76719 5985
46	0.78911 25830	0.78805 20894	0.78695 96371	0.78583 63217	0.78468 32780	0.78350 167
47	0.80572 55428	0.80459 94923	0.80343 93984	0 80224 64143	0.80102 17338	0.79976 6591
48	0.82230 99714	0.82111 60734	0.81988 59643	0.81862 08553	0.81732 20007	0.81599 069
49	0.83886 59067	0.83760 18694	0.83629 93692	0.83495 96760	0.83358 41057	0.83217 4018
50	0.85539 34219	0.85405 69547	0.85267 96881	0.85126 29516	0.84980 81230	0.84831 662
51	0.87189 26252	0.87048 14418	0.86902 70371	0 86753 08009	0.86599 41738	0.86441 864
52	0.88836 36597	0.88687 54810	0.88534 15732	0 88376 33870	0.88214 24264	0.88048 024
53	0.90480 67040	0.90323 92607	0.90162 34945	0.89996 09172	0.89825 30966	0.89650 165
54	0.92122 19717	0.91957 30075	0.91787 30402	0.91612 36429	0.91432 64477	0.91248 314
55	0.93760 97112	0.93587 69857	0.93409 04903	0.93225 18596	0 93036 27904	0.92842 504
56	0.95397 02060	0.95215 14977	0.95027 61658	0.94834 59071	0 94636 24829	0.94432 771
57	0.97030 37743	0.96839 68832	0.96643 04284	0.96440 61689	0.96232 59306	0.96019 160
58	0.98661 07686	0.98461 35194	0.98255 36805	0.98043 30724	0.97825 35859	0.97601 718
59	1.00289 15757	1.00080 18209	0.99864 63643	0.99642 70883	0.99414 59482	0.99180 497
60	1.01914 66163	1.01696 22388	1.01470 89622	1.01238 87305	1.01000 35633	1.00755 555
61	1.03537 63444	1.03309 52607	1.03074 19960	1.02831 85555	1.02582 70229	1.02326 955
62	1.05158 12472	1.04920 14101	1.04674 60265	1.04421 71622	1.04161 69645	1 03894 766
63	1.06776 18444	1.06528 12460	1.06272 16529	1.06008 51909	1.05737 40706	1.05459 058
64	1.08391 86877	1.08133 53624	1.07866 95124	1.07592 33232	1.07309 90680	1.07019 910
65	1.10005 23602	1.09736 43873	1.09459 02794	1.09173 22810	1.08879 27272	1.08577 404
66	1.11616 34759	1.11336 89825	1.11048 46649	1.10751 28259	1.10445 58618	1.10131 625
67	1.13225 26789	1.12934 98426	1.12635 34156	1.12326 57583	1.12008 93272	1.11682 66
68	1.14832 06426	1.14530 76943	1.14219 73131	1.13899 19165	1.13569 40201	1.13230 62
69	1.16436 80691	1.16124 32955	1.15801 71732	1.15469 21758	1.15127 08774	1.14775 59
70	1.18039 56882	1.17715 74344	1.17381 38446	1.17036 74475	1.16682 08748	1.16317 68
71	1.19640 42567	1.19305 09288	1.18958 82081	1.18601 86778	1.18234 50261	1.17857 00
72	1.21239 45573	1.20892 46246	1.20534 11755	1.20164 68467	1.19784 43815	1.19393 663
73	1.22836 73976	1.22477 93952	1.22107 36885	1.21725 29664	1.21332 00267	1.20927 77
74	1.24432 36092	1.24061 61403	1.23678 67173	1.23283 80805	1.22877 30813	1.22459 46
75	1.26026 40465	1.25643 57845	1.25248 12596	1.24840 32626	1.24420 46974	1.23988 85
76	1.27618 95860	1.27223 92764	1.26815 83392	1.26394 96146	1 25961 60581	1.25516 07
77	1.29210 11245	1.28802 75871	1.28381 90046	1.27947 82654	1.27500 83758	1.27041 24
78	1.30799 95783	1.30380 17092	1.29946 43276	1.29499 03695	1.29038 28907	1.28564 50
79	1.32388 58821	1.31956 26552	1.31509 54018	1.31048 71050	1.30574 08692	1.30085 99
80	1.33976 09875	1.33531 14561	1.33071 33414	1.32596 96726	1.32108 36018	1.31605 84
81	1.35562 58617	1.35104 91602	1.34631 92793	1.34143 92934	1.33641 24014	1.33124 19
82	1.37148 14862	1.36677 68315	1.36191 43656	1.35689 72073	1.35172 86015	1.34641 19
83	1.38732 88557	1.38249 55485	1.37749 97661	1.37234 46714	1.36703 35545	1.36156 98
84	1.40316 89764	1.39820 64021	1.39307 66606	1.38778 29580	1.38232 86293	1.37671 71
85	1.41900 28646	1.41391 04947	1.40864 62413	1.40321 33531	1.39761 52094	1.39185 53
86	1.43483 15455	1.42960 89383	1.42420 97108	1.41863 71540	1.41289 46911	1.40698 58
87	1.45065 60518	1.44530 28529	1.43976 82806	1.43405 56679	1.42816 84814	1.42211 03
88	1.46647 74220	1.46099 33651	1.45532 31694	1.44947 02096	1.44343 79956	1.43723 01
89	1.48229 66989	1.47668 16063	1.47087 56013	1.46488 21000	1.45870 46555	1.45234 69
90	1.49811 49284	1.49236 87111	1.48642 68037	1.48029 26638	1.47396 98872	1.46746 22

φ.	F(25°).	F(26°).	F(27°).	F(28°).	F(29°).	F(30°).
45°	0.79870 51427	0.79976 46051	0.80086 10576	0.80199 38941	0.80316 24701	0.80436 61012
46	0.81700 98386	0.81813 91617	0.81930 82466	0.82051 64834	0.82176 32226	0.82304 77722
47	0.83534 59748	0.83654 79423	0.83779 25872	0.83907 93001	0.84040 74299	0.84177 62816
48	0.85371 36559	0.85499 10756	0.85631 42363	0.85768 25331	0.85909 53177	0.86055 1896
49	0.87211 29482	0.87346 86492	0.87487 33059	0.87632 63229	0.87782 70599	0.87937 48301
50	0.89054 38793	0.89198 07081	0.89346 98622	0.89501 07608	0.89660 27769	0.89824 5235
51	0.90900 64371	0.91052 72543	0.91210 39246	0.91373 58875	0.91542 25350	0.91716 3210
52	0.92750 05695	0.92910 82460	0.93077 54651	0.93250 16921	0.93428 63444	0.93612 8790
53	0.94602 61835	0.94772 35971	0.94948 44071	0.95130 81110	0.95319 41585	0.95514 1949
54	0.96458 31451	0.96637 31763	0.96823 06248	0.97015 50272	0.97214 58727	0.97420 2599
55	0.98317 12786	0.98505 68067	0.98701 39426	0.98904 22693	0.99114 13232	0.99331 0589
56	1.00179 03664	1.00377 42653	1.00583 41343	1.00796 96108	1.01018 02860	1.01246 5701
57	1.02044 01484	1.02252 52824	1.02469 09228	1.02693 67693	1.02926 24764	1.03166 7650
58	1.03912 03221	1.04130 95415	1.04358 39793	1.04594 34058	1.04838 75479	1.05091 6086
59	1.05783 05421	1.06012 66791	1.06251 39233	1.06498 91243	1.06755 50912	1.07021 0589
60	1.07657 04205	1.07897 62841	1.08147 73218	1.08407 34716	1.08676 46343	1.08955 0669
61	1.09533 95261	1.09785 78981	1.10047 66895	1.10319 59365	1.10601 56415	1.10893 5770
62	1.11413 73851	1.11677 10151	1.11951 04887	1.12235 59499	1.12530 75135	1.12836 5262
63	1.13296 34811	1.13571 50819	1.13857 81290	1.14155 28846	1.14463 95867	1.14783 8446
64	1.15181 72553	1.15468 94979	1.15767 89679	1.16078 60556	1.16401 11336	1.16735 4553
65	1.17069 81065	1.17369 36159	1.17681 23106	1.18005 47200	1.18342 13626	1.18691 2742
66	1.18960 53923	1.19272 67419	1.19597 74107	1.19935 80775	1.20286 94183	1.20651 2102
67	1.20853 84287	1.21178 81361	1.21517 34703	1.21869 52706	1.22235 43821	1.22615 1652
68	1.22749 64914	1.23087 70133	1.23439 96411	1.23806 53855	1.24187 52726	1.24583 0340
69	1.24647 88160	1.24999 25436	1.25365 50248	1.25746 74527	1.26143 10464	1.26554 7047
70	1.26548 45993	1.26913 38535	1.27293 86742	1.27690 04480	1.28102 05990	1.28530 0585
71	1.28451 29999	1.28830 00265	1.29224 95940	1.29636 32935	1.30064 27659	1.30508 9699
72	1.30356 31391	1.30749 01043	1.31158 67421	1.31585 48589	1.32029 63240	1.32491 3068
73	1.32263 41023	1.32670 30882	1.33094 90309	1.33537 39626	1.33997 99929	1.34476 9308
74	1.34172 49401	1.34593 79404	1.35033 53288	1.35491 93737	1.35969 24368	1.36465 6972
75	1.36083 46694	1.36519 35851	1.36974 44614	1.37448 98135	1.37943 22661	1.38457 4553
76	1.37996 22752	1.38446 89102	1.38917 52136	1.39408 39572	1.39919 80394	1.40452 0486
77	1.39910 67117	1.40376 27692	1.40862 63313	1.41370 04360	1.41898 82660	1.42449 3151
78	1.41826 69042	1.42307 39827	1.42809 65233	1.43333 78395	1.43880 14082	1.44449 0874
79	1.43744 17504	1.44240 13402	1.44758 44635	1.45299 47176	1.45863 58836	1.46451 1931
80	1.45663 01226	1.46174 36022	1.46708 87928	1.47266 95834	1.47849 00681	1.48455 4551
81	1.47583 08692	1.48109 95025	1.48660 81216	1.49236 09153	1.49836 22986	1.50461 6920
82	1.49504 28168	1.50046 77499	1.50614 10324	1.51206 71600	1.51825 08761	1.52469 7182
83	1.51426 47719	1.51984 70305	1.52568 60821	1.53178 67353	1.53815 40690	1.54479 3445
84	1.53349 55235	1.53923 60103	1.54524 18046	1.55151 80328	1.55807 01161	1.56490 3784
85	1.55273 38446	1.55863 33375	1.56840 67133	1.57125 94214	1.57799 72303	1.58502 6242
86	1.57197 84944	1.57803 76448	1.58437 93043	1.59100 92500	1.59793 36018	1.60515 8840
87	1.59122 82211	1.59744 75517	1.60395 80590	1.61076 58508	1.61787 74021	1.62529 9575
88	1.61048 17[illegible]34	1.61686 16675	1.62354 14469	1.63052 75424	1.63782 67874	1.64544 6429
89	1.62973 78535	1.63627 86937	1.64312 79285	1.65029 26336	1.65777 99024	1.66559 7369
90	1.64899 52185	1.65569 69263	1.66271 59585	1.67005 94263	1.67773 48841	1.68575 0354

φ.	E (30°).	E (31°).	E (32°).	E (33°).	E (34°).	E (35°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 000
1	0.01745 30710	0.01745 30575	0.01745 30437	0.01745 30297	0.01745 30154	0.01745 300
2	0.03490 48132	0.03490 47051	0.03490 45948	0.03490 44827	0.03490 43688	0.03490 425
3	0.05235 38991	0.05235 35341	0.05235 31621	0.05235 27839	0.05235 23996	0.05235 200
4	0.06979 90038	0.06979 81387	0.06979 72573	0.06979 63609	0.06979 54502	0.06979 452
5	0.08723 88064	0.08723 71173	0.08723 53964	0.08723 36461	0 08723 18681	0.08723 006
6	0.10467 19912	0.10466 90736	0.10466 61012	0.10466 30776	0.10466 00065	0.10465 689
7	0.12209 72492	0.12209 26184	0.12208 79006	0.12208 31013	0.12207 82266	0.12207 328
8	0.13951 32791	0.13950 63705	0.13949 93321	0.13949 21718	0.13948 48989	0.13947 752
9	0.15691 87888	0.15690 89585	0.15689 89431	0.15688 87542	0.15687 84047	0.15686 790
10	0.17431 24969	0.17429 90219	0.17428 52927	0.17427 13255	0.17425 71376	0.17424 274
11	0.19169 31335	0.19167 52125	0.19165 69528	0.19163 83761	0.19161 95053	0.19160 036
12	0.20905 94420	0.20903 61958	0.20901 25096	0.20898 84114	0.20896 39308	0.20893 909
13	0.22641 01800	0.22638 06526	0.22635 05650	0.22631 99530	0.22628 88541	0.22625 730
14	0.24374 41209	0.24370 72797	0.24366 97379	0.24363 15405	0.24359 27339	0.24355 336
15	0.26106 00549	0.26101 47917	0.26096 86659	0.26092 17326	0.26087 40488	0.26082 567
16	0.27835 67906	0.27830 19225	0.27824 60063	0.27818 91089	0.27813 12990	0.27807 264
17	0.29563 31557	0.29556 74262	0.29550 04380	0.29543 22712	0.29536 30078	0.29529 273
18	0.31288 79989	0.31281 00787	0.31273 06625	0.31264 98450	0.31256 77232	0.31248 439
19	0.33012 01909	0.33002 86789	0.32993 54052	0.32984 04808	0.32974 40192	0.32964 613
20	0.34732 86253	0.34722 20500	0.34711 34172	0.34700 28557	0.34689 04976	0.34677 647
21	0.36451 22204	0.36438 90409	0.36426 34761	0.36413 56749	0.36400 57891	0.36387 397
22	0.38166 99200	0.38152 85272	0.38138 43880	0.38123 76728	0.38108 85551	0.38093 721
23	0.39880 06947	0.39863 94130	0.39847 49884	0.39830 76146	0.39813 74892	0.39796 481
24	0.41590 35433	0.41572 06315	0.41553 41434	0.41534 42979	0.41515 13183	0.41495 543
25	0.43297 74936	0.43277 11468	0.43256 07515	0.43234 65537	0.43212 88045	0.43190 775
26	0.45002 16039	0.44978 99548	0.44955 37445	0.44931 32479	0.44906 87463	0.44882 052
27	0.46703 49638	0.46677 60846	0.46651 20890	0.46624 32830	0.46596 99802	0.46569 249
28	0.48401 66957	0.48372 85994	0.48343 47875	0.48313 55991	0.48283 13818	0.48252 248
29	0.50096 59558	0.50064 65982	0.50032 08798	0.49998 91750	0.49965 18676	0.49930 934
30	0.51788 19349	0.51752 92165	0.51716 94443	0.51680 30301	0.51643 03961	0.51605 197
31	0.53476 38598	0.53437 56276	0.53397 95990	0.53357 62253	0.53316 59693	0.53274 930
32	0.55161 09942	0.55118 50436	0.55075 05028	0.55030 78644	0.54985 76341	0.54940 032
33	0.56842 26398	0.56795 67169	0.56748 13566	0.56699 70953	0.56650 44835	0.56600 408
34	0.58519 81373	0.58468 99409	0.58417 14047	0.58364 31113	0.58310 56580	0.58255 965
35	0.60193 68671	0.60138 40508	0.60081 99356	0.60024 51522	0.59966 03469	0.59906 617
36	0.61863 82506	0.61803 84252	0.61742 62834	0.61680 25056	0.61616 77895	0.61552 284
37	0.63530 17510	0.63465 24869	0.63398 98284	0.63331 45079	0.63262 72764	0.63192 890
38	0.65192 68740	0.65122 57037	0.65050 99988	0.64978 05456	0.64903 81506	0.64828 363
39	0.66851 31690	0.66775 75895	0.66698 62711	0.66620 00562	0.66539 98087	0.66458 641
40	0.68506 02295	0.68424 77049	0.68341 81715	0.68257 25295	0.68171 17022	0.68083 663
41	0.70156 76942	0.70069 56582	0.69980 52764	0.69889 75083	0.69797 33784	0.69703 377
42	0.71803 52476	0.71710 11067	0.71614 72136	0.71517 45892	0.71418 42816	0.71317 736
43	0.73446 26206	0.73346 37565	0.73244 36631	0.73140 34245	0.73034 41540	0.72926 699
44	0.75084 95913	0.74978 33640	0.74869 43579	0.74758 37221	0.74645 26367	0.74530 231
45	0.76719 59857	0.76605 97361	0.76489 90847	0.76371 52467	0.76250 94707	0.76128 303

φ.	F (30°).	F (31°).	F (32°).	F (33°).	F (34°).	F (35°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 0000
1	0.01745 35141	0.01745 35275	0.01745 35413	0.01745 35553	0.01745 35696	0.01745 3584
2	0.03490 83570	0.03490 84652	0.03490 85755	0.03490 86876	0.03490 88015	0.03490 8917
3	0.05236 58573	0.05236 62224	0.05236 65946	0.05236 69730	0.05236 73575	0.05236 7747
4	0.06982 73416	0.06982 82673	0.06982 90893	0.06982 99866	0.06983 08980	0.06983 1822
5	0.08729 41346	0.08729 58257	0.08729 75486	0.08729 93014	0.08730 10818	0.08730 2887
6	0.10476 75583	0.10477 04808	0.10477 34585	0.10477 64879	0.10477 95652	0.10478 2686
7	0.12224 89309	0.12225 35723	0.12225 83016	0.12226 31132	0.12226 80013	0.12227 295
8	0.13973 95662	0.13974 64955	0.13975 35564	0.13976 07408	0.13976 80396	0.13977 5444
9	0.15724 07733	0.15725 06409	0.15726 06968	0.15727 09292	0.15728 13253	0.15729 187
10	0.17475 38551	0.17476 73933	0.17478 11909	0.17479 52317	0.17480 94985	0.17482 3974
11	0.19228 01081	0.19229 81308	0.19231 65005	0.19233 51957	0.19235 41936	0.19237 3471
12	0.20982 08214	0.20984 42225	0.20986 80805	0.20989 23615	0.20991 70383	0.20994 2081
13	0.22737 72759	0.22740 70372	0.22743 73777	0.22746 82620	0.22749 96531	0.22753 1514
14	0.24495 07433	0.24498 79229	0.24502 58303	0.24506 44216	0.24510 36507	0.24514 3471
15	0.26254 24855	0.26258 82258	0.26263 48670	0.26268 23555	0.26273 06350	0.26277 964
16	0.28015 37538	0.28020 92794	0.28026 59059	0.28032 35687	0.28038 22000	0.28044 1731
17	0.29778 57878	0.29785 24056	0.29792 03538	0.29798 95551	0.29805 99290	0.29813 1394
18	0.31543 98144	0.31551 89141	0.31559 96054	0.31568 17969	0.31576 53940	0.31585 030
19	0.33311 70471	0.33321 01009	0.33330 50418	0.33340 17631	0.33350 01543	0.33360 010
20	0.35081 86847	0.35092 72476	0.35103 80300	0.35115 09087	0.35126 57557	0.35138 244
21	0.36854 59108	0.36867 16202	0.36879 99217	0.36893 06738	0.36906 37293	0.36919 893
22	0.38629 98923	0.38644 44683	0.38659 20520	0.38674 24820	0.38689 55906	0.38705 120
23	0.40408 17784	0.40424 70239	0.40441 57385	0.40458 77398	0.40476 28381	0.40494 084
24	0.42189 26997	0.42208 04999	0.42227 22800	0.42246 78351	0.42266 69519	0.42286 941
25	0.43973 37669	0.43994 60892	0.44016 29553	0.44038 41358	0.44060 93926	0.44083 848
26	0.45760 60698	0.45784 49638	0.45808 90219	0.45833 79888	0.45859 16000	0.45884 958
27	0.47551 06758	0.47577 82730	0.47605 17145	0.47633 07183	0.47661 49916	0.47690 4234
28	0.49344 86289	0.49374 71422	0.49405 22441	0.49436 36244	0.49468 09610	0.49500 392
29	0.51142 09483	0.51175 26717	0.51209 17962	0.51243 79820	0.51279 08764	0.51315 011
30	0.52942 86272	0.52979 59354	0.53017 15293	0.53055 50386	0.53094 60789	0.53134 4254
31	0.54747 26314	0.54787 79790	0.54829 25734	0.54871 60132	0.54914 78810	0.54958 774
32	0.56555 38981	0.56599 98188	0.56645 60287	0.56692 20944	0.56739 75645	0.56788 197
33	0.58367 33341	0.58416 24401	0.58466 29637	0.58517 44386	0.58569 63788	0.58622 828
34	0.60183 18144	0.60236 67956	0.60291 44135	0.60347 41684	0.60404 55392	0.60462 798
35	0.62003 01811	0.62061 38039	0.62121 13781	0.62182 23704	0.62244 62246	0.62308 2364
36	0.63826 92418	0.63890 43477	0.63955 48207	0.64022 00938	0.64089 95755	0.64159 265
37	0.65654 97679	0.65723 92724	0.65794 56658	0.65866 83478	0.65940 66919	0.66016 0046
38	0.67487 24928	0.67561 93840	0.67638 47974	0.67716 81002	0.67796 86310	0.67878 5700
39	0.69323 81109	0.69404 54477	0.69487 30571	0.69572 02747	0.69658 64049	0.69747 0721
40	0.71164 72757	0.71251 81859	0.71341 12420	0.71432 57491	0.71526 09786	0.71621 6168
41	0.73010 05980	0.73103 82765	0.73200 01028	0.73298 53530	0.73399 32673	0.73502 3048
42	0.74859 86446	0.74960 63511	0.75064 03418	0.75169 98658	0.75278 41338	0.75389 2316
43	0.76714 19365	0.76822 29932	0.76933 26109	0.77047 00141	0.77163 43863	0.77282 486
44	0.78573 09472	0.78688 87362	0.78807 75092	0.78929 64694	0.79054 47756	0.79182 1540
45	0.80436 61012	0.80560 40615	0.80687 55814	0.80817 98459	0.80951 59927	0.81088 3110

φ.	E(30°).	E(31°).	E(32°).	E(33°).	E(34°).	E(35°).
45°	0.76719 59857	0.76605 97361	0.76489 90847	0.76371 52467	0.76250 94707	0.76128 3038
46	0.78350 16779	0.78229 27312	0.78105 76846	0.77979 78204	0.77851 44577	0.77720 895
47	0.79976 65910	0.79848 22598	0.79717 00537	0.79583 13238	0.79446 74610	0.79307 989
48	0.81599 06973	0.81462 82847	0.81323 61439	0.81181 56955	0.81036 84061	0.80889 577
49	0.83217 40189	0.83073 08215	0.82925 59633	0.82775 09375	0.82621 72817	0.82465 657
50	0.84831 66279	0.84678 99391	0.84522 95766	0.84363 71059	0.84201 41399	0.84036 233
51	0.86441 86466	0.86280 57604	0.86115 71057	0.85947 43215	0.85775 90970	0.85601 316
52	0.88048 02480	0.87877 84618	0.87703 87299	0.87526 27652	0.87345 23343	0.87160 925
53	0.89650 16559	0.89470 82743	0.89287 46862	0.89100 26792	0.88909 40979	0.88715 083
54	0.91248 31448	0.91059 54830	0.90866 52695	0.90669 43673	0.90468 46995	0.90263 824
55	0.92842 50401	0.92644 04275	0.92441 08329	0.92233 81953	0.92022 45165	0.91807 185
56	0.94432 77181	0.94224 35019	0.94011 17876	0.93793 45908	0.93571 39922	0.93345 213
57	0.96019 16059	0.95800 51544	0.95576 86029	0.95348 40433	0.95115 36360	0.94877 960
58	0.97601 71810	0.97372 58876	0.97138 18060	0.96898 71044	0.96654 40230	0.96405 486
59	0.99180 49714	0.98940 62581	0.98695 19819	0.98444 43874	0.98188 57942	0.97927 859
60	1.00755 55550	1.00504 68761	1.00247 97731	0.99985 65670	0.99717 96564	0.99445 151
61	1.02326 95593	1.02064 84050	1.01796 58793	1.01522 43790	1.01242 63815	1.00957 444
62	1.03894 76610	1.03621 15612	1.03341 10568	1.03054 86199	1.02762 68063	1.02464 825
63	1.05459 05852	1.05173 71133	1.04881 61180	1.04583 01464	1.04278 18321	1.03967 389
64	1.07019 91051	1.06722 58813	1.06418 19307	1.06106 98745	1.05789 24238	1.05465 237
65	1.08577 40408	1.08267 87361	1.07950 94174	1.07626 87791	1.07295 96091	1.06958 478
66	1.10131 62590	1.09809 65986	1.09479 95543	1.09142 78929	1.08798 44778	1.08447 226
67	1.11682 66719	1.11348 04388	1.11005 33706	1.10654 83052	1.10296 81806	1.09931 603
68	1.13230 62359	1.12883 12749	1.12527 19472	1.12163 11612	1.11791 19283	1.11411 736
69	1.14775 59511	1.14415 01717	1.14045 64156	1.13667 76606	1.13281 69902	1.12887 759
70	1.16317 68598	1.15943 82398	1.15560 79566	1.15168 90562	1.14768 46927	1.14359 812
71	1.17857 00453	1.17469 66343	1.17072 77990	1.16666 66524	1.16251 64180	1.15828 042
72	1.19393 66306	1.18992 65532	1.18581 72181	1.18161 18040	1.17731 36024	1.17292 601
73	1.20927 77771	1.20512 92361	1.20087 75341	1.19652 59141	1.19207 77344	1.18753 646
74	1.22459 46832	1.22030 59625	1.21591 01104	1.21141 04327	1.20681 03530	1.20211 341
75	1.23988 85822	1.23545 80502	1.23091 63519	1.22626 68546	1.22151 30457	1.21665 853
76	1.25516 07414	1.25058 68536	1.24589 77030	1.24109 67171	1.23618 74460	1.23117 356
77	1.27041 24600	1.26569 37617	1.26085 56457	1.25590 15987	1.25083 52317	1.24566 028
78	1.28564 50673	1.28078 01961	1.27579 16975	1.27068 31161	1.26545 81222	1.26012 051
79	1.30085 99209	1.29584 76094	1.29070 74095	1.28544 29222	1.28005 78760	1.27455 612
80	1.31605 84050	1.31089 74830	1.30560 43639	1.30018 27038	1.29463 62883	1.28896 903
81	1.33124 19281	1.32593 13248	1.32048 41718	1.31490 41791	1.30919 51883	1.30336 117
82	1.34641 19212	1.34095 06671	1.33534 84707	1.32960 90949	1.32373 64363	1.31773 452
83	1.36156 98356	1.35595 70642	1.35019 89221	1.34429 92242	1.33826 19210	1.33209 109
84	1.37671 71408	1.37095 20903	1.36503 72091	1.35897 63635	1.35277 35564	1.34643 292
85	1.39185 53224	1.38593 73372	1.37986 50340	1.37364 23297	1.36727 32789	1.36076 207
86	1.40698 58797	1.40091 44115	1.39468 41153	1.38829 89575	1.38176 30442	1.37508 062
87	1.42211 03236	1.41588 49326	1.40949 61851	1.40294 80967	1.39624 48242	1.38939 066
88	1.43723 01743	1.43085 05299	1.42430 29866	1.41759 16088	1.41072 06038	1.40369 432
89	1.45234 69589	1.44581 28404	1.43910 62713	1.43223 13646	1.42519 23777	1.41799 371
90°	1.46746 22093	1.46077 35062	1.45390 77961	1.44686 92407	1.43966 21471	1.43229 096

φ.	F (30°).	F (31°).	F (32°).	F (33°).	F (34°).	F (35°).
45°	0.80436 61012	0.80560 40615	0.80687 55814	0.80817 98459	0.80951 59927	0.81088 31102
46	0.82304 77722	0.82436 93970	0.82572 73155	0.82712 06983	0.82854 86658	0.83001 02860
47	0.84177 62816	0.84318 51148	0.84463 31404	0.84611 95191	0.84764 33582	0.84920 37097
48	0.86055 18969	0.86205 15297	0.86359 34242	0.86517 67362	0.86680 05649	0.86846 39514
49	0.87937 48301	0.88096 88972	0.88260 84720	0.88429 27108	0.88602 07104	0.88779 15066
50	0.89824 52358	0.89993 74116	0.90167 85237	0.90346 77349	0.90530 41459	0.90718 67936
51	0.91716 32104	0.91895 72046	0.92080 37521	0.92270 20289	0.92465 11465	0.92665 01500
52	0.93612 87900	0.93802 83432	0.93998 42609	0.94199 57393	0.94406 19086	0.94618 18298
53	0.95514 19492	0.95715 08283	0.95922 00825	0.96134 89366	0.96353 65472	0.96578 20002
54	0.97420 25999	0.97632 45929	0.97851 11765	0.98076 16126	0.98307 50935	0.98545 07391
55	0.99331 05898	0.99554 95007	0.99785 74276	1.00023 36789	1.00267 74922	1.00518 80316
56	1.01246 57014	1.01482 53447	1.01725 86441	1.01976 49644	1.02234 35991	1.02499 37673
57	1.03166 76508	1.03415 18457	1.03671 45560	1.03935 52134	1.04207 31787	1.04486 77378
58	1.05091 60866	1.05352 86511	1.05622 48137	1.05900 40841	1.06186 59024	1.06480 96339
59	1.07021 05892	1.07295 53340	1.07578 89864	1.07871 11464	1.08172 13459	1.08481 90428
60	1.08955 06699	1.09243 13919	1.09540 65612	1.09847 58807	1.10163 89874	1.10489 54463
61	1.10893 57705	1.11195 62460	1.11507 69416	1.11829 76763	1.12161 82063	1.12503 82185
62	1.12836 52624	1.13152 92404	1.13479 94468	1.13817 58303	1.14165 82811	1.14524 66236
63	1.14783 84466	1.15114 96420	1.15457 33111	1.15810 95466	1.16175 83882	1.16551 98143
64	1.16735 45534	1.17081 66395	1.17439 76829	1.17809 79351	1.18191 76011	1.18585 68306
65	1.18691 27423	1.19052 93436	1.19427 16245	1.19814 00108	1.20213 48892	1.20625 65983
66	1.20651 21023	1.21028 67872	1.21419 41124	1.21823 46940	1.22240 91173	1.22671 79282
67	1.22615 16520	1.23008 79250	1.23416 40369	1.23838 08100	1.24273 90456	1.24723 95158
68	1.24583 03404	1.24993 16346	1.25418 02027	1.25857 70893	1.26312 33294	1.26781 99408
69	1.26554 70476	1.26981 67171	1.27424 13294	1.27882 21680	1.28356 05196	1.28845 76673
70	1.28530 05856	1.28974 18978	1.29434 60524	1.29911 45887	1.30404 90634	1.30915 10446
71	1.30508 96994	1.30970 58273	1.31449 29242	1.31945 28018	1.32458 73054	1.32989 83078
72	1.32491 30685	1.32970 70831	1.33468 04155	1.33983 51668	1.34517 34889	1.35069 75795
73	1.34476 93084	1.34974 41712	1 35490 69173	1.36025 99539	1.36580 57578	1.37154 68716
74	1.36465 69724	1.36981 55279	1.37517 07427	1.38072 53464	1.38648 21588	1.39244 40874
75	1.38457 45536	1.38991 95221	1.39547 01290	1.40122 94429	1.40720 06440	1.41338 70243
76	1.40452 04869	1.41005 44574	1.41580 32408	1.42177 02601	1.42795 90738	1.43437 33771
77	1.42449 31517	1.43021 85751	1.43616 81723	1.44234 57362	1.44875 52203	1.45540 07419
78	1.44449 08745	1.45041 00568	1.45656 29508	1.46295 37342	1.46958 67713	1.47646 66195
79	1.46451 19315	1.47062 70277	1.47698 55403	1.48359 20454	1.49045 13340	1.49756 84205
80	1.48455 45519	1.49086 75599	1.49743 38445	1.50425 83938	1.51134 64399	1.51870 34704
81	1.50461 69208	1.51112 96759	1.51790 57117	1.52495 04406	1.53226 95495	1.53986 90144
82	1.52469 71829	1.53141 13524	1.53839 89384	1.54566 57886	1.55321 80577	1.56106 22239
83	1.54479 34459	1.55171 05245	1.55891 12738	1.56640 19874	1.57418 92992	1.58228 02022
84	1.56490 37841	1.57202 50895	1.57944 04247	1.58715 65386	1.59518 05343	1.60351 99913
85	1.58502 62424	1.59235 29114	1.59998 40602	1.60792 69011	1.61618 90553	1.62477 85789
86	1.60515 88403	1.61269 18254	1.62053 98168	1.62871 04968	1.63721 19928	1.64605 29052
87	1.62529 95757	1.63303 96424	1.64110 53035	1.64950 47169	1.65824 65221	1.66733 98709
88	1.64544 64295	1 65339 41538	1.66167 81074	1.67030 69274	1.67928 97703	1.68863 63444
89	1.66559 73695	1.67375 31365	1.68225 57986	1.69111 44753	1.70033 88429	1.70993 91700
90	1.68575 03548	1.69411 43573	1.70283 59363	1.71192 46952	1.72139 08314	1.73124 51757

φ.	E (35°).	E (36°).	E (37°).	E (38°).	E (39°).	E (4
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000
1	0.01745 30010	0.01745 29864	0.01745 29716	0.01745 29567	0.01745 29416	0.01745
2	0.03490 42533	0.03490 41364	0.03490 40181	0.03490 38986	0.03490 37781	0.03490
3	0.05235 20099	0.05235 16152	0.05235 12160	0.05235 08127	0.05235 04061	0.05234
4	0.06979 45267	0.06979 35914	0.06979 26453	0.06979 16897	0.06979 07258	0.06978
5	0.08723 00648	0.08722 82385	0.08722 63912	0.08722 45252	0.08722 26429	0.08722
6	0.10465 68916	0.10465 37366	0.10465 05455	0.10464 73221	0.10464 40704	0.10464
7	0.12207 32823	0.12206 82743	0.12206 32088	0.12205 80921	0.12205 29302	0.12204
8	0.13947 75220	0.13947 00499	0.13946 24919	0.13945 48572	0.13944 71550	0.13943
9	0.15686 79069	0.15685 72735	0.15684 65174	0.15683 56519	0.15682 46901	0.15681
10	0.17424 27461	0.17422 81682	0.17421 34217	0.17419 85247	0.17418 34953	0.17416
11	0.19160 03630	0.19158 09722	0.19156 13566	0.19154 15401	0.19152 15467	0.19150
12	0.20893 90972	0.20891 39402	0.20888 84909	0.20886 27799	0.20883 68384	0.20881
13	0.22625 73056	0.22622 53452	0.22619 30122	0.22616 03454	0.22612 73845	0.22609
14	0.24355 33646	0.24351 34801	0.24347 31286	0.24343 23590	0.24339 12205	0.24334
15	0.26082 56714	0.26077 66590	0.26072 70705	0.26067 69658	0.26062 64057	0.26057
16	0.27807 26456	0.27801 32194	0.27795 30920	0.27789 23358	0.27783 10244	0.27776
17	0.29529 27305	0.29522 15236	0.29514 94729	0.29507 66651	0.29500 31882	0.29492
18	0.31248 43950	0.31239 99602	0.31231 45204	0.31222 81782	0.31214 10376	0.31205
19	0.32964 61353	0.32954 69461	0.32944 65706	0.32934 51292	0.32924 27438	0.32913
20	0.34677 64762	0.34666 09277	0.34654 39903	0.34642 58040	0.34630 65107	0.34618
21	0.36387 39727	0.36374 03827	0.36360 51786	0.36346 85219	0.36333 05764	0.36319
22	0.38093 72116	0.38078 38219	0.38062 85688	0.38047 16373	0.38031 32153	0.38015
23	0.39796 48130	0.39778 97905	0.39761 26298	0.39743 35416	0.39725 27397	0.39707
24	0.41495 54319	0.41475 68700	0.41455 58681	0.41435 26647	0.41414 75019	0.41394
25	0.43190 77597	0.43168 36796	0.43145 68292	0.43122 74770	0.43099 58957	0.43076
26	0.44882 05258	0.44856 88779	0.44831 40993	0.44805 64909	0.44779 63582	0.44753
27	0.46569 24990	0.46541 11645	0.46512 63072	0.46483 82628	0.46454 73719	0.46425
28	0.48252 24890	0.48220 92813	0.48189 21257	0.48157 13946	0.48124 74664	0.48092
29	0.49930 93480	0.49896 20146	0.49861 02732	0.49825 45354	0.49789 52201	0.49753
30	0.51605 19719	0.51566 81961	0.51527 95155	0.51488 63836	0.51448 92618	0.51408
31	0.53274 93021	0.53232 67047	0.53189 86674	0.53146 56880	0.53102 82730	0.53058
32	0.54940 03268	0.54893 64681	0.54846 65943	0.54799 12499	0.54751 09893	0.54702
33	0.56600 40822	0.56549 64640	0.56498 22136	0.56446 19247	0.56393 62021	0.56340
34	0.58255 96542	0.58200 57219	0.58144 44966	0.58087 66235	0.58030 27606	0.57972
35	0.59906 61797	0.59846 33245	0.59785 24696	0.59723 43149	0.59660 95736	0.59597
36	0.61552 28479	0.61486 84089	0.61420 52160	0.61353 40263	0.61285 56108	0.61217
37	0.63192 89016	0.63122 01682	0.63050 18774	0.62977 48457	0.62903 99049	0.62829
38	0.64828 36385	0.64751 78529	0.64674 16552	0.64595 59235	0.64516 15531	0.64435
39	0.66458 64126	0.66376 07723	0.66292 38120	0.66207 64738	0.66121 97187	0.66035
40	0.68083 66352	0.67994 82958	0.67904 76731	0.67813 57758	0.67721 36331	0.67628
41	0.69703 37762	0.69607 98540	0.69511 26279	0.69413 31756	0.69314 25970	0.69214
42	0.71317 73653	0.71215 49401	0.71111 81311	0.71006 80875	0.70900 59821	0.70793
43	0.72926 69931	0.72817 31112	0.72706 37044	0.72593 99956	0.72480 32328	0.72365
44	0.74530 23122	0.74413 39893	0.74294 89374	0.74174 84549	0.74053 38675	0.73930
45	0.76128 30381	0.76003 72623	0.75877 34888	0.75749 30928	0.75619 74802	0.75488

φ.	F(35°).	F(36°).	F(37°).	F(38°).	F(39°).	F(40°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 35841	0.01745 35986	0.01745 36134	0.01745 36284	0.01745 36434	0.01745 36586
2	0.03490 89170	0.03490 90340	0.03490 91523	0.03490 92718	0.03490 93924	0.03490 95138
3	0.05236 77473	0.05236 81423	0.05236 85417	0.05236 89451	0.05236 93521	0.05236 97622
4	0.06983 18224	0.06983 27587	0.06983 37057	0.06983 46623	0.06983 56274	0.06983 65997
5	0.08730 28877	0.08730 47169	0.08730 65671	0.08730 84362	0.08731 03219	0.08731 22217
6	0.10478 26866	0.10478 58486	0.10478 90471	0.10479 22784	0.10479 55383	0.10479 88231
7	0.12227 29598	0.12227 79828	0.12228 30643	0.12228 81982	0.12229 33779	0.12229 85975
8	0.13977 54443	0.13978 29456	0.13979 05349	0.13979 82028	0.13980 59400	0.13981 37372
9	0.15729 18731	0.15730 25593	0.15731 33717	0.15732 42969	0.15733 53217	0.15734 64329
10	0.17482 39746	0.17483 86420	0.17485 34837	0.17486 84817	0.17488 36177	0.17489 88737
11	0.19237 34718	0.19239 30067	0.19241 27757	0.19243 27547	0.19245 29196	0.19247 32463
12	0.20994 20815	0.20996 74611	0.20999 31473	0.21001 91091	0.21004 53155	0.21007 17349
13	0.22753 15140	0.22756 38065	0.22759 64928	0.22762 95336	0.22766 28895	0.22769 65206
14	0.24514 34719	0.24518 38373	0.24522 47001	0.24526 60112	0.24530 77214	0.24534 97812
15	0.26277 96495	0.26282 93404	0.26287 96502	0.26293 05188	0.26298 18858	0.26303 36903
16	0.28044 17319	0.28050 20939	0.28056 32163	0.28062 50265	0.28068 74514	0.28075 04171
17	0.29813 13941	0.29820 38668	0.29827 72632	0.29835 14970	0.29842 64807	0.29850 21257
18	0.31585 03004	0.31593 64176	0.31602 36463	0.31611 18845	0.31620 10287	0.31629 09740
19	0.33360 01029	0.33370 14937	0.33380 42105	0.33390 81339	0.33401 31425	0.33411 91134
20	0.35138 24407	0.35150 08303	0.35162 07896	0.35174 21798	0.35186 48603	0.35198 86879
21	0.36919 89390	0.36933 61493	0.36947 52048	0.36961 59457	0.36975 82102	0.36990 18328
22	0.38705 12078	0.38720 91581	0.38736 92639	0.38753 13427	0.38769 52092	0.38786 06739
23	0.40494 08405	0.40512 15485	0.40530 47601	0.40549 02683	0.40567 78621	0.40586 73266
24	0.42286 94131	0.42307 49952	0.42328 34704	0.42349 46050	0.42370 81605	0.42392 38942
25	0.44083 84824	0.44107 11548	0.44130 71545	0.44154 62192	0.44178 80810	0.44203 24669
26	0.45884 95848	0.45911 16642	0.45937 75534	0.45964 69597	0.45991 95839	0.46019 51204
27	0.47690 42348	0.47719 81389	0.47749 63876	0.47779 86559	0.47810 46115	0.47841 39141
28	0.49500 39236	0.49533 21716	0.49566 53556	0.49600 31166	0.49634 50868	0.49669 08894
29	0.51315 01172	0.51351 53304	0.51388 61323	0.51426 21277	0.51464 29115	0.51502 80683
30	0.53134 42547	0.53174 91572	0.53216 03669	0.53257 74505	0.53299 99638	0.53342 74510
31	0.54958 77467	0.55003 51658	0.55048 96810	0.55095 08197	0.55141 80968	0.55189 10138
32	0.56788 19735	0.56837 48397	0.56887 56667	0.56938 39414	0.56989 91359	0.57042 07071
33	0.58622 82827	0.58676 96301	0.58731 98845	0.58787 84907	0.58844 48766	0.58901 84529
34	0.60462 79876	0.60522 09539	0.60582 38607	0.60643 61093	0.60705 70821	0.60768 61421
35	0.62308 23648	0 62373 01914	0.62438 90852	0.62505 84030	0.62573 74807	0.62642 56320
36	0.64159 26520	0.64229 86839	0.64301 70090	0.64374 69392	0.64448 77629	0.64523 87431
37	0.66016 00461	0.66092 77310	0.66170 90415	0.66250 32440	0.66330 95783	0.66412 72563
38	0.67878 57001	0.67961 85885	0.68046 65478	0.68132 87990	0.68220 45329	0.68309 29093
39	0.69747 07214	0.69837 24654	0.69929 08460	0.70022 50387	0.70117 41854	0.70213 73935
40	0.71621 61685	0.71719 05213	0.71818 32039	0.71919 33471	0.72022 00441	0.72126 23501
41	0.73502 30489	0.73607 38632	0.73714 48362	0.73823 50544	0.73934 35633	0.74046 93663
42	0.75389 23164	0.75502 35431	0.75617 69009	0.75735 14333	0.75854 61392	0.75975 99714
43	0.77282 48678	0.77404 05545	0.77528 04962	0.77654 36956	0.77782 91064	0.77913 56324
44	0.79182 15407	0.79312 58296	0.79445 66575	0.79581 29885	0.79719 37336	0.79859 77496
45	0.81088 31102	0.81228 02357	0.81370 63529	0.81516 03905	0.81664 12196	0.81814 76522

φ.	E(35°).	E(36°).	E(37°).	E(38°).	E(39°).	E(40°).
45°	0.76188 30381	0.76003 72625	0.75877 34888	0.75749 30928	0.75619 74802	0.75488 8085
46	0.77720 89502	0.77588 26862	0.77453 70878	0.77317 36105	0.77179 37417	0.77039 900
47	0.79307 98928	0.79167 00838	0.79023 95352	0.78878 97840	0.78732 24013	0.78583 899
48	0.80889 57758	0.80739 93480	0.80588 07045	0.80434 14654	0.80278 32877	0.80120 78
49	0.82465 65757	0.82307 04414	0.82146 05426	0.81982 85842	0.81817 63107	0.81650 55
50	0.84036 23361	0.83858 33975	0.83697 90710	0.83525 11480	0.83350 14620	0.83173 188
51	0.85601 31687	0.85423 83213	0.85243 63866	0.85060 92436	0.84875 88164	0.84688 707
52	0.87160 92534	0.86973 53902	0.86783 26525	0.86590 30380	0.86394 85329	0.86197 121
53	0.88715 08392	0.88517 48546	0.88316 81487	0.88113 27793	0.87907 08556	0.87698 453
54	0.90263 82444	0.90055 70380	0.89844 31727	0.89629 87971	0.89412 61146	0.89192 738
55	0.91807 18570	0.91588 23378	0.91365 81399	0.91140 15033	0.90911 47265	0.90680 016
56	0.93345 21350	0.93115 12258	0.92881 35342	0.92644 13927	0.92403 71954	0.92160 339
57	0.94877 96065	0.94636 42477	0.94390 99183	0.94141 90435	0.93889 41131	0.93633 768
58	0.96405 48698	0.96152 20239	0.95894 79336	0.95633 51166	0.95368 61599	0.95100 371
59	0.97927 85932	0.97662 52495	0.97392 83008	0.97119 03579	0.96841 41044	0.96560 229
60	0.99445 15150	0.99167 46936	0.98885 18195	0.98598 55962	0.98307 88039	0.98013 429
61	1.00957 44430	1.00667 11997	1.00371 93680	1.00072 17442	0.99768 12046	0.99460 070
62	1.02464 82543	1.02161 56850	1.01853 19033	1.01539 97980	1.01222 23411	1.00900 258
63	1.03967 38948	1.03650 91399	1.03329 04605	1.03002 08367	1.02670 33361	1.02334 111
64	1.05465 23784	1.05135 26277	1.04799 61520	1.04458 60222	1.04112 54003	1.03761 754
65	1.06958 47865	1.06614 72837	1.06265 01672	1.05909 65980	1.05548 98315	1.05183 321
66	1.08447 22667	1.08089 43140	1.07725 37714	1.07355 38886	1.06979 80137	1.06598 959
67	1.09931 60322	1.09559 49948	1.09180 83047	1.08795 92986	1.08405 14163	1.08008 820
68	1.11411 73603	1.11025 06714	1.10631 51808	1.10231 43114	1.09825 15928	1.09413 066
69	1.12887 75912	1.12486 27563	1.12077 58859	1.11662 04876	1.11240 01794	1.10811 869
70	1.14359 81268	1.13943 27282	1.13519 19769	1.13087 94638	1.12649 88935	1.12205 408
71	1.15828 04288	1.15396 21300	1.14956 50798	1.14509 29507	1.14054 95319	1.13593 872
72	1.17292 60172	1.16845 25674	1.16389 68879	1.15926 27310	1.15455 39686	1.14977 459
73	1.18753 64682	1.18290 57066	1.17818 91597	1.17339 06575	1.16851 41530	1.16356 372
74	1.20211 34124	1.19732 32724	1.19244 37166	1.18747 86508	1.18243 21071	1.17730 824
75	1.21665 85326	1.21170 70460	1.20666 24406	1.20152 86966	1.19630 99231	1.19101 035
76	1.23117 35617	1.22605 88622	1.22084 72719	1.21554 28433	1.21014 97605	1.20467 233
77	1.24566 02801	1.24038 06073	1.23500 02059	1.22952 31988	1.22395 38430	1.21829 653
78	1.26012 05132	1.25467 42165	1.24912 32908	1.24347 19278	1.23772 44554	1.23188 533
79	1.27455 61288	1.26894 16704	1.26321 86241	1.25739 12483	1.25146 39401	1.24544 123
80	1.28896 90343	1.28318 49926	1.27728 83494	1.27128 34284	1.26517 46936	1.25896 675
81	1.30336 11740	1.29740 62466	1.29133 46537	1.28515 07825	1.27885 91624	1.27246 446
82	1.31773 45259	1.31160 75324	1.30535 97634	1.29899 56680	1.29251 98394	1.28593 701
83	1.33209 10987	1.32579 09832	1.31936 59408	1.31282 04811	1.30615 92596	1.29938 707
84	1.34643 29286	1.33995 87620	1.33335 54805	1.32662 76530	1.31977 99957	1.31281 737
85	1.36076 20761	1.35411 30583	1.34733 07058	1.34041 96457	1.33338 46539	1.32623 065
86	1.37508 06226	1.36825 60840	1.36129 39644	1.35419 89480	1.34697 58692	1.33962 971
87	1.38939 06671	1.38239 00703	1.37524 76246	1.36796 80708	1.36055 63010	1.35301 736
88	1.40369 43227	1.39651 72635	1.38919 40715	1.38172 95432	1.37412 86279	1.36639 643
89	1.41799 37132	1.41063 99216	1.40313 57025	1.39548 59077	1.38769 55434	1.37976 977
90	1.43229 09693	1.42476 03101	1.41707 49234	1.40923 97160	1.40125 97508	1.39314 024

φ.	F(35°).	F(36°).	F(37°).	F(38°).	F(39°).	F(40°).
45°	0.81088 31102	0.81228 02357	0.81370 63529	0.81516 03905	0.81664 12196	0.81814 76522
46	0.83001 02860	0.83150 45724	0.83303 04806	0.83458 69078	0.83617 26884	0.83778 65936
47	0.84920 37097	0.85079 95677	0.85242 98645	0.85409 34696	0.85578 91853	0.85751 57459
48	0.86846 39514	0.87016 58752	0.87190 52506	0.87368 09244	0.87549 16719	0.87733 61953
49	0.88779 15066	0.88960 40703	0.89145 73032	0.89335 00356	0.89528 10215	0.89724 89366
50	0.90718 67936	0.90911 46466	0.91108 66010	0.91310 14770	0.91515 80140	0.91725 48681
51	0.92665 01500	0.92869 80130	0.93079 36332	0.93293 58285	0.93512 33312	0.93735 47855
52	0.94618 18298	0.94835 44895	0.95057 87955	0 95285 35715	0.95517 75515	0.95754 93765
53	0.96578 20002	0.96808 43042	0.97044 23859	0.97285 50844	0.97532 11450	0.97783 92153
54	0 98545 07391	0.98788 75897	0.99038 46011	0.99294 06381	0.99555 44682	0.99822 47564
55	1.00518 80316	1.00776 43797	1.01040 55324	1.01311 03917	1.01587 77590	1.01870 63291
56	1.02499 37673	1.02771 46056	1.03050 51617	1.03336 43877	1.03629 11314	1.03928 41311
57	1.04486 77378	1.04773 80933	1.05068 33582	1.05370 25476	1.05679 45705	1.05995 82232
58	1.06480 96339	1.06783 45604	1.07093 98742	1.07412 46681	1.07738 79277	1.08072 85232
59	1.08481 90428	1.08800 36127	1.09127 43417	1.09463 04164	1.09807 09155	1.10159 48004
60	1.10489 54463	1.10824 47416	1.11168 62693	1.11521 93265	1.11884 31027	1.12255 66698
61	1.12503 82185	1.12855 73217	1.13217 50387	1.13589 07952	1.13970 39104	1.14361 35871
62	1.14524 66236	1.14894 06081	1.15273 99019	1.15664 40786	1.16065 26074	1.16476 48434
63	1.16551 98143	1.16939 37342	1.17337 99786	1.17747 82890	1.18168 83062	1.18600 95602
64	1.18585 68306	1.18991 57102	1.19409 42538	1.19839 23918	1.20280 99591	1.20734 66852
65	1.20625 65983	1.21050 54212	1.21488 15756	1.21938 52025	1.22401 63553	1.22877 49881
66	1.22671 79282	1.23116 16260	1.23574 06534	1.24045 53852	1.24530 61178	1.25029 30570
67	1.24723 95158	1.25188 29564	1.25667 00570	1.26160 14504	1.26667 77014	1.27189 92953
68	1.26781 99408	1.27266 79164	1.27766 82156	1.28282 17535	1.28812 93902	1.29359 19190
69	1.28845 76673	1.29351 48824	1.29873 34173	1.30411 44945	1.30965 92967	1.31536 89551
70	1.30915 10446	1.31442 21036	1.31986 38093	1.32547 77174	1.33126 53612	1.33722 82404
71	1.32989 83078	1.33538 77024	1.34105 73985	1.34690 93107	1.35294 53516	1.35916 74208
72	1.35069 75795	1.35640 96762	1.36231 20524	1.36840 70083	1.37469 68644	1.38118 39517
73	1.37154 68716	1.37748 58990	1.38362 55014	1.38996 83912	1.39651 73256	1.40327 50993
74	1.39244 40874	1.39861 41235	1 40499 53407	1.41159 08898	1.41840 39937	1.42543 79426
75	1.41338 70243	1.41979 19843	1.42641 90333	1.43327 17867	1.44035 39620	1.44766 93765
76	1.43437 33771	1.44101 70010	1.44789 39137	1.45500 82208	1.46236 41628	1.46996 61156
77	1.45540 07419	1.46228 65823	1.46941 71921	1.47679 71917	1.48443 13723	1.49232 46993
78	1.47646 66195	1.48359 80305	1.49098 59590	1.49863 55643	1.50655 22156	1.51474 14977
79	1.49756 84205	1.50494 85463	1.51259 71906	1.52052 00754	1.52872 31737	1.53721 27184
80	1.51870 34704	1.52633 52342	1.53424 77551	1.54244 73401	1.55094 05904	1.55973 44145
81	1.53986 90144	1.54775 51087	1.55593 44192	1.56441 38588	1.57320 06803	1.58230 24934
82	1.56106 22239	1.56920 51006	1.57765 38552	1.58641 60255	1.59549 95377	1.60491 27268
83	1.58228 02032	1.59068 20641	1.59940 26488	1.60845 01365	1.61783 31464	1.62756 07612
84	1.60351 99913	1.61218 27842	1.62117 73073	1.63051 23994	1.64019 73900	1.65024 21295
85	1.62477 85780	1.63370 39841	1.64297 42685	1.65259 89428	1.66258 80628	1.67295 22634
86	1.64605 29052	1.65524 23337	1.66478 99095	1.67470 58270	1.68500 08810	1.69568 65064
87	1.66733 98709	1.67679 44579	1.68662 05564	1.69682 90542	1.70743 14957	1.71844 01276
88	1.68863 63444	1.69835 69452	1.70846 24942	1.71896 45798	1.72987 55047	1.74120 83357
89	1.70993 91700	1.71992 63565	1.73031 19766	1.74110 83242	1.75232 84655	1.76398 62939
90°	1.73124 51757	1.74149 92344	1.75216 52365	1.76325 61841	1.77478 59091	1.78676 91349

φ.	E(40°).	E(41°).	E(42°).	E(43°).	E(44°).	E(45
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000
1	0.01745 29264	0.01745 29112	0.01745 28958	0.01745 28804	0.01745 28649	0.01745
2	0.03490 36563	0.03490 35344	0.03490 34115	0.03490 32884	0.03490 31649	0.03490
3	0.05234 99958	0.05234 95838	0.05234 91694	0.05234 87536	0.05234 83368	0.05234
4	0.06978 97542	0.06978 87773	0.06978 77952	0.06978 68097	0.06978 58216	0.06978
5	0.08722 07462	0.08721 88383	0.08721 69205	0.08721 49959	0.08721 30663	0.08721
6	0.10464 07940	0.10463 74977	0.10463 41847	0.10463 08595	0.10462 75259	0.10462
7	0.12204 77291	0.12204 24961	0.12203 72367	0.12203 19576	0.12202 66652	0.12202
8	0.13943 93941	0.13943 15854	0.13942 37370	0.13941 58590	0.13940 79611	0.13940
9	0.15681 36447	0.15680 25305	0.15679 13597	0.15678 01466	0.15676 89046	0.15675
10	0.17416 83511	0.17415 31116	0.17413 77944	0.17412 24186	0.17410 70027	0.17409
11	0.19150 14002	0.19148 11260	0.19146 07480	0.19144 02910	0.19141 97802	0.19139
12	0.20881 06976	0.20878 43899	0.20875 79465	0.20873 13997	0.20870 47821	0.20867
13	0.22609 41691	0.22606 07401	0.22602 71375	0.22599 34022	0.22595 95755	0.22592
14	0.24334 97628	0.24330 80365	0.24326 60919	0.24322 39796	0.24318 17516	0.24313
15	0.26057 54508	0.26052 41635	0.26047 26054	0.26042 08389	0.26036 89277	0.26031
16	0.27776 92313	0.27770 70319	0.27764 45012	0.27758 17146	0.27751 87492	0.27745
17	0.29492 91302	0.29485 45813	0.29477 96315	0.29470 43709	0.29462 88920	0.29455
18	0.31205 32032	0.31196 47816	0.31187 58795	0.31178 66039	0.31169 70640	0.31160
19	0.32913 95375	0.32903 56349	0.32893 11615	0.32882 62432	0.32872 10078	0.32861
20	0.34618 62537	0.34606 51777	0.34594 34291	0.34582 11543	0.34569 85022	0.34557
21	0.36319 15076	0.36305 14826	0.36291 06705	0.36276 92406	0.36262 73647	0.36248
22	0.38015 34924	0.37999 26605	0.37983 09132	0 37966 84451	0.37950 54533	0.37934
23	0.39707 04404	0.39688 68622	0.39670 22258	0.39651 67531	0.39633 06689	0.39614
24	0.41394 06246	0.41373 22805	0.41352 27197	0.41331 21936	0.41310 09573	0 41288
25	0.43076 23610	0.43052 71523	0.43029 05513	0.43005 28417	0.42981 43112	0.42957
26	0.44753 40103	0.44726 97603	0.44700 39244	0.44673 68208	0.44646 87724	0.44620
27	0.46425 39796	0.46395 84351	0.46376 10915	0.46336 23044	0.46306 24342	0.46276
28	0.48092 07245	0.48059 15570	0.48026 03563	0.47992 75181	0.47959 34432	0.47925
29	0.49753 27510	0.49716 75581	0.49680 00757	0.49643 07422	0.49606 00016	0.49568
30	0.51408 86174	0.51368 49243	0.51327 86617	0.51287 03134	0.51246 03695	0.51204
31	0.53058 69358	0.53014 21969	0.52969 45834	0.52924 46271	0.52879 28670	0.52833
32	0.54702 63743	0.54653 79751	0.54604 63690	0.54555 21392	0.54505 58763	0.54455
33	0.56340 56588	0.56287 09174	0.56233 26082	0.56179 13685	0.56124 78438	0.56070
34	0.57972 35748	0.57913 97438	0.57855 19538	0.57796 08991	0.57736 72830	0.57677
35	0.59597 89694	0.59534 32377	0.59470 31238	0.59405 93818	0.59341 27759	0.59276
36	0.61217 07527	0.61148 02479	0.61078 49035	0.61008 55367	0 60938 29754	0.60867
37	0.62829 79000	0.62754 96904	0.62679 61478	0.62603 81553	0.62527 66079	0.62451
38	0.64435 94534	0.64355 05502	0.64273 57825	0.64191 61024	0.64109 24752	0.64026
39	0.66035 45237	0.65948 18833	0.65860 28069	0.65771 83186	0.65682 94567	0.65593
40	0.67628 22920	0.67534 28186	0.67439 62955	0.67344 38218	0.67248 65119	0 67152
41	0.69214 20116	0.69113 25598	0.69011 54003	0.68909 17098	0.68806 26822	0.68702
42	0.70793 30096	0.70685 03870	0.70575 93522	0.70466 11622	0.70355 70934	0.70244
43	0.72365 46884	0.72249 56587	0.72132 74633	0.72015 14424	0.71896 89579	0.71778
44	0.73930 65276	0.73806 78134	0.73681 91285	0.73556 18996	0.73429 75766	0.73302
45	0.75488 80854	0.75356 63713	0.75223 38278	0.75089 19708	0.74954 23413	0.74818

φ.	F(40°).	F(41°).	F(42°).	F(43°).	F(44°).	F(45°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 36586	0.01745 36740	0.01745 36893	0.01745 37046	0.01745 37201	0.01745 37356
2	0.03490 95138	0.03490 96361	0.03490 97590	0.03490 98822	0.03491 00058	0.03491 01295
3	0.05236 97622	0.05237 01748	0.05237 05895	0.05237 10057	0.05237 14229	0.05237 18407
4	0.06983 65997	0.06983 75781	0.06983 85615	0.06983 95484	0.06984 05379	0.06984 15286
5	0.08731 22217	0.08731 41336	0.08731 60553	0.08731 79840	0.08731 99177	0.08732 18541
6	0.10479 88231	0.10480 21289	0.10480 54515	0.10480 87867	0.10481 21308	0.10481 54795
7	0.12229 85975	0.12230 38506	0.12230 91308	0.12231 44315	0.12231 97464	0.12232 50691
8	0.13981 37372	0.13982 15848	0.13982 94736	0.13983 73936	0.13984 53355	0.13985 32895
9	0.15734 64329	0.15735 76170	0.15736 88605	0.15738 01494	0.15739 14705	0.15740 28098
10	0.17489 88737	0.17491 42312	0.17492 96715	0.17494 51759	0.17496 07257	0.17497 63019
11	0.19247 32463	0.19249 37102	0.19251 42867	0.19253 49506	0.19255 56771	0.19257 64410
12	0.21007 17349	0.21009 83355	0.21012 50854	0.21015 19520	0.21017 89029	0.21020 59054
13	0.22769 65206	0.22773 03864	0.22776 44463	0.22779 86588	0.22783 29830	0.22786 73769
14	0.24534 97812	0.24539 21399	0.24543 47468	0.24547 75503	0.24552 04991	0.24556 35409
15	0.26303 36903	0.26308 58704	0.26313 83632	0.26319 11059	0.26324 40350	0.26329 70862
16	0.28075 04171	0.28081 38489	0.28087 76701	0.28094 18049	0.28100 61760	0.28107 07053
17	0.29850 21257	0.29857 83426	0.29865 50397	0.29873 21259	0.29880 95087	0.29888 70942
18	0.31629 09740	0.31638 16145	0.31647 28415	0.31656 45469	0.31665 66209	0.31674 89520
19	0.33411 91134	0.33422 59223	0.33433 34416	0.33444 15443	0.33455 01011	0.33465 89808
20	0.35198 86879	0.35211 35180	0.35223 92022	0.35236 55925	0.35249 25378	0.35261 98854
21	0.36990 18328	0.37004 66467	0.37019 24804	0.37033 91630	0.37048 65193	0.37063 43728
22	0.38786 06739	0.38802 75456	0.38819 56278	0.38836 47239	0.38853 46328	0.38870 51515
23	0.40586 73266	0.40605 84433	0.40625 09890	0.40644 47388	0.40663 94635	0.40683 49309
24	0.42392 38942	0.42414 15585	0.42436 09008	0.42458 16659	0.42480 35938	0.42502 64205
25	0.44203 24669	0.44227 90984	0.44252 76909	0.44277 79566	0.44302 96020	0.44328 23288
26	0.46019 51204	0.46047 32575	0.46075 36766	0.46103 60544	0.46132 00614	0.46160 53624
27	0.47841 39141	0.47872 62163	0.47904 11631	0.47935 83933	0.47967 75389	0.47999 82246
28	0.49669 08894	0.49704 01392	0.49739 24420	0.49774 73963	0.49810 45929	0.49846 36137
29	0.51502 80683	0.51541 71728	0.51580 97893	0.51620 54736	0.51660 37723	0.51700 42218
30	0.53342 74510	0.53385 94441	0.53429 54639	0.53473 50207	0.53517 76144	0.53562 27328
31	0.55189 10138	0.55236 90582	0.55285 17049	0.55333 84163	0.55382 86424	0.55432 18202
32	0.57042 07071	0.57094 80961	0.57148 07296	0.57201 80196	0.57255 93637	0.57310 41448
33	0.58901 84529	0.58959 86122	0.59018 47310	0.59077 61682	0.59137 22669	0.59197 23527
34	0.60768 61421	0.60832 26317	0.60896 58748	0.60961 51754	0.61026 98191	0.61092 90719
35	0.62642 56320	0.62712 21475	0.62782 62967	0.62853 73267	0.62925 44630	0.62997 69094
36	0.64523 87431	0.64599 91175	0.64676 80994	0.64754 48770	0.64832 86138	0.64911 84485
37	0.66412 72563	0.66495 54612	0.66579 33491	0.66664 00473	0.66749 46552	0.66835 62441
38	0.68309 29093	0.68399 30566	0.68490 40719	0.68582 50204	0.68675 49358	0.68769 28198
39	0.70213 73935	0.70311 37359	0.70410 22499	0.70510 19375	0.70611 17651	0.70713 06632
40	0.72126 23501	0.72231 92821	0.72338 98172	0.72447 28936	0.72556 74090	0.72667 22211
41	0.74046 93663	0.74161 14248	0.74276 86558	0.74393 99329	0.74512 40848	0.74631 98949
42	0.75975 99714	0.76099 18360	0.76224 05906	0.76350 50443	0.76478 39564	0.76607 60353
43	0.77913 56324	0.78046 21255	0.78180 73849	0.78317 01559	0.78454 91285	0.78594 29363
44	0.79859 77496	0.80002 38361	0.80147 07353	0.80293 71299	0.80442 16415	0.80592 28292
45	0.81814 76522	0.81967 84387	0.82123 22662	0.82280 77566	0.82440 34647	0.82601 78762

φ.	E(40°).	E(41°).	E(42°).	E(43°).	E(44°).	E(45°).
45°	0.75488 80854	0.75356 63713	0.75223 38278	0.75089 19708	0.74954 23413	0.74818 65042
46	0.77039 90003	0.76899 09360	0.76757 11278	0.76614 11830	0.76470 27368	0.76325 74600
47	0.78583 89925	0.78434 11964	0.78283 06834	0.78130 91549	0.77977 83426	0.77824 00066
48	0.80120 78652	0.79961 69278	0.79801 22397	0.79639 55987	0.79476 88357	0.79313 38125
49	0.81650 55063	0.81481 79939	0.81311 56337	0.81140 03221	0 80967 39918	0.80793 86088
50	0.83173 18893	0.82994 43479	0.82814 07957	0.82632 32302	0.82449 36876	0.82265 42413
51	0.84688 70749	0.84499 60340	0.84308 77510	0.84116 43266	0.83922 79029	0.83728 06627
52	0.86197 12121	0.85997 31887	0.85795 66215	0.85592 37159	0.85387 67222	0.85181 79345
53	0.87698 45390	0.87487 60420	0.87274 76267	0.87060 16047	0.86844 03363	0.86626 62289
54	0.89192 73840	0.88970 49187	0.88746 10853	0.88519 83031	0.88291 90440	0.88062 58307
55	0.90680 01667	0.90446 02392	0.90209 74163	0.89971 42262	0.89731 32541	0.89489 71391
56	0.92160 33986	0.91914 25205	0.91665 71399	0.91414 98954	0.91162 34860	0.90908 06694
57	0.93633 76839	0.93375 23771	0.93114 08789	0.92850 59392	0.92585 03720	0.92317 70544
58	0.95100 37197	0.94829 05215	0.94554 93592	0.94278 30947	0.93999 46577	0.93718 70459
59	0.96560 22968	0.96275 77648	0.95988 34104	0.95698 22079	0.95405 72036	0.95111 15159
60	0.98013 42996	0.97715 50171	0.97414 39666	0.97110 42350	0.96803 89855	0.96495 14576
61	0.99460 07065	0.99148 32876	0.98833 20665	0.98515 02425	0.98194 10956	0.97870 79867
62	1.00900 25896	1.00574 36850	1.00244 88538	0.99912 14076	0.99576 47427	0.99238 23416
63	1.02334 11147	1.01993 74172	1.01649 55774	1.01301 90185	1.00951 12529	1.00597 58844
64	1.03761 75408	1.03406 57908	1.03047 35905	1.02684 44742	1.02318 20696	1.01949 01007
65	1.05183 32196	1.04813 02109	1.04438 43512	1.04059 92845	1.03677 87531	1.03292 66001
66	1.06598 95947	1.06213 21804	1.05822 94210	1.05428 50691	1 05030 29803	1.04628 71158
67	1.08008 82005	1.07607 32988	1.07201 04644	1.06790 35571	1.06375 65444	1.05957 35040
68	1.09413 06611	1.08995 52613	1.08572 92478	1.08145 65860	1.07714 13538	1.07278 77431
69	1.10811 86991	1.10377 98574	1.09938 76380	1.09494 61004	1.09045 94305	1.08593 19330
70	1.12205 40838	1.11754 89692	1.11298 76010	1.10837 41504	1.10371 29093	1.09900 82930
71	1.13593 87295	1.13126 45697	1.12653 11995	1.12174 28896	1.11690 40355	1.11201 91606
72	1.14977 45933	1.14492 87208	1.14002 05915	1.13505 45733	1.13003 51629	1.12496 69891
73	1.16356 37230	1.15854 35706	1.15345 80273	1.14831 15558	1.14310 87512	1.13785 83451
74	1.17730 82445	1.17211 13511	1.16684 58472	1.16151 62877	1.15612 73634	1.15068 39057
75	1.19101 03589	1.18563 43751	1.18018 64783	1.17467 13128	1.16909 36623	1.16345 84553
76	1.20467 23399	1.19911 50334	1.19348 24314	1.18777 92647	1.18201 04074	1.17618 08817
77	1.21829 65304	1.21255 57913	1.20673 62972	1.20084 28631	1.19488 04506	1.18885 41722
78	1.23188 53389	1.22595 91847	1.21995 07429	1.21386 49100	1.20770 67322	1.20148 14094
79	1.24544 12361	1.23932 78165	1.23312 85077	1.22684 82850	1.22049 22763	1.21406 57659
80	1.25896 67510	1.25266 43526	1.24627 23987	1.23979 59408	1.23324 01858	1.22661 04994
81	1.27246 44669	1.26597 15174	1.25938 52860	1.25271 08983	1.24595 36371	1.23911 89471
82	1.28593 70168	1.27925 20893	1.27247 00983	1.26559 62413	1.25863 58749	1.25159 45196
83	1.29938 70794	1.29250 88958	1.28552 98173	1.27845 51113	1.27129 02058	1.26404 06949
84	1.31281 73744	1.30574 48085	1.29856 74725	1.29129 07014	1.28391 99925	1.27646 10113
85	1.32623 06575	1.31896 27384	1.31158 61359	1.30410 62505	1.29652 86474	1.28885 90611
86	1.33962 97157	1.33216 56304	1.32458 89160	1.31690 50374	1.30911 96258	1.30123 84832
87	1.35301 73620	1.34535 64576	1.33757 89521	1.32969 03740	1.32169 64192	1.31360 29556
88	1.36639 64310	1.35853 82160	1.35055 94085	1.34246 55993	1.33426 25481	1.32595 61877
89	1.37976 97728	1.37171 39190	1.36353 34680	1.35523 40724	1.34682 15550	1.33830 19131
90	1.39314 02485	1.38488 65914	1.37650 43258	1.36799 91659	1.35937 69973	1.35064 38810

φ.	F(40°).	F(41°).	F(42°).	F(43°).	F(44°).	F(45°).
45°	0.81814 76522	0.81967 84387	0.82123 22662	0.82280 77566	0.82440 34647	0.82601 78762
46	0.83778 65936	0.83942 73270	0.84109 35240	0.84278 37483	0.84449 64901	0.84623 01637
47	0.85751 57459	0.85927 18123	0.86105 59717	0.86286 67332	0.86470 25255	0.86656 16942
48	0.87733 61953	0.87921 31177	0.88112 09825	0.88305 82486	0.88502 32874	0.88701 43795
49	0.89724 89366	0 89925 23722	0.90128 98334	0.90335 97340	0.90546 03934	0.90759 00317
50	0.91725 48681	0.91939 06051	0.92156 36986	0.92377 25238	0.92601 53540	0.92829 03551
51	0.93735 47855	0.93962 87394	0.94194 36426	0.94429 78395	0.94668 95647	0.94911 69371
52	0.95754 93765	0.95996 75857	0.96243 06136	0.96493 67826	0.96748 42973	0.97007 12384
53	0.97783 92153	0.98040 78357	0 98302 54357	0.98569 03259	0.98840 06910	0.99115 45837
54	0.99822 47564	1.00095 00557	1.00372 88020	1.00655 93055	1.00943 97433	1.01236 81514
55	1.01870 63291	1.02159 46798	1.02454 12666	1.02754 44125	1.03060 23003	1.03371 29627
56	1.03928 41311	1.04234 20034	1.04546 32376	1.04864 61845	1.05188 90473	1.05518 98714
57	1.05995 82232	1.06319 21763	1.06649 49692	1.06986 49964	1.07330 04991	1.07679 95523
58	1.08072 85232	1.08414 51964	1.08763 65538	1.09120 10523	1.09483 69897	1.09854 24902
59	1.10159 48004	1.10520 09025	1.10888 79147	1.11265 43764	1.11649 86626	1.12041 89687
60	1.12255 66698	1.12635 89684	1.13024 87986	1.13422 48042	1.13828 54605	1.14242 90580
61	1.14361 35871	1.14761 88964	1.15171 87680	1.15591 19742	1.16019 71157	1.16457 26044
62	1 16476 48434	1.16898 00110	1.17329 71944	1.17771 53195	1.18223 31400	1.18684 92181
63	1.18600 95602	1.19044 14537	1.19498 32508	1.19963 40594	1.20439 28153	1.20925 82624
64	1.20734 66852	1.21200 21768	1.21677 59059	1.22166 71918	1.22667 51843	1.23179 88426
65	1.22877 49881	1.23366 09390	1 23867 39176	1.24381 34860	1.24907 90417	1.25446 97959
66	1.25029 30570	1.25541 63008	1.26067 58275	1.26607 14755	1.27160 29261	1.27726 96809
67	1.27189 92953	1.27726 66203	1.28277 99560	1.28843 94522	1.29424 51121	1.30019 67688
68	1.29359 19190	1.29921 00501	1.30498 43979	1.31091 54608	1.31700 36037	1.32324 90347
69	1.31536 89551	1.32124 45344	1.32728 70188	1.33349 72940	1.33987 61283	1.34642 41503
70	1.33722 82404	1.34336 78073	1.34968 54528	1.35618 24891	1.36286 01317	1.36971 94771
71	1.35916 74208	1.36557 73920	1.37217 71002	1.37896 83252	1.38595 27745	1.39313 20618
72	1.38118 39517	1.38787 06002	1.39475 91271	1.40185 18217	1.40915 09295	1.41665 86322
73	1.40327 50993	1.41024 45332	1.41742 84657	1.42482 97380	1.43245 11806	1.44029 55950
74	1.42543 79426	1.43269 60839	1.44018 18157	1.44789 85744	1.45584 98231	1.46403 90356
75	1.44766 93765	1.45522 19392	1.46301 56471	1.47105 45746	1.47934 28656	1.48788 47191
76	1.46996 61156	1.47781 85846	1.48592 62041	1.49429 37298	1.50292 60338	1.51182 80938
77	1.49232 46993	1.50048 23089	1.50890 95106	1.51761 17838	1.52659 47759	1.53586 42963
78	1.51474 14977	1.52320 92106	1.53196 13766	1.54100 42399	1.55034 42697	1.55998 81589
79	1.53721 27184	1.54599 52056	1.55507 74063	1.56446 63696	1.57416 94317	1.58419 42192
80	1.55973 44145	1 56883 60356	1 57825 30075	1.58799 32228	1.58906 49280	1.60847 67320
81	1.58230 24934	1.59172 72778	1.60148 34021	1.61157 96394	1.62202 51872	1.63282 96831
82	1.60491 27268	1.61466 43557	1.62476 36385	1.63522 02627	1.64604 44150	1.65724 68052
83	1.62756 07612	1.63764 25514	1.64808 86046	1.65890 95540	1.67011 66106	1.68172 15969
84	1.65024 21295	1.66065 70183	1.67145 30423	1.68264 18087	1.69423 55850	1.70624 73420
85	1.67295 22634	1.68370 27947	1.69485 15631	1.70641 11742	1.71839 49805	1.73081 71326
86	1.69568 65064	1.70677 48191	1.71827 86648	1.73021 16686	1.74258 82919	1.75542 38925
87	1.71844 01276	1.72986 79452	1.74172 87488	1.75403 72002	1.76680 88891	1 78006 04026
88	1.74120 83357	1.75297 69583	1.76519 61386	1.77788 15884	1.79105 00405	1.80471 93284
89	1.76398 62939	1.77609 65917	1.78867 50986	1.80173 85854	1.81530 49378	1.82939 32472
90	1.78676 91349	1.79922 15440	1.81215 98537	1.82560 18981	1.83956 67211	1.85407 46773

φ.	E(45°).	E(46°).	E(47°).	E(48°).	E(49°).	E(50°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 000
1	0.01745 2849	0.01745 2834	0.01745 2819	0.01745 2803	0.01745 2788	0.01745 277
2	0.03490 3041	0.03490 2918	0.03490 2794	0.03490 2671	0.03490 2548	0.03490 242
3	0.05234 7919	0.05234 7502	0.05234 7085	0.05234 6669	0.05234 6255	0.05234 584
4	0.06978 4832	0.06978 3843	0.06978 2855	0.06978 1869	0.06978 0887	0.06977 990
5	0.08721 1134	0.08720 9202	0.08720 7272	0.08720 5347	0.08720 3429	0.08720 152
6	0.10462 4188	0.10462 0850	0.10461 7515	0.10461 4189	0.10461 0875	0.10460 757
7	0.12202 1366	0.12201 6066	0.12201 0772	0.12200 5491	0.12200 0229	0.12199 499
8	0.13940 0053	0.13939 2143	0.13938 4243	0.13937 6361	0.13936 8507	0.13936 069
9	0.15675 7647	0.15674 6388	0.15673 5142	0.15672 3922	0.15671 2741	0.15670 161
10	0.17409 1565	0.17407 6125	0.17406 0702	0.17404 5314	0.17402 9980	0.17401 471
11	0.19139 9240	0.19137 8696	0.19135 8173	0.19133 7697	0.19131 7291	0.19129 698
12	0.20867 8126	0.20865 1463	0.20862 4827	0.20859 8250	0.20857 1764	0.20854 540
13	0.22592 5698	0.22589 1812	0.22585 7957	0.22582 4177	0.22579 0511	0.22575 700
14	0.24313 9459	0.24309 7152	0.24305 4884	0.24301 2706	0.24297 0669	0.24292 882
15	0.26031 6934	0.26026 4922	0.26021 2954	0.26016 1095	0.26010 9406	0.26005 795
16	0.27745 5681	0.27739 2587	0.27732 9543	0.27726 6629	0.27720 3917	0.27714 148
17	0.29455 3286	0.29447 7645	0.29440 2060	0.29432 6625	0.29425 1430	0.29417 657
18	0.31160 7368	0.31151 7626	0.31142 7945	0.31133 8437	0.31124 9209	0.31116 037
19	0.32861 5583	0.32851 0097	0.32840 4677	0.32829 9454	0 32819 4554	0.32809 010
20	0.34557 5621	0.34545 2661	0.34532 9771	0.34520 7102	0.34508 4802	0.34496 302
21	0.36248 5215	0.36234 2963	0.36220 0783	0.36205 8850	0.36191 7334	0.36177 641
22	0.37934 2135	0.37917 8689	0.37901 5313	0.37885 2209	0.37868 9573	0.37852 760
23	0.39614 4198	0.39595 7568	0.39577 1004	0.39558 4736	0.39539 8989	0.39521 399
24	0.41288 9266	0.41267 7377	0.41246 5547	0.41225 4036	0.41204 3101	0.41183 300
25	0.42957 5248	0.42933 5941	0.42909 6682	0.42885 7764	0.42861 9477	0.42838 211
26	0.44620 0102	0.44593 1136	0.44566 2201	0.44539 3626	0.44512 5738	0.44485 886
27	0.46276 1842	0.46246 0893	0.46215 9951	0.46185 9386	0.46155 9562	0.46126 085
28	0.47925 8534	0.47892 3195	0.47858 7834	0.47825 2862	0.47791 8685	0.47758 571
29	0.49568 8300	0.49531 6086	0.49494 3812	0.49457 1933	0.49420 0902	0.49383 117
30	0.51204 9322	0.51163 7669	0.51122 5907	0.51081 4541	0 51040 4072	0.50999 500
31	0.52833 9845	0.52788 6108	0.52743 2205	0.52697 8691	0.52652 6119	0.52607 504
32	0.54455 8175	0.54405 9635	0.54356 0859	0.54306 2457	0.54256 5037	0.54206 921
33	0.56070 2684	0.56015 6547	0.55961 0090	0.55906 3981	0·55851 8888	0.55797 547
34	0.57677 1815	0.57617 5210	0.57557 8188	0.57498 1478	0.57438 5808	0.57379 190
35	0.59276 4077	0.59211 4064	0.59146 3520	0.59081 3238	0.59016 4010	0.58951 663
36	0.60867 8056	0.60797 1623	0.60726 4526	0.60655 7627	0.60585 1786	0.60514 787
37	0.62451 2410	0.62374 6476	0.62297 9726	0.62221 3092	0.62144 7508	0.62068 391
38	0.64026 5877	0.63943 7294	0.63860 7720	0.63777 8164	0.63694 9633	0.63612 314
39	0.65593 7272	0.65504 2827	0.65414 7193	0.65325 1456	0.65235 6704	0.65146 403
40	0.67152 5494	0.67056 1911	0.66959 6914	0.66863 1672	0.66766 7356	0.66670 514
41	0.68702 9527	0.68599 3469	0.68495 5744	0.68391 7606	0.68288 0314	0.68184 513
42	0.70244 8440	0.70133 6511	0.70022 2632	0.69910 8145	0.69799 4400	0.69688 276
43	0.71778 1391	0.71659 0141	0.71539 6623	0.71420 2273	0.71300 8534	0.71181 686
44	0.73302 7631	0.73175 3555	0,73047 6858	0.72919 9071	0.72792 1737	0.72664 641
45	0.74818 6504	0.74682 6047	0.74546 2577	0.74409 7725	0.74273 3136	0.74137 047

φ.	F(45°).	F(46°).	F(47°).	F(48°).	F(49°).	F(50°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3736	0.01745 3751	0.01745 3767	0.01745 3782	0.01745 3797	0.01745 3812
2	0.03491 0130	0.03491 0253	0.03491 0377	0.03491 0500	0.03491 0623	0.03491 0745
3	0.05237 1841	0.05237 2258	0.05237 2676	0.05237 3092	0.05237 3507	0.05237 3919
4	0.06984 1529	0.06984 2519	0.06984 3509	0.06984 4496	0.06984 5480	0.06984 6459
5	0.08732 1854	0.08732 3790	0.08732 5725	0.08732 7654	0.08732 9578	0.08733 1492
6	0.10481 5479	0.10481 8828	0.10482 2175	0.10482 5512	0.10482 8839	0.10483 2150
7	0.12232 5069	0.12233 0392	0.12233 5712	0.12234 1018	0.12234 6307	0.12235 1571
8	0.13985 3290	0.13986 1245	0.13986 9195	0.13987 7127	0.13988 5033	0.13989 2902
9	0.15740 2810	0.15741 4153	0.15742 5488	0.15743 6798	0.15744 8073	0.15745 9296
10	0.17497 6302	0.17499 1885	0.17500 7458	0.17502 2999	0.17503 8492	0.17505 3916
11	0.19257 6441	0.19259 7216	0.19261 7980	0.19263 8703	0.19265 9364	0.19267 9935
12	0.21020 5905	0.21023 2926	0.21025 9934	0.21028 6893	0.21031 3774	0.21034 0540
13	0.22786 7377	0.22790 1798	0.22793 6207	0.22797 0559	0.22800 4815	0.22803 8928
14	0.24556 3541	0.24560 6622	0.24564 9694	0.24569 2700	0.24573 5591	0.24577 8310
15	0.26329 7086	0.26335 0194	0.26340 3297	0.26345 6327	0.26350 9221	0.26356 1913
16	0.28107 0705	0.28113 5314	0.28119 9926	0.28126 4458	0.28132 8836	0.28139 2977
17	0.29888 7094	0.29896 4788	0.29904 2498	0.29912 0125	0.29919 7578	0.29927 4759
18	0.31674 8952	0.31684 1428	0.31693 3939	0.31702 6367	0.31711 8605	0.31721 0534
19	0.33465 8981	0.33476 8051	0.33487 7182	0.33498 6238	0.33509 5087	0.33520 3592
20	0.35261 9885	0.35274 7481	0.35287 5172	0.35300 2800	0.35313 0210	0.35325 7243
21	0.37063 4373	0.37078 2545	0.37093 0857	0.37107 9127	0.37122 7175	0.37137 4814
22	0.38870 5151	0.38887 6075	0.38904 7196	0.38921 8306	0.38938 9196	0.38955 9651
23	0.40683 4931	0.40703 0907	0.40722 7153	0.40742 3432	0.40761 9503	0.40781 5120
24	0.42502 6420	0.42524 9880	0.42547 3701	0.42569 7613	0.42592 1340	0.42614 4604
25	0.44328 2329	0.44353 5836	0.44378 9817	0.44404 3965	0.44429 7966	0.44455 1506
26	0.46160 5362	0.46189 1619	0.46217 8485	0.46246 5614	0.46275 2654	0.46303 9247
27	0.47999 8225	0.48032 0071	0.48064 2691	0.48096 5696	0.48128 8688	0.48161 1267
28	0.49846 3614	0.49882 4036	0.49918 5427	0.49954 7352	0.49990 9367	0.50027 1022
29	0.51700 4222	0.51740 6352	0.51780 9683	0.51821 3730	0.51861 7999	0.51902 1987
30	0.53562 2733	0.53606 9856	0.53651 8452	0.53696 7984	0.53741 7903	0.53786 7650
31	0.55432 1820	0.55481 7376	0.55531 4724	0.55581 3270	0.55631 2406	0.55681 1515
32	0.57310 4145	0.57365 1733	0.57420 1484	0.57475 2744	0.57530 4842	0.57585 7098
33	0.59197 2353	0.59257 5737	0.59318 1712	0.59378 9562	0.59439 8550	0.59500 7926
34	0.61092 9072	0.61159 2183	0.61225 8378	0.61292 6876	0.61359 6869	0.61426 7535
35	0.62997 6909	0.63070 3850	0.63143 4441	0.63216 7832	0.63290 3139	0.63363 9465
36	0.64911 8448	0.64991 3497	0.65071 2844	0.65151 5564	0.65232 0696	0.65312 7261
37	0.66835 6244	0.66922 3859	0.67009 6510	0.67097 3194	0.67185 2868	0.67273 4467
38	0.68769 2820	0.68863 7644	0.68958 8341	0.69054 3826	0.69150 2971	0.69246 4622
39	0.70713 0663	0.70815 7527	0.70919 1211	0.71023 0543	0.71127 4308	0.71232 1258
40	0.72667 2221	0.72778 6146	0.72890 7960	0.73003 6400	0.73117 0159	0.73230 7891
41	0.74631 9895	0.74752 6100	0.74874 1393	0.74996 4419	0.75119 3778	0.75242 8021
42	0.76607 6035	0.76737 9938	0.76869 4271	0.77001 7587	0.77134 8389	0.77268 5122
43	0.78594 2936	0.78735 0155	0.78876 9305	0.79019 8844	0.79163 7175	0.79308 2636
44	0.80592 2829	0.80743 9188	0.80896 9150	0.81051 1079	0.81206 3275	0.81362 3967
45	0.82601 7876	0.82764 9406	0.82929 6399	0.83095 7123	0.83262 9775	0.83431 2473

φ.	E(45°).	E(46°).	E(47°).	E(48°).	E(49°).	E(50°).
45°	0.74818 6504	0.74682 6047	0.74546 2577	0.74409 7725	0.74273 3136	0.74137 04
46	0.76325 7450	0.76180 7009	0.76035 3122	0.75889 7523	0.75744 1962	0.75598 82
47	0.77824 0007	0.77669 5935	0.77514 7939	0.77359 7861	0.77204 7559	0.77049 89
48	0.79313 3812	0.79149 2422	0.78984 6582	0.78819 8245	0.78654 9383	0.78490 19
49	0.80793 8609	0.80619 6173	0.80444 8714	0.80269 8295	0.80094 7005	0.79919 69
50	0.82265 4241	0.82080 7001	0.81895 4109	0.81709 7745	0.81524 0117	0.81338 34
51	0.83728 0663	0.83532 4828	0.83336 2657	0.83139 6448	0.82942 8531	0.82746 12
52	0.85181 7934	0.84974 9690	0.84767 4364	0.84559 4378	0.84351 2186	0.84143 02
53	0.86626 6229	0.86408 1737	0.86188 9355	0.85969 1631	0.85749 1146	0.85529 05
54	0.88062 5831	0.87832 1236	0.87600 7878	0.87368 8432	0 87136 5607	0.86904 21
55	0.89489 7139	0.89246 8575	0.89003 0305	0.88758 5132	0.88513 5899	0.88268 55
56	0.90908 0669	0.90652 4262	0.90395 7132	0.90138 2214	0.89880 2487	0.89622 09
57	0.92317 7054	0.92048 8926	0.91778 8984	0.91508 0295	0.91236 5974	0.90964 92
58	0.93718 7046	0.93436 3323	0.93152 6616	0.92868 0125	0.92582 7104	0.92297 08
59	0.95111 1516	0.94814 8334	0.94517 0915	0.94218 2594	0.93918 6765	0.93618 68
60	0.96495 1458	0.96184 4967	0.95872 2901	0.95558 8730	0.95244 5990	0.94929 82
61	0.97870 7987	0.97545 4358	0.97218 3727	0.96889 9702	0.96560 5959	0.96230 62
62	0.99238 2342	0.98897 7772	0.98555 4684	0.98211 6821	0.97866 8002	0.97521 21
63	1.00597 5884	1.00241 6606	0.99883 7199	0.99524 1544	0.99163 3600	0 98801 74
64	1.01949 0101	1.01577 2386	1.01203 2836	1.00827 5469	1.00450 4384	1.00072 37
65	1.03292 6600	1.02904 6768	1.02514 3298	1.02122 0342	1.01728 2141	1.01333 30
66	1.04628 7116	1.04224 1541	1.03817 0426	1.03407 8055	1.02996 8809	1.02584 71
67	1.05957 3504	1.05535 8623	1.05111 6197	1.04685 0644	1.04256 6483	1.03826 83
68	1.07278 7743	1.06840 0061	1.06398 2728	1.05954 0293	1.05507 7410	1.05059 88
69	1.08593 1933	1.08136 8032	1.07677 2273	1.07214 9330	1.06750 3993	1.06284 11
70	1.09900 8293	1.09426 4841	1.08948 7219	1.08468 0226	1.07984 8786	1.07499 79
71	1.11201 9161	1.10709 2917	1.10213 0089	1.09713 5597	1.09211 4494	1.08707 19
72	1.12496 6989	1.11985 4814	1.11470 3537	1.10951 8198	1.10430 3975	1.09906 61
73	1.13785 8345	1.13255 3207	1.12721 0347	1.12183 0923	1.11642 0233	1.11098 37
74	1.15068 3906	1.14519 0888	1.13965 3429	1.13407 6800	1.12846 6417	1.12282 78
75	1.16345 8455	1.15777 0766	1.15203 5817	1.14625 8991	1.14044 5817	1.13460 19
76	1.17618 0882	1.17029 5859	1.16436 0664	1.15838 0785	1.15236 1860	1.14630 97
77	1.18885 4172	1.18276 9294	1.17663 1238	1.17044 5594	1.16421 8107	1.15795 47
78	1.20148 1409	1.19519 4298	1.18885 0916	1.18245 6949	1.17601 8245	1.16954 08
79	1.21406 5766	1.20757 4198	1.20102 3180	1.19441 8494	1.18776 6084	1.18107 20
80	1.22661 0499	1.21991 2410	1.21315 1613	1.20633 3979	1.19946 5549	1.19255 25
81	1.23911 8947	1.23221 2438	1.22523 9888	1.21820 7256	1.21112 0671	1.20398 64
82	1.25159 4520	1.24447 7863	1.23729 1765	1.23004 2268	1.22273 5584	1.21537 81
83	1.26404 0695	1.25671 2342	1.24931 1084	1.24184 3043	1.23431 4515	1.22673 20
84	1.27646 1011	1.26891 9594	1 26130 1754	1.25361 3687	1.24586 1772	1.23805 25
85	1.28885 9061	1.28110 3399	1.27326 7747	1.26535 8374	1.25738 1737	1.24934 44
86	1.30123 8483	1.29326 7586	1.28521 3091	1.27708 1338	1.26887 8859	1.26061 23
87	1.31360 2956	1.30541 6027	1 29714 1859	1.28878 6862	1.28035 7641	1.27186 09
88	1.32595 6188	1.31755 2628	1.30905 8163	1.30047 9272	1.29182 2628	1.28309 51
89	1.33830 1913	1.32968 1322	1.32096 6142	1.31216 2921	1.30327 8401	1.29431 95
90	1.35064 3881	1.34180 6058	1.33286 9954	1.32384 2184	1.31472 9560	1.30553 90

φ.	F(45°).	F(46°).	F(47°).	F(48°).	F(49°).	F(50°).
45°	0.82601 7876	0.82764 9406	0.82929 6399	0.83095 7123	0.83262 9775	0.83431 2473
46	0.84623 0164	0.84798 3105	0.84975 3573	0.85153 9739	0.85333 9698	0.85515 1455
47	0.86656 1694	0.86844 2498	0.87034 3113	0.87226 1616	0.87419 5997	0.87614 4150
48	0.88701 4380	0.88902 9710	0.89106 7374	0.89312 5355	0.89520 1543	0.89729 3719
49	0.90759 0032	0.90974 6765	0.91192 8611	0.91413 3465	0.91635 9117	0.91860 3238
50	0.92829 0355	0.93059 5580	0.93292 8973	0.93528 8346	0.93767 1395	0.94007 5683
51	0.94911 6937	0.95158 7953	0.95407 0491	0.95659 2284	0.95914 0940	0.96171 3920
52	0.97007 1238	0.97269 5554	0.97535 5065	0.97804 7434	0.98077 0186	0.98352 0687
53	0.99115 4584	0.99394 9914	0.99678 4454	0.99965 5807	1.00256 1423	1.00549 8582
54	1.01236 8151	1.01534 2414	1.01836 0265	1.02141 9260	1.02451 6787	1.02765 0048
55	1.03371 2963	1.03687 4272	1.04008 3938	1.04333 9481	1.04663 8240	1.04997 7352
56	1.05518 9871	1.05854 6532	1.06195 6732	1.06541 7970	1.06892 7554	1.07248 2572
57	1.07679 9552	1.08036 0052	1.08397 9712	1.08765 6030	1.09138 6298	1.09516 7574
58	1.09854 2490	1.10231 5491	1.10615 3737	1.11005 4746	1.11401 5815	1.11803 3995
59	1.12041 8969	1.12441 3295	1.12847 9442	1.13261 4970	1.13681 7207	1.14108 3221
60	1.14242 9058	1.14665 3686	1.15095 7225	1.15533 7305	1.15979 1315	1.16431 6365
61	1.16457 2604	1.16903 6646	1.17358 7230	1.17822 2088	1.18293 8698	1.18773 4247
62	1.18684 9218	1.19156 1906	1.19636 9335	1.20126 9370	1.20625 9615	1.21133 7379
63	1.20925 8262	1.21422 8933	1.21930 3134	1.22447 8902	1.22975 4005	1.23512 5898
64	1.23179 8843	1.23703 6915	1.24238 7922	1 24785 0114	1.25342 1465	1.25909 9630
65	1.25446 9796	1.25998 4751	1.26562 2684	1.27138 2101	1.27726 1232	1.28325 7979
66	1.27726 9681	1.28307 1039	1.28900 6077	1.29507 3606	1.30127 2161	1.30759 9950
67	1.30019 6769	1.30629 4062	1.31253 6417	1.31892 3001	1.32545 2709	1.33212 4115
68	1.32324 9035	1.32965 1781	1.33621 1668	1.34292 8273	1.34980 0913	1.35682 8590
69	1.34642 4150	1.35314 1824	1.36002 9429	1.36708 7012	1.37431 4375	1.38171 1018
70	1.36971 9477	1.37676 1478	1.38398 6926	1.39139 6397	1.39899 0245	1.40676 8546
71	1.39313 2062	1.40050 7683	1.40808 0998	1.41585 3181	1.42382 5210	1.43199 7810
72	1.41665 8632	1.42437 7024	1.43230 8097	1.44045 3688	1.44881 5475	1.45739 4916
73	1.44029 5595	1.44836 5732	1.45666 4277	1.46519 3802	1.47395 6760	1.48295 5431
74	1.46403 9036	1.47246 9677	1.48114 5193	1.49006 8961	1.49924 4290	1.50867 4369
75	1.48788 4719	1.49668 4374	1.50574 6101	1.51507 4157	1.52467 2790	1.53454 6188
76	1.51182 8094	1.52100 4982	1.53046 1859	1.54020 3938	1.55023 6485	1.56056 4783
77	1.53586 4296	1.54542 6309	1.55528 6932	1.56545 2407	1.57592 9104	1.58672 3492
78	1.55998 8159	1.56994 2822	1.58021 5399	1.59081 3233	1.60174 3883	1.61301 5096
79	1.58419 4219	1.59454 8654	1.60524 0962	1.61627 9661	1.62767 3578	1.63943 1834
80	1.60847 6732	1.61923 7619	1.63035 6962	1.64184 4525	1.65371 0481	1.66596 5416
81	1.63282 9683	1.64400 3225	1.65555 6395	1.66750 0266	1.67984 6436	1.69260 7042
82	1.65724 6805	1.66883 8694	1.68083 1928	1.69323 8953	1.70607 2864	1.71934 7430
83	1.68172 1597	1.69373 6982	1.70617 5926	1.71905 2309	1.73238 0789	1.74617 6844
84	1.70624 7342	1.71869 0798	1.73158 0475	1.74493 1739	1.75876 0873	1.77308 5132
85	1.73081 7133	1.74369 2635	1.75703 7411	1.77086 8362	1.78520 3447	1.80006 1764
86	1.75542 3892	1.76873 4791	1.78253 8350	1.79685 3043	1.81169 8555	1.82709 5878
87	1.78006 0403	1.79380 9404	1.80807 4721	1.82287 6435	1.83823 5994	1.85417 6328
88	1.80471 9328	1.81890 8476	1.83363 7801	1.84892 9016	1.86480 5361	1.88129 1737
89	1.82939 3247	1.84402 3911	1.85921 8752	1.87500 1130	1.89139 6098	1.90843 0550
90	1.85407 4677	1.86914 7545	1.88480 8657	1.90108 3033	1.91799 7546	1.93558 1096

φ.	E(50°).	E(51°).	E(52°).	E(53°).	E(54°).	E(55°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2773	0.01745 2757	0.01745 2742	0.01745 2727	0.01745 2713	0.01745 2698
2	0.03490 2426	0.03490 2304	0.03490 2184	0.03490 2064	0.03490 1946	0.03490 1829
3	0.05234 5842	0.05234 5432	0.05234 5026	0.05234 4622	0.05234 4223	0.05234 3828
4	0.06977 9909	0.06977 8938	0.06977 7974	0.06977 7018	0.06977 6071	0.06977 5135
5	0.08720 1520	0.08719 9623	0.08719 7740	0.08719 5873	0.08719 4024	0.08719 2196
6	0.10460 7577	0.10460 4299	0.10460 1044	0.10459 7819	0.10459 4624	0.10459 1466
7	0.12199 4992	0.12198 9787	0.12198 4619	0.12197 9497	0.12197 4425	0.12196 9409
8	0.13936 0690	0.13935 2922	0.13934 5209	0.13933 7563	0.13932 9992	0.13932 2505
9	0.15670 1613	0.15669 0554	0.15667 9573	0.15666 8687	0.15665 7907	0.15664 7247
10	0.17401 4718	0.17399 9549	0.17398 4487	0.17396 9556	0.17395 4769	0.17394 0147
11	0.19129 6981	0.19127 6794	0.19125 6749	0.19123 6876	0.19121 7196	0.19119 7735
12	0.20854 5401	0.20851 9196	0.20849 3175	0.20846 7377	0.20844 1829	0.20841 6563
13	0.22575 7000	0.22572 3688	0.22569 0609	0.22565 7812	0.22562 5331	0.22559 3209
14	0.24292 8825	0.24288 7226	0.24284 5918	0.24280 4959	0.24276 4394	0.24272 4274
15	0.26005 7952	0.26000 6797	0.25995 5998	0.25990 5625	0.25985 5736	0.25980 6391
16	0.27714 1487	0.27707 9418	0.27701 7777	0.27695 6650	0.27689 6106	0.27683 6222
17	0.29417 6570	0.29410 2137	0.29402 8215	0.29395 4904	0.29388 2289	0.29381 0462
18	0.31116 0373	0.31107 2038	0.31098 4306	0.31089 7293	0.31081 1103	0.31072 5842
19	0.32809 0107	0.32798 6244	0.32788 3084	0.32778 0763	0.32767 9403	0.32757 9131
20	0.34496 3022	0.34484 1915	0.34472 1621	0.34460 2298	0.34448 4087	0.34436 7138
21	0.36177 6410	0.36163 6255	0.36149 7033	0.36135 8924	0.36122 2094	0.36108 6715
22	0.37852 7607	0.37836 6512	0.37820 6478	0.37804 7713	0.37789 0407	0.37773 4758
23	0.39521 3994	0.39502 9979	0.39484 7164	0.39466 5784	0.39448 6058	0.39430 8212
24	0.41183 3003	0.41162 4001	0.41141 6347	0.41121 0306	0.41100 6129	0.41080 4071
25	0.42838 2115	0.42814 5973	0.42791 1335	0.42767 8500	0.42744 7753	0.42721 9383
26	0.44485 8867	0.44459 3344	0.44432 9491	0.44406 7642	0.44380 8120	0.44355 1249
27	0.46126 0850	0.46096 3621	0.46066 8235	0.46037 5066	0.46008 4476	0.45979 6830
28	0.47758 5716	0.47725 4369	0.47692 5046	0.47659 8164	0.47627 4128	0.47595 3345
29	0.49383 1176	0.49346 3214	0.49309 7466	0.49273 4393	0.49237 4447	0.49201 8079
30	0.50999 5005	0.50958 7849	0.50918 3102	0.50878 1275	0.50838 2868	0.50798 8381
31	0.52607 5046	0.52562 6032	0.52517 9628	0.52473 6398	0.52429 6894	0.52386 1670
32	0.54206 9210	0.54157 5591	0.54108 4790	0.54059 7424	0.54011 4102	0.53963 5435
33	0.55797 5479	0.55743 4428	0.55689 6405	0.55636 2087	0.55583 2142	0.55530 7242
34	0.57379 1909	0.57320 0518	0.57261 2368	0.57202 8198	0.57144 8741	0.57087 4733
35	0.58951 6635	0.58887 1916	0.58823 0651	0.58759 3648	0.58696 1707	0.58633 5631
36	0.60514 7872	0.60444 6756	0.60374 9309	0.60305 6410	0.60236 8930	0.60168 7743
37	0.62068 3915	0.61992 3258	0.61916 6483	0.61841 4543	0.61766 8386	0.61692 8962
38	0.63612 3146	0.63529 9727	0.63448 0399	0.63366 6196	0.63285 8143	0.63205 7273
39	0.65146 4037	0.65057 4559	0.64968 9377	0.64880 9608	0.64793 6361	0.64707 0754
40	0.66670 5149	0.66574 6243	0.66479 1830	0.66384 3114	0.66290 1296	0.66196 7580
41	0.68184 5139	0.68081 3362	0.67978 6267	0.67876 5149	0.67775 1303	0.67674 6025
42	0.69688 2760	0.69577 4600	0.69467 1299	0.69357 4249	0.69248 4841	0.69140 4470
43	0.71181 6867	0.71062 8743	0.70944 5642	0.70826 9055	0.70710 0476	0.70594 1403
44	0.72664 6417	0.72537 4682	0.72410 8117	0.72284 8317	0.72159 6884	0.72035 5423
45	0.74137 0474	0.74001 1417	0.73865 7658	0.73731 0899	0.73597 2855	0.73464 5245

φ.	F(50°).	F(51°).	F(52°).	F(53°).	F(54°).	F(55°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3812	0.01745 3828	0.01745 3843	0.01745 3858	0.01745 3872	0.01745 3887
2	0.03491 0745	0.03491 0867	0.03491 0987	0.03491 1107	0.03491 1225	0.03491 1342
3	0.05237 3919	0.05237 4330	0.05237 4737	0.05237 5141	0.05237 5540	0.05237 5936
4	0.06984 6459	0.06984 7432	0.06984 8398	0.06984 9357	0.06985 0304	0.06985 1243
5	0.08733 1492	0.08733 3394	0.08733 5283	0.08733 7156	0.08733 9009	0.08734 0843
6	0.10483 2150	0.10483 5441	0.10483 8708	0.10484 1948	0.10484 5155	0.10484 8328
7	0.12235 1571	0.12235 6804	0.12236 2000	0.12236 7152	0.12237 2253	0.12237 7299
8	0.13989 2902	0.13990 0725	0.13990 8493	0.13991 6197	0.13992 3824	0.13993 1370
9	0.15745 9296	0.15747 0454	0.15748 1534	0.15749 2523	0.15750 3405	0.15751 4171
10	0.17505 3916	0.17506 9251	0.17508 4481	0.17509 9587	0.17511 4548	0.17512 9350
11	0.19267 9935	0.19270 0391	0.19272 0708	0.19274 0861	0.19276 0823	0.19278 0573
12	0.21034 0540	0.21036 7160	0.21039 3602	0.21041 9833	0.21044 5819	0.21047 1531
13	0.22803 8928	0.22807 2859	0.22810 6568	0.22814 0011	0.22817 3146	0.22820 5936
14	0.24577 8310	0.24582 0807	0.24586 3030	0.24590 4925	0.24594 6440	0.24598 7528
15	0.26356 1913	0.26361 4337	0.26366 6430	0.26371 8127	0.26376 9361	0.26382 0074
16	0.28139 2977	0.28145 6801	0.28152 0233	0.28158 3191	0.28164 5596	0.28170 7373
17	0.29927 4759	0.29935 1572	0.29942 7924	0.29950 3719	0.29957 8859	0.29965 3255
18	0.31721 0534	0.31730 2040	0.31739 3014	0.31748 3338	0.31757 2898	0.31766 1585
19	0.33520 3592	0.33531 1618	0.33541 9035	0.33552 5704	0.33563 1490	0.33573 6264
20	0.35325 7243	0.35338 3740	0.35350 9547	0.35363 4503	0.35375 8448	0.35388 1230
21	0.37137 4814	0.37152 1861	0.37166 8136	0.37181 3450	0.37195 7619	0.37210 0463
22	0.38955 9651	0.38972 9460	0.38989 8414	0.39006 6294	0.39023 2887	0.39039 7983
23	0.40781 5120	0.40801 0040	0.40820 4021	0.40839 6815	0.40858 8173	0.40877 7855
24	0.42614 4604	0.42636 7125	0.42658 8628	0.42680 8827	0.42702 7439	0.42724 4186
25	0.44455 1506	0.44480 4266	0.44505 5932	0.44530 6179	0.44555 4685	0.44580 1132
26	0.46303 9247	0.46332 5035	0.46360 9660	0.46389 2755	0.46417 3954	0.46445 2896
27	0.48161 1267	0.48193 3028	0.48225 3568	0.48257 2474	0.48288 9330	0.48320 3728
28	0.50027 1022	0.50063 1865	0.50099 1443	0.50134 9289	0.50170 4940	0.50205 7931
29	0.51902 1987	0.51942 5189	0.51982 7098	0.52022 7192	0.52062 4953	0.52101 9856
30	0.53786 7650	0.53831 6663	0.53876 4377	0.53921 0209	0.53965 3581	0.54009 3905
31	0.55681 1515	0.55730 9973	0.55780 7150	0.55830 2401	0.55879 5081	0.55928 4534
32	0.57585 7098	0.57640 8822	0.57695 9315	0.57750 7863	0.57805 3751	0.57859 6248
33	0.59500 7926	0.59561 6931	0.59622 4793	0.59683 0724	0.59743 3930	0.59803 3606
34	0.61426 7535	0.61493 8038	0.61560 7531	0.61627 5144	0.61694 0002	0.61760 1216
35	0.63363 9465	0.63437 5894	0.63511 1495	0.63584 5314	0.63657 6388	0.63730 3736
36	0.65312 7261	0.65393 4259	0.65474 0672	0.65554 5453	0.65634 7547	0.65714 5874
37	0.67273 4467	0.67361 6902	0.67449 9062	0.67537 9805	0.67625 7973	0.67713 2384
38	0.69246 4622	0.69342 7595	0.69439 0681	0.69535 2636	0.69631 2195	0.69726 8066
39	0.71232 1258	0.71337 0110	0.71441 9551	0.71546 8231	0.71651 4770	0.71755 7759
40	0.73230 7891	0.73344 8212	0.73458 9699	0.73573 0889	0.73687 0282	0.73800 6344
41	0.75242 8021	0.75366 5657	0.75490 5150	0.75614 4917	0.75738 3334	0.75861 8733
42	0.77268 5122	0.77402 6185	0.77536 9923	0.77671 4628	0.77805 8546	0.77939 9869
43	0.79308 2636	0.79453 3511	0.79598 8022	0.79744 4332	0.79890 0548	0.80035 4716
44	0.81362 3967	0.81519 1320	0.81676 3431	0.81833 8327	0.81991 3971	0.82148 8258
45	0.83431 2473	0.83600 3260	0.83770 0104	0.83940 0893	0.84110 3441	0.84280 5484

φ.	E(50°).	E(51°).	E(52°).	E(53°).	E(54°).	E(55°)
45°	0.74137 0474	0.74001 1417	0.73865 7658	0.73731 0899	0.73597 2855	0.73464 5
46	0.75598 8212	0.75453 8060	0.75309 3310	0.75165 5779	0.75022 7298	0.74880 9
47	0.77049 8917	0.76895 3837	0.76741 4238	0.76588 2056	0.76435 9242	0.76284 7
48	0.78490 1993	0.78325 8095	0.78161 9729	0.77998 8953	0.77836 7844	0.77675 8
49	0.79919 6960	0.79745 0301	0.79570 9193	0.79397 5820	0.79225 2388	0.79054 1
50	0.81338 3463	0.81153 0049	0.80968 2169	0.80784 2137	0.80601 2295	0.80419 4
51	0.82746 1270	0.82549 7061	0.82353 8328	0.82158 7521	0.81964 7121	0.81771 9
52	0.84143 0281	0 83935 1192	0.83727 7478	0.83521 1728	0.83315 6567	0.83111 4
53	0.85529 0524	0 85309 2431	0.85089 9564	0.84871 4656	0.84654 0479	0.84437 9
54	0.86904 2165	0.86672 0908	0.86440 4677	0.86209 6351	0.85979 8853	0.85751 5
55	0.88268 5505	0.88023 6894	0.87779 3052	0 87535 7008	0.87293 1842	0.87052 0
56	0.89622 0988	0.89364 0806	0.89106 5076	0.88849 6980	0.88593 9756	0.88339 6
57	0.90964 9201	0.90693 3210	0.90422 1289	0.90151 6777	0.89882 3072	0.89614 3
58	0.92297 0876	0.92011 4824	0.91726 2389	0.91441 7071	0.91158 2431	0.90876 2
59	0.93618 6896	0.93318 6520	0.93018 9235	0.92719 8702	0.92421 8649	0.92125 2
60	0.94929 8295	0.94614 9330	0.94300 2850	0.93988 2680	0.93673 2717	0.93361 6
61	0.96230 6260	0.95900 4443	0.95570 4423	0.95241 0188	0.94912 5808	0.94585 5
62	0.97521 2136	0.97175 3215	0.96829 5313	0.96484 2586	0.96139 9276	0.95796 9
63	0.98801 7425	0.98439 7165	0.98077 7054	0.97716 1416	0.97355 4667	0.96996 1
64	1.00072 3788	0.99693 7979	0.99315 1353	0.98936 8402	0.98559 3715	0.98183 1
65	1.01333 3047	1.00937 7514	1.00542 0096	1.00146 5453	0.99751 8349	0.99358 3
66	1.02584 7188	1.02171 7796	1.01758 5347	1.01345 4669	1.00933 0698	1.00521 8
67	1.03826 8358	1.03396 1023	1.02964 9352	1.02533 8337	1.02103 3088	1.01673 8
68	1.05059 8867	1.04610 9567	1.04161 4539	1.03711 8939	1.03262 8049	1.02814 7
69	1.06284 1189	1.05816 5969	1.05348 3516	1.04879 9147	1.04411 8313	1.03944 6
70	1.07499 7960	1.07013 2946	1.06525 9077	1.06038 1829	1.05550 6819	1.05063 9
71	1.08707 1978	1.08201 3384	1.07694 4196	1.07187 0044	1.06679 6708	1.06173 0
72	1.09906 6199	1.09381 0341	1.08854 2029	1.08326 7045	1.07799 1329	1.07272 0
73	1.11098 3738	1.10552 7041	1.10005 5910	1.09457 6276	1.08909 4232	1.08361 6
74	1.12282 7864	1.11716 6874	1.11148 9352	1.10580 1369	1.10010 9170	1.09441 9
75	1.13460 1998	1.12873 3394	1.12284 6039	1.11694 6143	1.11104 0095	1.10513 4
76	1.14630 9709	1.14023 0311	1.13412 9827	1.12801 4598	1.12189 1154	1.11576 6
77	1.15795 4707	1.15166 1489	1.14534 4735	1.13901 0913	1.13266 6685	1.12631 8
78	1.16954 0840	1.16303 0940	1.15649 4942	1.14993 9436	1.14337 1210	1.13679 7
79	1.18107 2088	1.17434 2818	1.16758 4780	1.16080 4681	1.15400 9429	1.14720 6
80	1.19255 2554	1.18560 1410	1.17861 8726	1.17161 1319	1.16458 6213	1.15755 0
81	1.20398 6458	1.19681 1129	1.18960 1393	1.18236 4170	1.17510 6592	1.16783 6
82	1.21537 8130	1.20797 6508	1.20053 7522	1.19306 8191	1.18557 5749	1.17806 7
83	1.22673 2000	1.21910 2188	1.21143 1973	1.20372 8469	1.19599 9003	1.18825 1
84	1.23805 2587	1.23019 2907	1.22228 9712	1.21435 0204	1.20638 1802	1.19839 2
85	1.24934 4491	1.24125 3492	1.23311 5801	1.22493 8704	1.21672 9708	1.20849 6
86	1.26061 2384	1.25228 8846	1.24391 5385	1.23549 9366	1.22704 8380	1.21857 0
87	1.27186 0996	1.26330 3936	1.25469 3678	1.24603 7663	1.23734 3562	1.22861 9
88	1.28309 5105	1.27430 3783	1.26545 5953	1.25655 9132	1.24762 1066	1.23864 9
89	1.29431 9525	1.28529 3445	1.27620 7525	1.26706 9355	1.25788 6756	1.24866 7
90	1.30553 9094	1.29627 8008	1.28695 3739	1.27757 3948	1.26814 6531	1.25867 9

φ.	F (50°).	F (51°).	F (52°).	F (53°).	F (54°).	F (55°).
45°	0.83431 2473	0.83600 3260	0.83770 0104	0.83940 0893	0.84110 3441	0.84280 5484
46	0.85515 1455	0.85697 2929	0.85880 1958	0.86063 6284	0.86247 3570	0.86431 1385
47	0.87614 4150	0.87810 3870	0.88007 2860	0.88204 8717	0.88402 8944	0.88601 0941
48	0.89729 3719	0.89939 9555	0.90151 6618	0.90364 2357	0.90577 4112	0.90790 9110
49	0.91860 3238	0.92086 3379	0.92313 6969	0.92542 1309	0.92771 3576	0.93001 0817
50	0.94007 5683	0.94249 8641	0.94493 7564	0.94738 9603	0.94985 1772	0.95232 0935
51	0.96171 3920	0.96430 8537	0.96692 1955	0.96955 1180	0.97219 3058	0.97484 4273
52	0.98352 0687	0.98629 6139	0.98909 3580	0.99190 9871	0.99474 1696	0.99758 5559
53	1.00549 8582	1.00846 4382	1.01145 5742	1.01446 9383	1.01750 1833	1.02054 9415
54	1.02765 0048	1.03081 6048	1.03401 1594	1.03723 3279	1.04047 7478	1.04374 0340
55	1.04997 7352	1.05335 3743	1.05676 4120	1.06020 4955	1.06367 2482	1.06716 2684
56	1.07248 2572	1.07607 9883	1.07971 6110	1.08338 7619	1.08709 0514	1.09082 0624
57	1.09516 7574	1.09899 6670	1.10287 0141	1.10678 4265	1.11073 5032	1.11471 8131
58	1.11803 3995	1.12210 6071	1.12622 8552	1.13039 7648	1.13460 9256	1.13885 8944
59	1.14108 3221	1.14540 9794	1.14979 3417	1.15423 0255	1.15871 6137	1.16324 6534
60	1.16431 6365	1.16890 9267	1.17356 6520	1.17828 4276	1.18305 8326	1.18788 4071
61	1.18773 4247	1.19260 5610	1.19754 9327	1.20256 1574	1.20763 8136	1.21277 4382
62	1.21133 7370	1.21649 9610	1.22174 2958	1.22706 3650	1.23245 7509	1.23791 9914
63	1.23512 5898	1.24059 1697	1.24614 8153	1.25179 1611	1.25751 7978	1.26332 2690
64	1.25909 9630	1.26488 1915	1.27076 5248	1.27674 6135	1.28282 0623	1.28898 4263
65	1.28325 7979	1.28936 9894	1.29559 4137	1.30192 7435	1.30836 6036	1.31490 5671
66	1.30759 9950	1.31405 4826	1.32063 4246	1.32733 5222	1.33415 4275	1.34108 7389
67	1.33212 4115	1.33893 5437	1.34588 4497	1.35296 8668	1.36018 4821	1.36752 9278
68	1.35682 8590	1.36400 9959	1.37134 3282	1.37882 6372	1.38645 6539	1.39423 0535
69	1.38171 1018	1.38927 6108	1.39700 8428	1.40490 6322	1.41296 7632	1.42118 9645
70	1.40676 8546	1.41473 1057	1.42287 7172	1.43120 5859	1.43971 5600	1.44840 4330
71	1.43199 7810	1.44037 1418	1.44894 6131	1.45772 1647	1.46669 7201	1.47587 1498
72	1.45739 4916	1.46619 3217	1.47521 1280	1.48444 9641	1.49390 8412	1.50358 7203
73	1.48295 5431	1.49219 1883	1.50166 7929	1.51138 5062	1.52134 4397	1.53154 6596
74	1.50867 4369	1.51836 2230	1.52831 0704	1.53852 2368	1.54899 9475	1.55974 3891
75	1.53454 6188	1.54469 8448	1.55513 3537	1.56585 5239	1.57686 7094	1.58817 2330
76	1.56056 4783	1.57119 4099	1.58212 9651	1.59337 6565	1.60493 9812	1.61682 4156
77	1.58672 3492	1.59784 2114	1.60929 1561	1.62107 8432	1.63320 9287	1.64569 0594
78	1.61301 5096	1.62463 4799	1.63661 1073	1.64895 2129	1.66166 6268	1.67476 1843
79	1.63943 1834	1.65156 3842	1.66407 9293	1.67698 8148	1.69030 0603	1.70402 7074
80	1.66596 5416	1.67862 0331	1.69168 6645	1.70517 6202	1.71910 1249	1.73347 4440
81	1.69260 7042	1.70579 4772	1.71942 2889	1.73350 5247	1.74805 6297	1.76309 1101
82	1.71934 7430	1.73307 7121	1.74727 7153	1.76196 3514	1.77715 3003	1.79286 3259
83	1.74617 6844	1.76045 6815	1.77523 7969	1.79053 8550	1.80637 7835	1.82277 6202
84	1.77308 5132	1.78792 2810	1.80329 3319	1.81921 7264	1.83571 6527	1.85281 4370
85	1.80006 1764	1.81546 3629	1.83143 0683	1.84798 5987	1.86515 4143	1.88296 1423
86	1.82709 5878	1.84306 7413	1.85963 7099	1.87683 0539	1.89467 5150	1.91320 0331
87	1.85417 6328	1.87072 1974	1.88789 9227	1.90573 6301	1.92426 3507	1.94351 3466
88	1.88129 1737	1.89841 4855	1.91620 3415	1.93468 8292	1.95390 2753	1.97388 2711
89	1.90843 0550	1.92613 3399	1.94453 5777	1.96367 1257	1.98357 6105	2.00428 9575
90	1.93558 1096	1.95386 4809	1.97288 2266	1.99266 9756	2.01326 6565	2.03471 5312

φ.	E (55°).	E (56°).	E (57°).	E (58°).	E (59°).	E (6
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.0000
1	0.01745 2698	0.01745 2684	0.01745 2669	0.01745 2655	0.01745 2641	0.0174
2	0.03490 1829	0.03490 1714	0.03490 1599	0.03490 1487	0.03490 1377	0.0349
3	0.05234 3828	0.05234 3439	0.05234 3054	0.05234 2675	0.05234 2303	0.0523
4	0.06977 5135	0.06977 4212	0.06977 3300	0.06977 2403	0.06977 1521	0.0697
5	0.08719 2196	0.08719 0392	0.08718 8612	0.08718 6860	0.08718 5137	0.0871
6	0.10459 1466	0.10458 8348	0.10458 5272	0.10458 2244	0.10457 9267	0.1045
7	0.12196 9409	0.12196 4458	0.12195 9574	0.12195 4765	0.12195 0038	0.1219
8	0.13932 2505	0.13931 5114	0.13930 7823	0.13930 0645	0.13929 3588	0.1392
9	0.15664 7247	0.15663 6723	0.15662 6342	0.15661 6121	0.15660 6072	0.1565
10	0.17394 0147	0.17392 5710	0.17391 1469	0.17389 7448	0.17388 3662	0.1738
11	0.19119 7735	0.19117 8518	0.19115 9563	0.19114 0899	0.19112 2548	0.1911
12	0.20841 6563	0.20839 1613	0.20836 7004	0.20834 2771	0.20831 8943	0.2082
13	0.22559 3209	0.22556 1485	0.22553 0196	0.22549 9382	0.22546 9083	0.2254
14	0.24272 4274	0.24268 4651	0.24264 5569	0.24260 7079	0.24256 9230	0.2425
15	0.25980 6391	0.25975 7654	0.25970 9582	0.25966 2236	0.25961 5675	0.2595
16	0.27683 6222	0.27677 7071	0.27671 8725	0.27666 1258	0.27660 4740	0.2765
17	0.29381 0462	0.29373 9510	0.29366 9521	0.29360 0582	0.29353 2779	0.2934
18	0.31072 5842	0.31064 1616	0.31055 8528	0.31047 6682	0.31039 6180	0.3103
19	0.32757 9131	0.32748 0070	0.32738 2341	0.32728 6069	0.32719 1371	0.3270
20	0.34436 7138	0.34425 1594	0.34413 7598	0.34402 5293	0.34391 4819	0.3438
21	0.36108 6715	0.36095 2954	0.36082 0977	0.36069 0949	0.36056 3032	0.3604
22	0.37773 4758	0.37758 0959	0.37742 9201	0.37727 9674	0.37713 2565	0.3769
23	0.39430 8212	0.39413 2467	0.39395 9042	0.39378 8154	0.39362 0018	0.3934
24	0.41080 4071	0.41060 4386	0.41040 7321	0.41021 3125	0.41002 2043	0.4098
25	0.42721 9383	0.42699 3676	0.42677 0913	0.42655 1376	0.42633 5342	0.4261
26	0.44355 1249	0.44329 7352	0.44304 6746	0.44279 9750	0.44255 6674	0.4423
27	0.45979 6830	0.45951 2488	0.45923 1808	0.45895 5147	0.45868 2853	0.4584
28	0.47595 3345	0.47563 6218	0.47532 3146	0.47501 4529	0.47471 0757	0.4744
29	0.49201 8079	0.49166 5739	0.49131 7871	0.49097 4921	0.49063 7324	0.4903
30	0.50798 8381	0.50759 8314	0.50721 3161	0.50683 3414	0.50645 9558	0.5060
31	0.52386 1670	0.52343 1276	0.52300 6261	0.52258 7167	0.52217 4533	0.5217
32	0.53963 5435	0.53916 2029	0.53869 4489	0.53823 3412	0.53777 9395	0.5373
33	0.55530 7242	0.55478 8052	0.55427 5238	0.55376 9456	0.55327 1363	0.5527
34	0.57087 4733	0.57030 6902	0.56974 5979	0.56919 2683	0.56864 7735	0.5681
35	0.58633 5631	0.58571 6217	0.58510 4264	0.58450 0559	0.58390 5890	0.5833
36	0.60168 7743	0.60101 3719	0.60034 7729	0.59969 0633	0.59904 3291	0.5984
37	0.61692 8962	0.61619 7218	0.61547 4099	0.61476 0544	0.61405 7489	0.6133
38	0.63205 7273	0.63126 4613	0.63048 1189	0.62970 8021	0.62894 6126	0.6281
39	0.64707 0754	0.64621 3899	0.64536 6908	0.64453 0887	0.64370 6940	0.6428
40	0.66196 7580	0.66104 3168	0.66012 9265	0.65922 7065	0.65833 7765	0.6574
41	0.67674 6025	0.67575 0614	0.67476 6369	0.67379 4580	0.67283 6539	0.6718
42	0.69140 4470	0.69033 4536	0.68927 6435	0.68823 1561	0.68720 1306	0.6861
43	0.70594 1403	0.70479 3340	0.70365 7789	0.70253 6250	0.70143 0221	0.7003
44	0.72035 5423	0.71912 5547	0.71790 8869	0.71670 7001	0.71552 1552	0.7143
45	0.73464 5245	0.73332 9794	0.73202 8232	0.73074 2287	0.72947 3687	0.7282

φ.	F(55°).	F(56°).	F(57°).	F(58°).	F(59°).	F(60°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0 01745 3887	0.01745 3902	0.01745 3916	0.01745 3930	0.01745 3944	0.01745 3957
2	0.03491 1342	0.03491 1458	0.03491 1572	0.03491 1684	0.03491 1794	0.03491 1902
3	0.05237 5936	0.05237 6326	0.05237 6711	0.05237 7090	0.05237 7462	0.05237 7827
4	0.06985 1243	0.06985 2168	0.06985 3081	0.06985 3980	0.06985 4864	0.06985 5731
5	0.08734 0843	0.08734 2653	0.08734 4438	0.08734 6196	0.08734 7925	0.08734 9621
6	0.10484 8328	0.10485 1460	0.10485 4549	0.10485 7592	0.10486 0583	0.10486 3519
7	0.12237 7299	0.12238 2281	0.12238 7195	0.12239 2034	0.12239 6793	0.12240 1464
8	0.13993 1370	0.13993 8821	0.13994 6170	0.13995 3408	0.13996 0526	0.13996 7514
9	0.15751 4171	0.15752 4803	0.15753 5290	0.15754 5619	0.15755 5777	0.15756 5752
10	0.17512 9350	0.17514 3969	0.17515 8390	0.17517 2595	0.17518 6566	0.17520 0286
11	0.19278 0573	0.19280 0083	0.19281 9330	0.19283 8290	0.19285 6940	0.19287 5256
12	0.21047 1531	0.21049 6933	0.21052 1996	0.21054 6687	0.21057 0978	0.21059 4836
13	0.22820 5936	0.22823 8334	0.22827 0303	0.22830 1802	0.22833 2794	0.22836 3236
14	0.24598 7528	0 24602 8130	0.24606 8199	0.24610 7685	0.24614 6538	0.24618 4708
15	0.26382 0074	0.26387 0196	0.26391 9666	0.26396 8422	0.26401 6403	0.26406 3548
16	0.28170 7373	0.28176 8440	0.28182 8722	0.28188 8143	0.28194 6626	0.28200 4099
17	0.29965 3255	0.29972 6808	0.29979 9426	0.29987 1018	0.29994 1491	0.30001 0757
18	0.31766 1585	0.31774 9282	0.31783 5880	0.31792 1266	0.31800 5333	0.31808 7972
19	0.33573 6264	0.33583 9886	0.33594 2228	0.33604 3155	0.33614 2540	0.33624 0253
20	0.35388 1230	0.35400 2686	0.35412 2664	0.35424 1005	0.35435 7559	0.35447 2172
21	0.37210 0463	0.37224 1793	0.37238 1430	0.37251 9190	0.37265 4896	0.37278 8366
22	0.39039 7983	0.39056 1365	0.39072 2823	0.39088 2144	0.39103 9121	0.39119 3543
23	0.40877 7855	0.40896 5608	0.40915 1192	0.40933 4360	0.40951 4872	0.40969 2483
24	0.42724 4186	0.42745 8780	0.42767 0945	0.42788 0395	0.42808 6856	0.42829 0044
25	0.44580 1132	0.44604 5192	0.44628 6548	0.44652 4873	0.44675 9854	0.44699 1165
26	0.46445 2896	0.46472 9208	0.46500 2529	0.46527 2487	0.46553 8723	0.46580 0868
27	0.48320 3728	0.48351 5249	0.48382 3479	0.48412 7999	0.48442 8400	0.48472 4264
28	0.50205 7931	0.50240 7792	0.50275 4055	0.50309 6248	0.50343 3905	0.50376 6555
29	0.52101 9856	0.52141 1374	0.52179 8982	0.52218 2147	0.52256 0342	0.52293 3038
30	0.54009 3905	0.54053 0592	0.54096 3052	0.54139 0687	0.54181 2904	0.54222 9110
31	0.55928 4534	0.55977 0103	0.56025 1128	0.56072 6941	0.56119 6876	0.56166 0267
32	0.57859 6248	0.57913 4625	0.57966 8145	0.58019 6062	0.58071 7634	0.58123 2113
33	0.59803 3606	0.59862 8938	0.59921 9109	0.59980 3288	0.60038 0649	0.60095 0357
34	0.61760 1216	0.61825 7883	0.61890 9099	0.61955 3941	0.62019 1492	0.62082 0821
35	0.63730 3736	0.63802 6363	0.63874 3267	0.63945 3430	0.64015 5831	0.64084 9439
36	0.65714 5874	0.65793 9340	0.65872 6839	0.65950 7247	0.66027 9435	0.66104 2260
37	0.67713 2384	0.67800 1836	0.67886 5112	0.67972 0974	0.68056 8175	0.68140 5451
38	0.69726 8066	0.69821 8931	0.69916 3455	0.70010 0277	0.70102 8023	0.70194 5299
39	0.71755 7759	0.71859 5759	0.71962 7306	0.72065 0907	0.72166 5053	0.72266 8209
40	0.73800 6344	0.73913 7507	0.74026 2170	0.74137 8700	0.74248 5441	0.74358 0707
41	0.75861 8733	0.75984 9409	0.76107 3617	0.76228 9572	0.76349 5462	0.76468 9439
42	0.77939 9869	0.78073 6745	0.78206 7276	0.78338 9518	0.78470 1490	0.78600 1170
43	0.80035 4716	0.80180 4832	0.80324 8834	0.80468 4607	0.80610 9993	0.80752 2783
44	0.82148 8258	0.82305 9020	0.82462 4025	0.82618 0978	0.82772 7530	0.82926 1273
45	0.84280 5484	0.84450 4684	0.84619 8628	0.84788 4833	0.84956 0746	0.85122 3748

φ.	E(55°).	E(56°).	E(57°).	E(58°).	E(59°).	E(60°).
45°	0.73464 5245	0.73332 9794	0.73202 8232	0.73074 2287	0.72947 3687	0.72822 4156
46	0.74880 9703	0.74740 4838	0.74601 4555	0.74464 0704	0.74328 5137	0.74194 9702
47	0.76284 7755	0.76134 9563	0.75986 6644	0.75840 0976	0.75695 4542	0.75552 9318
48	0.77675 8487	0.77516 2980	0.77358 3434	0.77202 1959	0.77048 0673	0.76896 1691
49	0.79054 1116	0.78884 4236	0.78716 3995	0.78550 2644	0.78386 2441	0.78224 5645
50	0.80419 4996	0.80239 2615	0.80060 7540	0.79884 2166	0.79709 8899	0.79538 0148
51	0.81771 9623	0.81580 7545	0.81391 3424	0.81203 9805	0.81018 9249	0.80836 4319
52	0.83111 4636	0.82908 8601	0.82708 1154	0.82509 4996	0.82313 2846	0.82119 7431
53	0.84437 9823	0.84223 5511	0.84011 0392	0.83800 7329	0.83592 9207	0.83387 8920
54	0.85751 5129	0.85524 8161	0.85300 0961	0.85077 6559	0.84857 8012	0.84640 8389
55	0.87052 0657	0.86812 6599	0.86575 2848	0.86340 2609	0.86107 9114	0.85878 5614
56	0.88339 6672	0.88087 1040	0.87836 6214	0.87588 5577	0 87343 2543	0.87101 0552
57	0.89614 3609	0.89348 1873	0.89084 1396	0.88822 5742	0.88563 8515	0.88308 3348
58	0.90876 2075	0.90595 9664	0.90317 8912	0.90042 3570	0.89769 7436	0.89500 4342
59	0.92125 2856	0.91830 5163	0.91537 9470	0.91247 9719	0.90960 9909	0.90677 4074
60	0.93361 6919	0.93051 9307	0.92744 3970	0.92439 5048	0.92137 6741	0.91839 3294
61	0.94585 5419	0.94260 3227	0.93937 3514	0.93617 0620	0.93299 8951	0.92986 2969
62	0.95796 9701	0.95455 8252	0.95116 9407	0.94780 7709	0.94447 7776	0 94118 4288
63	0.96996 1305	0.96638 5913	0.96283 3165	0.95930 7808	0.95581 4678	0.95235 8675
64	0.98183 1973	0.97808 7950	0.97436 6519	0.97067 2635	0.96701 1349	0.96338 7791
65	0.99358 3649	0.98966 6315	0.98577 1423	0.98190 4135	0.97806 9722	0.97427 3544
66	1.00521 8482	1.00112 3176	0.99705 0055	0.99300 4490	0.98899 1974	0.98501 8097
67	1.01673 8834	1.01246 0921	1.00820 4824	1.00397 6124	0.99978 0534	0.99562 3876
68	1.02814 7278	1.02368 2162	1.01923 8374	1.01482 1704	1.01043 8086	1.00609 3575
69	1.03944 6603	1.03478 9736	1.03015 3586	1.02554 4150	1.02096 7579	1.01643 0162
70	1.05063 9811	1.04578 6710	1.04095 3584	1.03614 6634	1.03137 2230	1.02663 6888
71	1.06173 0126	1.05667 6381	1.05164 1734	1.04663 2588	1.04165 5526	1.03671 7291
72	1.07272 0986	1.06746 2276	1.06222 1648	1.05700 5702	1.05182 1231	1.04667 5200
73	1.08361 6047	1.07814 8154	1.07269 7183	1.06726 9928	1.06187 3385	1.05651 4739
74	1.09441 9182	1.08873 8004	1.08307 2443	1.07742 9480	1.07181 6310	1.06624 0328
75	1.10513 4475	1.09923 6042	1.09335 1774	1.08748 8832	1.08165 4604	1.07585 6688
76	1.11576 6220	1.10964 6710	1.10353 9765	1.09745 2719	1.09139 3145	1.08536 8835
77	1.12631 8916	1.11997 4669	1.11364 1241	1.10732 6129	1.10103 7084	1.09478 2083
78	1.13679 7262	1.13022 4797	1.12366 1258	1.11711 4301	1.11059 1843	1.10410 2037
79	1.14720 6149	1.14040 2178	1.13360 5099	1.12682 2718	1.12006 3106	1.11333 4586
80	1.15755 0651	1.15051 2096	1.14347 8262	1.13645 7095	1.12945 6813	1.12248 5896
81	1.16783 6016	1.16056 0023	1.15328 6450	1.14602 3373	1.13877 9148	1.13156 2399
82	1.17806 7658	1.17055 1611	1.16303 5560	1.15552 7703	1.14803 6524	1.14057 0780
83	1.18825 1140	1.18049 2676	1.17273 1670	1.16497 6435	1.15723 5571	1.14951 7960
84	1.19839 2164	1.19038 9185	1.18238 1024	1.17437 6098	1.16638 3118	1.15841 1077
85	1.20849 6558	1.20024 7242	1.19199 0013	1.18373 3385	1.17548 6171	1.16725 7469
86	1.21857 0255	1.21007 3068	1.20156 5158	1.19305 5132	1.18455 1896	1.17606 4646
87	1.22861 9283	1.21987 2986	1.21111 3092	1.20234 8298	1.19358 7593	1.18484 0266
88	1.23864 9742	1.22965 3399	1.22064 0538	1.21161 9938	1.20260 0671	1.19359 2111
89	1.24866 7791	1.23942 0774	1.23015 4287	1.22087 7185	1.21159 8622	1.20232 8053
90	1.25867 9625	1.24918 1621	1.23966 1175	1.23012 7224	1.22058 8996	1.21105 6028

φ.	F (55°).	F (56°).	F (57°).	F (58°).	F (59°).	F (60°).
45°	0.84280 5484	0.84450 4684	0.84619 8628	0.84788 4833	0.84956 0746	0.85122 3748
46	0.86431 1385	0.86614 7215	0.86797 8457	0.86980 2429	0.87161 6365	0.87341 7420
47	0.88601 0941	0.88799 2010	0.88996 9352	0.89194 0073	0.89390 1182	0.89584 9598
48	0.90790 9110	0.91004 4463	0.91217 7166	0.91430 4106	0.91642 2056	0.91852 7683
49	0.93001 0817	0.93230 9948	0.93460 7755	0.93690 0894	0.93918 5894	0.94145 9155
50	0.95232 0935	0.95479 3809	0.95726 6963	0.95973 6816	0.96219 9641	0.96465 1561
51	0.97484 4273	0.97750 1340	0.98016 0605	0.98281 8244	0.98547 0264	0.98811 2500
52	0.99758 5559	1.00043 7770	1.00329 4449	1.00615 1526	1.00900 4733	1.01184 9606
53	1.02054 9415	1.02360 8238	1.02667 4196	1.02974 2966	1.03281 0001	1.03587 0528
54	1.04374 0340	1.04701 7776	1.05030 5454	1.05359 8799	1.05689 2978	1.06018 2905
55	1.06716 2684	1.07067 1280	1.07419 3715	1.07772 5163	1.08126 0507	1.08479 4340
56	1.09082 0624	1.09457 3483	1.09834 4324	1.10212 8073	1.10591 9331	1.10971 2368
57	1 11471 8131	1.11872 8926	1.12276 2448	1.12681 3384	1.13087 6058	1.13494 4421
58	1.13885 8944	1.14314 1924	1.14745 3039	1.15178 6753	1.15613 7123	1.16049 7[illegible]88
59	1.16324 6534	1.16781 6530	1.17242 0799	1.17705 3602	1.18170 8744	1.18637 9566
60	1.18788 4071	1.19275 6495	1.19767 0134	1.20261 9068	1.20759 6875	1.21253 6614
61	1.21277 4382	1.21796 5230	1.22320 5112	1.22848 7958	1.23380 7150	1.23915 5493
62	1.23791 9914	1.24344 5758	1.24902 9410	1.25466 4691	1.26034 4826	1.26606 2404
63	1.26332 2690	1.26920 0666	1.27514 6263	1.28115 3242	1.28721 4721	1.29332 3118
64	1.28898 4263	1.29523 2057	1.30155 8407	1.30795 7080	1.31442 1141	1.32094 2900
65	1.31490 5671	1.32154 1494	1.32826 8022	1.33507 9097	1.34195 7808	1.34892 6427
66	1.34108 7389	1.34812 9947	1.35527 6665	1.36252 1542	1.36985 7778	1.37727 7697
67	1.36752 9278	1.37499 7737	1.38258 5208	1.39028 5944	1.39809 3359	1.40599 9933
68	1.39423 0535	1.40214 4476	1.41019 3768	1.41837 3033	1.42667 6017	1.43509 5481
69	1.42118 9645	1.42956 9006	1.43810 1638	1.44678 2660	1.45560 6287	1.46456 5705
70	1.44840 4330	1.45726 9345	1.46630 7220	1.47551 3717	1.48488 3673	1.49441 0869
71	1.47587 1498	1.48524 2624	1.49480 7953	1.50456 4051	1.51450 6553	1.52463 0026
72	1.50358 7203	1.51348 5035	1.52360 0246	1.53393 0385	1.54447 2081	1.55522 0900
73	1.53154 6596	1.54199 1776	1.55267 9413	1.56360 8236	1.57477 6086	1.58617 9767
74	1.55974 3891	1.57075 7002	1 58203 9612	1.59359 1842	1.60541 2983	1.61750 1341
75	1.58817 2330	1.59977 3783	1.61167 3790	1.62387 4091	1.63637 5684	1.64917 8666
76	1.61682 4156	1.62903 4069	1.64157 3636	1.65444 6460	1.66765 5520	1.68120 3013
77	1.64569 0594	1.65852 8661	1.67172 9545	1.68529 8964	1.69924 2171	1.71356 3794
78	1.67476 1843	1.68824 7197	1.70213 0589	1.71642 0119	1.73112 3614	1.74624 8486
79	1.70402 7074	1.71817 8142	1.73276 4506	1.74779 6917	1.76328 6088	1.77924 2576
80	1.73347 4440	1.74830 8800	1.76361 7702	1.77941 4821	1.79571 4075	1.81252 9534
81	1.76309 1101	1.77862 5332	1.79467 5268	1.81125 7780	1.82839 0308	1.84609 0807
82	1.79286 3259	1.80911 2794	1.82592 1018	1.84330 8264	1.86129 5805	1.87990 5844
83	1.82277 6202	1.83975 5186	1.85733 7543	1.87554 7321	1.89440 9923	1.91395 2156
84	1.85281 4370	1.87053 5520	1.88890 6282	1.90795 4655	1.92771 0450	1.94820 5412
85	1.88296 1423	1.90143 5905	1.92060 7620	1.94050 8733	1 96117 3720	1.98263 9566
86	1.91320 0331	1.93243 7639	1.95242 0994	1.97318 6912	1.99477 4757	2.01722 7022
87	1.94351 3466	1.96352 1325	1.98432 5023	2.00596 5584	2.02848 7446	2.05193 8833
88	1.97388 2711	1.99466 6992	2.01629 7653	2.03882 0346	2.06228 4728	2.08674 4930
89	2.00428 9575	2.02585 4227	2.04831 6309	2.07172 6181	2.09613 8818	2.12161 4377
90	2.03471 5312	2.05706 2323	2.08035 8167	2.10465 7658	2.13002 1438	2.15651 5648

φ.	E (60°).	E (61°).	E (62°).	E (63°).	E (64°).	E (65°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2628	0.01745 2615	0.01745 2602	0.01745 2589	0.01745 2577	0.01745 2565
2	0.03490 1269	0.03490 1163	0.03490 1059	0.03490 0958	0.03490 0859	0.03490 0763
3	0.05234 1938	0.05234 1580	0.05234 1230	0.05234 0888	0.05234 0555	0.05234 0230
4	0.06977 0655	0.06976 9807	0.06976 8977	0.06976 8166	0.06976 7376	0.06976 6606
5	0.08718 3446	0.08718 1789	0.08718 0168	0.08717 8584	0.08717 7039	0.08717 5536
6	0.10457 6345	0.10457 3481	0.10457 0679	0.10456 7942	0.10456 5272	0.10456 2675
7	0.12194 5397	0.12194 0849	0.12193 6398	0.12193 2051	0.12192 7811	0.12192 3686
8	0.13928 6660	0.13927 9870	0.13927 3225	0.13926 6735	0.13926 0405	0.13925 4247
9	0.15659 6207	0.15658 6537	0.15657 7074	0.15656 7832	0.15655 8818	0.15655 0048
10	0.17387 0127	0.17385 6860	0.17384 3878	0.17383 1197	0.17381 8830	0.17380 6796
11	0.19110 4530	0.19108 6869	0.19106 9586	0.19105 2703	0.19103 6239	0.19102 0217
12	0.20829 5547	0.20827 2614	0.20825 0170	0.20822 8246	0.20820 6866	0.20818 6058
13	0.22543 9332	0.22541 0168	0.22538 1626	0.22535 3744	0.22532 6552	0.22530 0088
14	0.24253 2065	0.24249 5632	0.24245 9974	0.24242 5140	0.24239 1166	0.24235 8101
15	0.25956 9955	0.25952 5133	0.25948 1263	0.25943 8405	0.25939 6603	0.25935 5918
16	0.27654 9241	0.27649 4829	0.27644 1571	0.27638 9539	0.27633 8788	0.27628 9390
17	0.29346 6194	0.29340 0911	0.29333 7010	0.29327 4575	0.29321 3677	0.29315 4398
18	0.31031 7121	0.31023 9604	0.31016 3724	0.31008 9580	0.31001 7259	0.30994 6857
19	0.32709 8366	0.32700 7170	0.32691 7895	0.32683 0658	0.32674 5562	0.32666 2719
20	0.34380 6313	0.34369 9911	0.34359 5745	0.34349 3951	0.34339 4650	0.34329 7973
21	0.36043 7387	0.36031 4171	0.36019 3537	0.36007 5642	0.35996 0629	0.35984 8648
22	0.37698 8059	0.37684 6337	0.37670 7577	0.37657 1958	0.37643 9647	0.37631 081[illegible]
23	0.39345 4846	0.39329 2844	0.39313 4219	0.39297 9173	0.39282 7899	0.39268 059[illegible]
24	0.40983 4315	0.40965 0176	0.40946 9864	0.40929 3607	0.40912 1627	0.40895 414[illegible]
25	0.42612 3084	0.42591 4869	0.42571 0965	0.42551 1633	0.42531 7124	0.42512 769[illegible]
26	0.44231 7827	0.44208 3512	0.44185 4030	0.44162 9676	0.44141 0735	0.44119 749[illegible]
27	0.45841 5275	0.45815 2752	0.45789 5622	0.45764 4218	0.45739 8860	0.45715 986[illegible]
28	0.47441 2219	0.47411 9295	0.47383 2365	0.47355 1800	0.47327 7960	0.47301 1204
29	0.49030 5512	0.48997 9911	0.48966 0943	0.48934 9023	0.48904 4554	0.48874 7935
30	0.50609 2073	0.50573 1433	0.50537 8106	0.50503 2553	0.50469 5225	0.50436 6564
31	0.52176 8890	0.52137 0763	0.52098 0670	0.52059 9123	0.52022 6623	0.51986 365[illegible]
32	0.53733 3022	0.53689 4874	0.53646 5524	0.53604 5537	0.53563 5467	0.53523 585[illegible]
33	0.55278 1602	0.55230 0814	0.55182 9629	0.55136 8670	0.55091 8548	0.55047 9863
34	0.56811 1841	0.56758 5706	0.56707 0022	0.56656 5474	0.56607 2733	0.56559 2461
35	0.58332 1032	0.58274 6756	0.58218 3821	0.58163 2980	0.58109 4967	0.58057 051[illegible]
36	0.59840 6550	0.59778 1252	0.59716 8228	0.59656 8301	0.59598 2276	0.59541 095[illegible]
37	0.61336 5858	0.61268 6569	0.61202 0530	0.61136 8637	0.61073 1772	0.61011 080[illegible]
38	0.62819 6511	0.62746 0174	0.62673 8104	0.62603 1277	0.62534 0655	0.62466 718[illegible]
39	0.64289 6158	0.64209 9628	0.64131 8422	0.64055 3603	0.63980 6218	0.63907 729[illegible]
40	0.65746 2547	0.65660 2588	0.65575 9653	0.65493 3094	0.65412 5849	0.65333 844[illegible]
41	0.67189 3527	0.67096 6816	0.67005 7667	0.66916 7329	0.66829 7037	0.66744 800[illegible]
42	0.68618 7054	0.68519 0177	0.68421 2040	0.68325 3994	0.68231 7374	0.68140 349[illegible]
43	0.70034 1194	0.69927 0649	0.69822 0058	0.69719 0881	0.69618 4560	0.69520 251[illegible]
44	0.71435 4128	0.71320 6322	0.71207 9721	0.71097 5898	0.70989 6409	0.70884 279[illegible]
45	0.72822 4156	0.72699 5407	0.72578 9147	0.72460 7070	0.72345 0851	0.72232 215[illegible]

φ.	F (60°).	F (61°).	F (62°).	F (63°).	F (64°).	F (65°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3957	0.01745 3970	0.01745 3983	0.01745 3996	0.01745 4008	0.01745 4020
2	0.03491 1902	0.03491 2008	0.03491 2112	0.03491 2214	0.03491 2312	0.03491 2409
3	0.05237 7827	0.05237 8186	0.05237 8536	0.05237 8879	0.05237 9212	0.05237 9538
4	0.06985 5731	0.06985 6581	0.06985 7413	0.06985 8226	0.06985 9018	0.06985 9790
5	0.08734 9621	0.08735 1284	0.08735 2910	0.08735 4501	0.08735 6050	0.08735 7559
6	0.10486 3519	0.10486 6398	0.10486 9213	0.10487 1966	0.10487 4648	0.10487 7260
7	0.12240 1464	0.12240 6044	0.12241 0524	0.12241 4904	0.12241 9172	0.12242 3328
8	0.13996 7514	0.13997 4366	0.13998 1069	0.13998 7621	0.13999 4008	0.14000 0227
9	0.15756 5752	0.15757 5531	0.15758 5101	0.15759 4454	0.15760 3573	0.15761 2452
10	0.17520 0286	0.17521 3738	0.17522 6904	0.17523 9772	0.17525 2319	0.17526 4536
11	0.19287 5256	0.19289 3217	0.19291 0797	0.19292 7980	0.19294 4736	0.19296 1053
12	0.21059 4836	0.21061 8233	0.21064 1137	0.21066 3525	0.21068 5360	0.21070 6623
13	0.22836 3236	0.22839 3093	0.22842 2325	0.22845 0900	0.22847 8774	0.22850 5918
14	0.24618 4708	0.24622 2148	0.24625 8809	0.24629 4649	0.24632 9614	0.24636 3667
15	0.26406 3548	0.26410 9796	0.26415 5087	0.26419 9369	0.26424 2576	0.26428 4660
16	0.28200 4099	0.28206 0486	0.28211 5714	0.28216 9717	0.28222 2418	0.28227 3754
17	0.30001 0757	0.30007 8723	0.30014 5303	0.30021 0414	0.30027 3965	0.30033 5878
18	0.31808 7972	0.31816 9073	0.31824 8533	0.31832 6250	0.31840 2117	0.31847 6039
19	0.33624 0253	0.33633 6164	0.33643 0150	0.33652 2088	0.33661 1852	0.33669 9328
20	0.35447 2172	0.35458 4692	0.35469 4973	0.35480 2869	0.35490 8231	0.35501 0924
21	0.37278 8366	0.37291 9425	0.37304 7899	0.37317 3617	0.37329 6404	0.37341 6102
22	0.39119 3543	0.39134 5206	0.39149 3906	0.39163 9444	0.39178 1617	0.39192 0237
23	0.40969 2483	0.40986 6958	0.41003 8060	0.41020 5557	0.41036 9214	0.41052 8813
24	0.42829 0044	0.42848 9689	0.42868 5517	0.42887 7260	0.42906 4648	0.42924 7425
25	0.44699 1165	0.44721 8495	0.44744 1530	0.44765 9962	0.44787 3481	0.44808 1790
26	0.46580 0868	0.46605 8564	0.46631 1453	0.46655 9181	0.46680 1395	0.46703 7752
27	0.48472 4264	0.48501 5181	0.48530 0744	0.48558 0550	0.48585 4195	0.48612 1288
28	0.50376 6555	0.50409 3732	0.50441 4973	0.50472 9822	0.50503 7818	0.50533 8516
29	0.52293 3038	0.52329 9707	0.52365 9825	0.52401 2875	0.52435 8336	0.52469 5701
30	0.54222 9110	0.54263 8707	0.54304 1105	0.54343 5721	0.54382 1965	0.54419 9264
31	0.56166 0267	0.56211 6445	0.56256 4744	0.56300 4507	0.56343 5071	0.56385 5788
32	0.58123 2113	0.58173 8751	0.58223 6801	0.58272 5525	0.58320 4177	0.58367 2027
33	0.60095 0357	0.60151 1576	0.60206 3471	0.60260 5213	0.60313 5968	0.60365 4914
34	0.62082 0821	0.62144 0997	0.62205 1087	0.62265 0166	0.62323 7300	0.62381 1566
35	0.64084 9439	0.64153 3217	0.64220 6128	0.64286 7138	0.64351 5205	0.64414 9296
36	0.66104 2260	0.66179 4572	0.66253 5218	0.66326 3047	0.66397 6898	0.66467 5618
37	0.68140 5451	0.68223 1531	0.68304 5135	0.68384 4983	0.68462 9785	0.68539 8257
38	0.70194 5299	0.70285 0701	0.70374 2812	0.70462 0212	0.70548 1469	0.70632 5156
39	0.72266 8209	0.72365 8827	0.72463 5341	0.72559 6179	0.72653 9755	0.72746 4483
40	0.74358 0707	0.74466 2795	0.74572 9976	0.74678 0515	0.74781 2656	0.74882 4642
41	0.76468 9439	0.76586 9631	0.76703 4136	0.76818 1040	0.76930 8402	0.77041 4278
42	0.78600 1170	0.78728 6506	0.78855 5407	0.78980 5765	0.79103 5441	0.79224 2286
43	0.80752 2783	0.80892 0729	0.81030 1541	0.81166 2898	0.81300 2447	0.81431 7816
44	0.82926 1273	0.83077 9752	0.83228 0457	0.83376 0843	0.83521 8322	0.83665 0281
45	0.85122 3748	0.85287 1161	0.85450 0242	0.85610 8202	0.85769 2201	0.85924 9361

φ.	E(60°).	E(61°).	E(62°).	E(63°).	E(64°).	E(65°).
45°	0.72822 4156	0.72699 5407	0.72578 9147	0.72460 7070	0.72345 0851	0.72232 2150
46	0.74194 9702	0.74063 6238	0.73934 6579	0.73808 2545	0.73684 5939	0.73563 8549
47	0.75552 9318	0.75412 7278	0.75275 0387	0.75140 0600	0.75007 9854	0.74879 0071
48	0.76896 1691	0.76746 7124	0.76599 9077	0.76455 9645	0.76315 0908	0.76177 4929
49	0.78224 5645	0.78065 4511	0.77909 1292	0.77755 8229	0.77605 7553	0.77459 1475
50	0.79538 0148	0.79368 8320	0.79202 5820	0.79039 5046	0.78879 8385	0.78723 8204
51	0.80836 4319	0.80656 7581	0.80480 1602	0.80306 8940	0.80137 2149	0.79971 3760
52	0.82119 7431	0.81929 1482	0.81741 7734	0.81557 8914	0.81377 7748	0.81201 6944
53	0.83387 8920	0.83185 9373	0.82987 3475	0.82792 4132	0.82601 4250	0.82414 6719
54	0.84640 8389	0.84427 0773	0.84216 8257	0.84010 3932	0.83808 0893	0.83610 2220
55	0.85878 5614	0.85652 5377	0.85430 1687	0.85211 7829	0.84997 7093	0.84788 2761
56	0.87101 0552	0.86862 3064	0.86627 3558	0.86396 5523	0.86170 2454	0.85948 7843
57	0.88308 3348	0.88056 3901	0.87808 3855	0.87564 6910	0.87325 6775	0.87091 7161
58	0.89500 4342	0.89234 8153	0.88973 2763	0.88716 2088	0.88464 0059	0.88217 0616
59	0.90677 4074	0.90397 6293	0.90122 0676	0.89851 1366	0.89585 2522	0.89324 8324
60	0.91839 3294	0.91544 9004	0.91254 8205	0.90969 5272	0.90689 4604	0.90415 0626
61	0.92986 2969	0.92676 7192	0.92371 6187	0.92071 4566	0.91776 6976	0.91487 8098
62	0.94118 4288	0.93793 1993	0.93472 5693	0.93157 0247	0.92847 0555	0.92543 1564
63	0.95235 8675	0.94894 4781	0.94557 8040	0.94226 3563	0.93900 6511	0.93581 2105
64	0.96338 7791	0.95980 7176	0.95627 4797	0.95279 6022	0.94937 6281	0.94602 1074
65	0.97427 3544	0.97052 1054	0.96681 7797	0.96316 9404	0.95958 1579	0.95606 0108
66	0.98501 8097	0.98108 8555	0.97720 9147	0.97338 5770	0.96962 4408	0.96593 1141
67	0.99562 3876	0.99151 2091	0.98745 1234	0.98344 7472	0.97950 7073	0.97563 6416
68	1.00609 3575	1.00179 4354	0.99754 6739	0.99335 7167	0.98923 2194	0.98517 8502
69	1.01643 0162	1.01193 8325	1.00749 8642	1.00311 7823	0.99880 2715	0.99456 0304
70	1.02663 6888	1.02194 7279	1.01731 0233	1.01273 2735	1.00822 1919	1.00378 5081
71	1.03671 7291	1.03182 4795	1.02698 5122	1.02220 5528	1.01749 3439	1.01285 6455
72	1.04667 5200	1.04157 4758	1.03652 7241	1.03154 0173	1.02662 1267	1.02177 8429
73	1.05651 4739	1.05120 1368	1.04594 0855	1.04074 0990	1.03560 9767	1.03055 5395
74	1.06624 0328	1.06070 9139	1.05523 0566	1.04981 2657	1.04446 3682	1.03919 2148
75	1.07585 6688	1.07010 2906	1.06440 1316	1.05876 0215	1.05318 8142	1.04769 3894
76	1.08536 8835	1.07938 7823	1.07345 8389	1.06758 9073	1.06178 8671	1.05606 6261
77	1.09478 2083	1.08856 9361	1.08240 7413	1.07630 5006	1.07027 1188	1.06431 5303
78	1.10410 2037	1.09765 3308	1.09125 4354	1.08491 4160	1.07864 2009	1.07244 7501
79	1.11333 4586	1.10664 5758	1.10000 5514	1.09342 3041	1.08690 7845	1.08046 9766
80	1.12248 5896	1.11555 3109	1.10866 7522	1.10183 8514	1.09507 5797	1.08838 9433
81	1.13156 2399	1.12438 2047	1.11724 7326	1.11016 7791	1.10315 3344	1.09621 4252
82	1.14057 0780	1.13313 9535	1.12575 2174	1.11841 8415	1.11114 8331	1.10395 2377
83	1.14951 7960	1.14183 2796	1.13418 9602	1.12659 8243	1.11906 8950	1.11161 2345
84	1.15841 1077	1.15046 9292	1.14256 7410	1.13471 5427	1.12692 3718	1.11920 3053
85	1.16725 7469	1.15905 6704	1.15089 3638	1.14277 8385	1.13472 1448	1.12673 3729
86	1.17606 4646	1.16760 2905	1.15917 6540	1.15079 5773	1.14247 1218	1.13421 3897
87	1.18484 0266	1.17611 5933	1.16742 4554	1.15877 6450	1.15018 2335	1.14165 3337
88	1.19359 2111	1.18460 3960	1.17564 6267	1.16672 9443	1.15786 4293	1.14906 2041
89	1.20232 8053	1.19307 5262	1.18385 0381	1.17466 3907	1.16552 6730	1.15645 0162
90	1.21105 6028	1.20153 8184	1.19204 5677	1.18258 9085	1.17317 9382	1.16382 7964

φ.	F(60°).	F(61°).	F(62°).	F(63°).	F(64°).	F(65°).
45°	0.85122 3748	0.85287 1161	0.85450 0242	0.85610 8202	0.85769 2201	0.85924 9361
46	0.87341 7420	0.87520 2678	0.87696 9147	0.87871 3776	0.88043 3451	0.88212 5011
47	0.89584 9598	0.89778 2151	0.89969 5582	0.90158 6560	0.90345 1676	0.90528 7461
48	0.91852 7683	0.92061 7551	0.92268 8115	0.92473 5744	0.92675 6713	0.92874 7220
49	0.94145 9155	0.94371 6960	0.94595 5460	0.94817 0705	0.95035 8631	0.95251 5076
50	0.96465 1561	0.96708 8560	0.96950 6471	0.97190 1002	0.97426 7726	0.97660 2097
51	0.98811 2500	0.99074 0623	0.99335 0129	0.99593 6364	0.99849 4516	1.00101 9625
52	1.01184 9606	1.01468 1489	1.01749 5526	1.02028 6680	1.02304 9727	1.02577 9268
53	1.03587 0528	1.03891 9552	1.04195 1849	1.04496 1980	1.04794 4284	1.05089 2894
54	1.06018 2905	1.06346 3234	1.06672 8358	1.06997 2417	1.07318 9291	1.07637 2614
55	1.08479 4340	1.08832 0959	1.09183 4359	1.09532 8243	1.09879 6010	1.10223 0767
56	1.10971 2368	1.11350 1120	1.11727 9174	1.12103 9779	1.12477 5834	1.12847 9892
57	1.13494 4421	1.13901 2046	1.14307 2104	1.14711 7381	1.15114 0254	1.15513 2701
58	1.16049 7788	1.16486 1958	1.16922 2390	1.17357 1397	1.17790 0822	1.18220 2042
59	1.18637 9566	1.19105 8924	1.19573 9164	1.20041 2122	1.20506 9098	1.20970 0852
60	1.21253 6614	1.21761 0805	1.22263 1392	1.22764 9739	1.23265 6599	1.23764 2104
61	1.23915 5493	1.24452 5194	1.24990 7813	1.25529 4256	1.26067 4732	1.26603 8745
62	1.26606 2404	1.27180 9350	1.27757 6869	1.28335 5431	1.28913 4716	1.29490 3602
63	1.29332 3118	1.29947 0122	1.30564 6622	1.31184 2687	1.31804 7497	1.32424 9318
64	1.32094 2900	1.32751 3866	1.33412 4667	1.34076 5019	1.34742 3643	1.35408 8229
65	1.34892 6427	1.35594 6356	1.36301 8031	1.37013 0882	1.37727 3232	1.38443 2245
66	1.37727 7697	1.38477 2680	1.39233 3063	1.39994 8073	1.40760 5719	1.41529 2712
67	1.40599 9933	1.41399 7136	1.42207 5313	1.43022 3598	1.43842 9791	1.44668 0252
68	1.43509 5481	1.44362 3115	1.45224 9404	1.46096 3524	1.46975 3203	1.47860 4585
69	1.46456 5705	1.47365 2976	1.48285 8886	1.49217 2820	1.50158 2599	1.51107 4325
70	1.49441 0869	1.50408 7916	1.51390 6090	1.52385 5182	1.53392 3317	1.54409 6762
71	1.52463 0026	1.53492 7836	1.54539 1966	1.55601 2853	1.56677 9171	1.57767 7616
72	1.55522 0900	1.56617 1197	1.57731 5921	1.58864 6425	1.60015 2229	1.61182 0772
73	1.58617 9767	1.59781 4886	1.60967 5648	1.62175 4638	1.63404 2570	1.64652 7998
74	1.61750 1341	1.62985 4070	1.64246 6954	1.65533 4175	1.66844 8036	1.68179 8648
75	1.64917 8666	1.66228 2060	1.67568 3594	1.68937 9452	1.70336 3982	1.71762 9353
76	1.68120 3013	1.69509 0187	1.70931 7110	1.72388 2420	1.73878 3019	1.75401 3710
77	1.71356 3794	1.72826 7683	1.74335 6681	1.75883 2372	1.77469 4776	1.79094 1976
78	1.74624 8486	1.76180 1585	1.77778 8991	1.79421 5769	1.81108 5672	1.82840 0773
79	1.77924 2576	1.79567 6653	1.81259 8121	1.83001 6094	1.84693 8718	1.86637 2827
80	1.81252 9534	1.82987 5324	1.84776 5474	1.86621 3738	1.88523 3354	1.90483 6739
81	1.84609 0807	1.86437 7690	1.88326 9731	1.90278 5930	1.92294 5340	1.94376 6816
82	1.87990 5844	1.89916 1517	1.91908 6854	1.93970 6716	1.96104 6700	1.98313 2981
83	1.91395 2156	1.93420 2299	1.95519 0138	1.97694 6997	1.99950 5742	2.02290 0744
84	1.94820 5412	1.96947 3359	1.99155 0312	2.01447 4633	2.03828 7153	2.06303 1293
85	1.98263 9566	2.00494 5993	2.02813 5698	2.05225 4612	2.07735 2186	2.10348 1685
86	2.01722 7022	2.04058 9656	2.06491 2421	2.09024 9294	2.11665 8927	2.14420 5151
87	2.05193 8833	2.07637 2192	2.10184 4679	2.12841 8719	2.15616 2660	2.18515 1512
88	2.08674 4930	2.11226 0105	2.13889 5060	2.16672 0984	2.19581 6309	2.22626 7708
89	2.12161 4377	2.14821 8861	2.17602 4904	2.20511 2675	2.23557 0959	2.26749 8425
90	2.15651 5648	2.18421 3217	2.21319 4695	2.24354 9342	2.27537 6430	2.30878 6798

φ.	E(65°).	E(66°).	E(67°).	E(68°).	E(69°).	E(70°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 00
1	0.01745 2565	0.01745 2553	0.01745 2542	0.01745 2531	0.01745 2520	0.01745 25
2	0.03490 0763	0.03490 0670	0.03490 0579	0.03490 0492	0.03490 0407	0.03490 03
3	0.05234 0230	0.05233 9915	0.05233 9610	0.05233 9315	0.05233 9029	0.05233 87
4	0.06976 6606	0.06976 5859	0.06976 5135	0.06976 4436	0.06976 3759	0.06976 31
5	0.08717 5536	0.08717 4077	0.08717 2663	0.08717 1296	0.08716 9976	0.08716 87
6	0.10456 2675	0.10456 0153	0.10455 7709	0.10455 5346	0.10455 3065	0.10455 08
7	0.12192 3686	0.12191 9681	0.12191 5799	0.12191 2045	0.12190 8423	0.12190 49
8	0.13925 4247	0.13924 8266	0.13924 2470	0.13923 6865	0.13923 1458	0.13922 62
9	0.15655 0048	0.15654 1530	0.15653 3274	0.15652 5292	0.15651 7591	0.15651 01
10	0.17380 6796	0.17379 5108	0.17378 3780	0.17377 2826	0.17376 2259	0.17375 20
11	0.19102 0217	0.19100 4655	0.19098 9572	0.19097 4988	0.19096 0918	0.19094 73
12	0.20818 6058	0.20816 5847	0.20814 6258	0.20812 7316	0.20810 9042	0.20809 14
13	0.22530 0088	0.22527 4382	0.22524 9466	0.22522 5372	0.22520 2128	0.22517 97
14	0.24235 8101	0.24232 5982	0.24229 4848	0.24226 4741	0.24223 5696	0.24220 77
15	0.25935 5918	0.25931 6396	0.25927 8084	0.25924 1035	0.25920 5291	0.25917 08
16	0.27628 9390	0.27624 1402	0.27619 4882	0.27614 9893	0.27610 6488	0.27606 47
17	0.29315 4398	0.29309 6809	0.29304 0980	0.29298 6986	0.29293 4890	0.29288 47
18	0.30994 6857	0.30987 8459	0.30981 2149	0.30974 8015	0.30968 6133	0.30962 65
19	0.32666 2719	0.32658 2230	0.32650 4196	0.32642 8718	0 32635 5887	0.32628 58
20	0.34329 7973	0.34320 4038	0.34311 2963	0.34302 4868	0.34293 9858	0.34285 80
21	0.35984 8648	0.35973 9837	0.35963 4334	0.35953 2277	0.35943 3790	0.35933 90
22	0.37631 0816	0.37618 5625	0.37606 4233	0.37594 6799	0.37583 3468	0.37572 43
23	0.39268 0595	0.39253 7444	0.39239 8629	0.39226 4331	0.39213 4720	0.39200 99
24	0.40895 4149	0.40879 1382	0.40863 3536	0.40848 0816	0.40833 3418	0.40819 15
25	0.42512 7692	0.42494 3577	0.42476 5017	0.42459 2244	0.42442 5482	0.42426 49
26	0.44119 7492	0.44099 0219	0.44078 9187	0.44059 4656	0.44040 6881	0.44022 61
27	0.45715 9869	0.45692 7552	0.45670 2213	0.45648 4146	0.45627 3637	0.45607 09
28	0.47301 1204	0.47275 1877	0.47250 0320	0.47225 6862	0.47202 1826	0.47179 55
29	0.48874 7935	0.48845 9553	0.48817 9789	0.48790 9011	0.48764 7579	0.48739 58
30	0.50436 6564	0.50404 7003	0.50373 6964	0.50343 6859	0.50314 7089	0.50286 80
31	0.51986 3659	0.51951 0713	0.51916 8253	0.51883 6737	0.51851 6610	0.51820 83
32	0.53523 5856	0.53484 7238	0.53447 0129	0.53410 5039	0.53375 2460	0.53341 28
33	0.55047 9863	0.55005 3202	0.54963 9136	0.54923 8229	0·54885 1025	0.54847 80
34	0.56559 2461	0.56512 5304	0.56467 1891	0.56423 2842	0.56380 8760	0.56340 02
35	0.58057 0510	0.58006 0318	0.57956 5084	0.57908 5488	0.57862 2194	0.57817 58
36	0.59541 0950	0.59485 5099	0.59431 5485	0.59379 2853	0.59328 7931	0.59280 14
37	0.61011 0805	0.60950 6585	0.60891 9946	0.60835 1704	0.60780 2655	0.60727 35
38	0.62466 7187	0.62401 1800	0.62337 5404	0.62275 8892	0.62216 3132	0.62158 89
39	0.63907 7299	0.63836 7858	0.63767 8885	0.63701 1355	0.63636 6214	0.63574 43
40	0.65333 8440	0.65257 1966	0.65182 7507	0.65110 6122	0.65040 8842	0.64973 66
41	0.66744 8006	0.66662 1430	0.66581 8483	0.66504 0316	0.66428 8050	0.66356 27
42	0.68140 3497	0.68051 3657	0.67964 9129	0.67881 1159	0.67800 0968	0.67721 97
43	0.69520 2519	0.69424 6160	0.69331 6862	0.69241 5976	0.69154 4826	0.69070 47
44	0.70884 2792	0.70781 6562	0.70681 9210	0.70585 2198	0.70491 6961	0.70401 48
45	0.72232 2150	0.72122 2600	0.72015 3813	0.71911 7369	0.71811 4818	0.71714 76

φ.°	F (65°).	F (66°).	F (67°).	F (68°).	F (69°).	F (70°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4020	0.01745 4032	0.01745 4043	0.01745 4054	0.01745 4065	0.01745 4075
2	0.03491 2409	0.03491 2502	0.03491 2593	0.03491 2680	0.03491 2765	0.03491 2846
3	0.05237 9538	0.05237 9853	0.05238 0160	0.05238 0455	0.05238 0741	0.05238 1015
4	0.06985 9790	0.06986 0538	0.06986 1265	0.06986 1966	0.06986 2644	0.06986 3295
5	0.08735 7559	0.08735 9023	0.08736 0444	0.08736 1817	0.08736 3142	0.08736 4416
6	0.10487 7260	0.10487 9795	0.10488 2254	0.10488 4631	0.10488 6924	0.10488 9130
7	0.12242 3328	0.12242 7363	0.12243 1276	0.12243 5059	0.12243 8708	0.12244 2219
8	0.14000 0227	0.14000 6265	0.14001 2121	0.14001 7782	0.14002 3244	0.14002 8499
9	0.15761 2452	0.15762 1074	0.15762 9436	0.15763 7520	0.15764 5320	0.15765 2825
10	0.17526 4536	0.17527 6402	0.17528 7908	0.17529 9034	0.17530 9770	0.17532 0101
11	0.19296 1053	0.19297 6903	0.19299 2272	0.19300 7135	0.19302 1478	0.19303 5281
12	0.21070 6623	0.21072 7281	0.21074 7312	0.21076 6686	0.21078 5384	0.21080 3379
13	0.22850 5918	0.22853 2294	0.22855 7871	0.22858 2612	0.22860 6491	0.22862 9474
14	0.24636 3667	0.24639 6760	0.24642 8854	0.24645 9902	0.24648 9869	0.24651 8717
15	0.26428 4660	0.26432 5562	0.26436 5234	0.26440 3618	0.26444 0668	0.26447 6339
16	0.28227 3754	0.28232 3655	0.28237 2060	0.28241 8900	0.28246 4117	0.28250 7655
17	0.30033 5878	0.30039 6068	0.30045 4461	0.30051 0974	0.30056 5534	0.30061 8074
18	0.31847 6039	0.31854 7914	0.31861 7652	0.31868 5155	0.31875 0333	0.31881 3104
19	0.33669 9328	0.33678 4395	0.33686 6943	0.33694 6858	0.33702 4031	0.33709 8363
20	0.35501 0924	0.35511 0805	0.35520 7743	0.35530 1604	0.35539 2258	0.35547 9585
21	0.37341 6102	0.37353 2542	0.37364 5569	0.37375 5026	0.37386 0760	0.37396 2628
22	0.39192 0237	0.39205 5109	0.39218 6050	0.39231 2877	0.39243 5411	0.39255 3483
23	0.41052 8813	0.41068 4125	0.41083 4939	0.41098 1040	0.41112 2221	0.41125 8283
24	0.42924 7425	0.42942 5329	0.42959 8115	0.42976 5533	0.42992 7342	0.43008 3313
25	0.44808 1790	0.44828 4590	0.44848 1595	0.44867 2519	0.44885 7082	0.44903 5019
26	0.46703 7752	0.46726 7911	0.46749 1541	0.46770 8314	0.46791 7909	0.46812 0019
27	0.48612 1288	0.48638 1438	0.48663 4267	0.48687 9398	0.48711 6464	0.48734 5112
28	0.50533 8516	0.50563 1470	0.50591 6249	0.50619 2423	0.50645 9572	0.50671 7292
29	0.52469 5701	0.52502 4464	0.52534 4134	0.52565 4222	0.52595 4250	0.52624 3756
30	0.54419 9264	0.54456 7043	0.54492 4747	0.54527 1820	0.54560 7720	0.54593 1919
31	0.56385 5788	0.56426 6009	0.56466 5104	0.56505 2446	0.56542 7419	0.56578 9425
32	0.58367 2027	0.58412 8346	0.58457 2420	0.58500 3542	0.58542 1015	0.58582 4162
33	0.60365 4914	0.60416 1232	0.60465 4117	0.60513 2774	0.60559 6415	0.60604 4275
34	0.62381 1566	0.62437 2048	0.62491 7839	0.62544 8045	0.62596 1780	0.62645 8180
35	0.64414 9296	0.64476 8387	0.64537 1459	0.64595 7508	0.64652 5540	0.64707 4580
36	0.66467 5618	0.66535 8063	0.66602 3091	0.66666 9577	0.66729 6406	0.66790 2481
37	0.68539 8257	0.68614 9121	0.68688 1102	0.68759 2940	0.68828 3386	0.68895 1210
38	0.70632 5156	0.70714 9848	0.70795 4123	0.70873 6573	0.70949 5801	0.71023 0429
39	0.72746 4483	0.72836 8780	0.72925 1061	0.73010 9754	0.73094 3300	0.73175 0156
40	0.74882 4642	0.74981 4714	0.75078 1110	0.75172 2078	0.75263 5877	0.75352 0784
41	0.77041 4278	0.77149 6719	0.77255 3765	0.77358 3468	0.77458 3888	0.77555 3101
42	0.79224 2286	0.79342 4141	0.79457 8832	0.79570 4194	0.79679 8068	0.79785 8308
43	0.81431 7816	0.81560 6616	0.81686 6440	0.81809 4885	0.81928 9549	0.82044 8042
44	0.83665 0281	0.83805 4079	0.83942 7056	0.84076 6546	0.84206 9880	0.84333 4399
45	0.85924 9361	0.86077 6771	0.86227 1492	0.86373 0570	0.86515 1044	0.86652 9957

φ.	E(65°).	E(66°).	E(67°).	E(68°).	E(69°).	E(70°).
45°	0.72232 2150	0.72122 2600	0.72015 3813	0.71911 7369	0.71811 4818	0.71714 7672
46	0.73563 8549	0.73446 2133	0.73331 8430	0.73220 9147	0.73113 5957	0.73010 0495
47	0.74879 0071	0.74753 3143	0.74631 0943	0.74512 5313	0.74397 8056	0.74287 0939
48	0.76177 4929	0.76043 3743	0.75912 9363	0.75786 3773	0.75663 8917	0.75545 6701
49	0.77459 1475	0.77316 2181	0.77177 1834	0.77042 2567	0.76911 6474	0.76785 5608
50	0.78723 8204	0.78571 6849	0.78423 6642	0.78279 9873	0.78140 8795	0.78006 5617
51	0.79971 3760	0.79809 6287	0.79652 2218	0.79499 4012	0.79351 4090	0.79208 4827
52	0.81201 6944	0.81029 9189	0.80862 7149	0.80700 3459	0.80543 0719	0.80391 1481
53	0.82414 6719	0.82232 4412	0.82055 0180	0.81882 6847	0.81715 7199	0.81554 3977
54	0.83610 2220	0.83417 0983	0.83229 0227	0.83046 2974	0.82869 2210	0.82698 0873
55	0.84788 2761	0.84583 8107	0.84384 6382	0.84191 0815	0.84003 4603	0.83822 0896
56	0.85948 7843	0.85732 5176	0.85521 7921	0.85316 9528	0.85118 3413	0.84926 2952
57	0.87091 7161	0.86863 1776	0.86640 4317	0.86423 8463	0.86213 7865	0.86010 6134
58	0.88217 0616	0.87975 7700	0.87740 5246	0.87511 7175	0.87289 7385	0.87074 9735
59	0.89324 8324	0.89070 2956	0.88822 0600	0.88580 5433	0.88346 1611	0.88119 3256
60	0.90415 0626	0.90146 7777	0.89885 0497	0.89630 3231	0.89383 0405	0.89143 6420
61	0.91487 8098	0.91205 2634	0.90929 5294	0.90661 0801	0.90400 3867	0.90147 9185
62	0.92543 1564	0.92245 8247	0.91955 5597	0.91672 8627	0.91398 2348	0.91132 1758
63	0.93581 2105	0.93268 5599	0.92963 2278	0.92665 7459	0.92376 6463	0.92096 4611
64	0.94602 1074	0.94273 5947	0.93952 6488	0.93639 8327	0.93335 7111	0.93040 8497
65	0.95606 0108	0.95261 0838	0.94923 9670	0.94595 2557	0.94275 5487	0.93965 4467
66	0.96593 1141	0.96231 2122	0.95877 3575	0.95532 1789	0.95196 3103	0.94870 3890
67	0.97563 6416	0.97184 1968	0.96813 0282	0.96450 7995	0.96098 1808	0.95755 8474
68	0.98517 8502	0.98120 2878	0.97731 2211	0.97351 3496	0.96981 3806	0.96622 0288
69	0.99456 0304	0.99039 7703	0.98632 2143	0.98234 0983	0.97846 1679	0.97469 1785
70	1.00378 5081	0.99942 9660	0.99516 3235	0.99099 3535	0.98692 8409	0.98297 5826
71	1.01285 6455	1.00830 2347	1.00383 9042	0.99947 4644	0.99521 7401	0.99107 5708
72	1.02177 8429	1.01701 9757	1.01235 3531	1.00778 8231	1.00333 2507	0.99899 5189
73	1.03055 5395	1.02558 6297	1.02071 1103	1.01593 8669	1.01127 8052	1.00673 8518
74	1.03919 2148	1.03400 6797	1.02891 6607	1.02393 0806	1.01905 8856	1.01431 0462
75	1.04769 3894	1.04228 6527	1.03697 5356	1.03176 9980	1.02668 0259	1.02171 6335
76	1.05606 6261	1.05043 1204	1.04489 3144	1.03946 2039	1.03414 8142	1.02896 2025
77	1.06431 5303	1.05844 7004	1.05267 6255	1.04701 3359	1.04146 8951	1.03605 4022
78	1.07244 7501	1.06634 0567	1.06033 1472	1.05443 0853	1.04864 9710	1.04299 9438
79	1.08046 9766	1.07411 8995	1.06786 6084	1.06172 1983	1.05569 8039	1.04980 6030
80	1.08838 9433	1.08178 9856	1.07528 7886	1.06889 4763	1.06262 2159	1.05648 2213
81	1.09621 4252	1.08936 1174	1.08260 5173	1.07595 7757	1.06943 0899	1.06303 7067
82	1.10395 2377	1.09684 1415	1.08982 6729	1.08292 0072	1.07613 3684	1.06948 0336
83	1.11161 2345	1.10423 9472	1.09696 1813	1.08979 1339	1.08274 0528	1.07582 2418
84	1.11920 3053	1.11156 4638	1.10402 0129	1.09658 1689	1.08926 2003	1.08207 4341
85	1.12673 3729	1.11882 6576	1.11101 1797	1.10330 1720	1.09570 9208	1.08824 7730
86	1.13421 3897	1.12603 5281	1.11794 7310	1.10996 2452	1.10209 3722	1.09435 4753
87	1.14165 3337	1.13320 1036	1.12483 7486	1.11657 5274	1.10842 7543	1.10040 8061
88	1.14906 2041	1.14033 4363	1.13169 3414	1.12315 1883	1.11472 3022	1.10642 0711
89	1.15645 0162	1.14744 5967	1.13852 6391	1.12970 4214	1.12099 2783	1.11240 6074
90	1.16382 7964	1.15454 6678	1.14534 7857	1.13624 4365	1.12724 9638	1.11837 7738

φ.	F (65°).	F (66°).	F (67°).	F (68°).	F (69°).	F (70°).
45°	0.85924 9361	0.86077 6771	0.86227 1492	0.86373 0570	0.86515 1044	0.86652 9957
46	0.88[illegible]12 5011	0.88378 5248	0.88541 0919	0.88699 8756	0.88854 5477	0.89004 7795
47	0.90528 7461	0.90709 0386	0.90885 6878	0.91058 3323	0.91226 6087	0.91390 1521
48	0.92874 7220	0.93070 3389	0.93262 1286	0.93449 6921	0.93632 6273	0.93810 5295
49	0.95251 5076	0.95463 5791	0.95671 6448	0.95875 2647	0.96073 9944	0.96267 3852
50	0.97660 2097	0.97889 9461	0.98115 5062	0.98336 4056	0.98552 1533	0.98762 2528
51	1.00101 9625	1.00350 6600	1.00595 0225	1.00834 5171	1.01068 6020	1.01296 7279
52	1.02577 9268	1.02846 9742	1.03111 5435	1.03371 0491	1.03624 8939	1.03872 4708
53	1.05089 2894	1.05380 1746	1.05666 4589	1.05947 4998	1.06222 6397	1.06491 2084
54	1.07637 2614	1.07951 5788	1.08261 1982	1.08565 4157	1.08863 5082	1.09154 7362
65	1.10223 0767	1.10562 5346	1.10897 2297	1.11226 3918	1.11549 2269	1.11864 9198
56	1.12847 9892	1.13214 4180	1.13576 0591	1.13932 0707	1.14281 5821	1.14623 6961
57	1.15513 2701	1.15908 6310	1.16299 2274	1.16684 1412	1.17062 4189	1.17433 0743
58	1.18220 2042	1.18646 5978	1.19068 3084	1.19484 3365	1.19893 6398	1.20295 1356
59	1.20970 0852	1.21429 7610	1.21884 9049	1.22334 4313	1.22777 2028	1.23212 0327
60	1.23764 2104	1.24259 5762	1.24750 6441	1.25236 2377	1.25715 1185	1.26185 9883
61	1.26603 8745	1.27137 5059	1.27667 1716	1.28191 6001	1.28709 4459	1.29219 2916
62	1.29490 3602	1.30065 0116	1.30636 1442	1.31202 3883	1.31762 2862	1.32314 2942
63	1.32424 9318	1.33043 5449	1.33659 2208	1.34270 4891	1.34875 7756	1.35473 4035
64	1.35408 8229	1.36074 5367	1.36738 0518	1.37397 7958	1.38052 0751	1.38699 0740
65	1.38443 2245	1.39159 3844	1.39874 2659	1.40586 1954	1.41293 3583	1.41993 7958
66	1.41529 2712	1.42299 4372	1.43069 4549	1.43837 5527	1.44601 7957	1.45360 0800
67	1.44668 0252	1.45495 9792	1.46325 1558	1.47153 6919	1.47979 5361	1.48800 4402
68	1.47860 4585	1.48750 2095	1.49642 8297	1.50536 3743	1.51428 6834	1.52317 3691
69	1.51107 4325	1.52063 2204	1.53023 8376	1.53987 2725	1.54951 2693	1.55913 3104
70	1.54499 6762	1.55435 9723	1.56469 4129	1.57507 9400	1.58549 2209	1.59590 6244
71	1.57767 7616	1.58869 2661	1.59980 6301	1.61099 7766	1.62224 3223	1.63351 5471
72	1.61182 0772	1.62363 7127	1.63558 3701	1.64763 9889	1.65978 1708	1.67198 1413
73	1.64652 7998	1.65919 6998	1 67203 2816	1.68501 5461	1.69812 1264	1.71132 2402
74	1.68179 8648	1.69537 3565	1.70915 7392	1.72313 1307	1.73727 2545	1.75155 3820
75	1.71762 9353	1.73216 5161	1.74695 7987	1.76199 0854	1.77724 2632	1.79268 7358
76	1.75401 3710	1.76956 6777	1.78543 1501	1.80159 3555	1.81803 4340	1.83473 0190
77	1.79094 1976	1.80756 9677	1.82457 0692	1.84193 4295	1.85964 5481	1.87768 4075
78	1.82840 0773	1.84616 1019	1.86436 3702	1.88300 2781	1.90206 8096	1.92154 4391
79	1.86637 2827	1.88532 3510	1.90479 3590	1.92478 2941	1.94528 7682	1.96629 9145
80	1.90483 6739	1.92503 5093	1.94583 7919	1.96725 2367	1.98928 2444	2.01192 7981
81	1.94376 6816	1.96526 8703	1.98746 8403	2.01038 1817	2.03402 2611	2.05840 1245
82	1.98313 2981	2.00599 2101	2.02965 0648	2.05413 4828	2.07946 9864	2.10567 9166
83	2.02290 0744	2.04716 7808	2.07234 4013	2.09846 7470	2.12557 6934	2.15371 1219
84	2.06303 1293	2.08875 3163	2.11550 1620	2.14332 8276	2.17228 7413	2.20243 5751
85	2.10348 1685	2.13070 0515	2.15907 0534	2.18865 8393	2.21953 5835	2.25177 9950
86	2.14420 5151	2.17295 7558	2.20299 2130	2.23439 1967	2.26724 8070	2.30166 0207
87	2.18515 1512	2.21546 7819	2.24720 2653	2.28045 6787	2.31534 2053	2.35198 2931
88	2.22626 7708	2 25817 1284	2.29163 3966	2.32677 5180	2.36372 8853	2.40264 5825
89	2.26749 8425	2.30100 5177	2.33621 4474	2.37326 5140	2.41231 4063	2.45353 9601
90	2.30878 6798	2.34390 4724	2.38087 0191	2.41984 1654	2.46099 9458	2.50455 0079

φ.	E (70°).	E (71°).	E (72°).	E (73°).	E (74°).	E (75°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 000
1	0.01745 2510	0.01745 2500	0.01745 2491	0.01745 2482	0.01745 2474	0.01745 246
2	0.03490 0326	0.03490 0248	0.03490 0174	0.03490 0102	0.03490 0036	0.03489 997
3	0.05233 8756	0.05233 8493	0.05233 8242	0.05233 8001	0.05233 7775	0.05233 755
4	0.06976 3111	0.06976 2488	0.06976 1892	0.06976 1323	0.06976 0785	0.06976 027
5	0.08716 8708	0.08716 7491	0.08716 6327	0.08716 5217	0.08716 4164	0.08716 316
6	0.10455 0873	0.10454 8770	0.10454 6758	0.10454 4840	0.10454 3019	0.10454 129
7	0.12190 4941	0.12190 1600	0.12189 8404	0.12189 5358	0.12189 2466	0.12188 972
8	0.13922 6258	0.13922 1269	0.13921 6497	0.13921 1949	0.13920 7630	0.13920 354
9	0.15651 0184	0.15650 3078	0.15649 6281	0.15648 9803	0.15648 3651	0.15647 783
10	0.17375 2095	0.17374 2343	0.17373 3015	0.17372 4126	0.17371 5683	0.17370 769
11	0.19094 7383	0.19093 4398	0.19092 1977	0.19091 0140	0.19089 8897	0.19088 826
12	0.20809 1462	0.20807 4595	0.20805 8462	0.20804 3086	0.20802 8482	0.20801 466
13	0.22517 9765	0.22515 8309	0.22513 7786	0.22511 8226	0.22509 9647	0.22508 207
14	0.24220 7750	0.24218 0937	0.24215 5289	0.24213 0844	0.24210 7624	0.24208 566
15	0.25917 0899	0.25913 7900	0.25910 6335	0.25907 6248	0.25904 7669	0.25902 063
16	0.27606 4723	0.27602 4648	0.27598 6314	0.27594 9773	0.27591 5063	0.27588 223
17	0.29288 4762	0.29283 6660	0.29279 0646	0.29274 6782	0.29270 5116	0.29266 570
18	0.30962 6586	0.30956 9444	0.30951 4781	0.30946 2669	0.30941 3168	0.30936 634
19	0.32628 5801	0.32621 8544	0.32615 4202	0.32609 2859	0.32603 4589	0.32597 946
20	0.34285 8048	0.34277 9537	0.34270 4426	0.34263 2812	0.34256 4784	0.34250 043
21	0.35933 9005	0.35924 8038	0.35916 1007	0.35907 8024	0.35899 9193	0.35892 461
22	0.37572 4391	0.37561 9702	0.37551 9538	0.37542 4029	0.37533 3295	0.37524 745
23	0.39200 9966	0.39189 0224	0.39177 5653	0.39166 6400	0.39156 2606	0.39146 440
24	0.40819 1534	0.40805 5344	0.40792 5028	0.40780 0755	0.40768 2685	0.40757 097
25	0.42426 4948	0.42411 0847	0.42396 3385	0.42382 2753	0.42368 9134	0.42356 270
26	0.44022 6107	0.44005 2567	0.43988 6493	0.43972 8102	0.43957 7602	0.43943 519
27	0.45607 0963	0.45587 6387	0.45569 0170	0.45551 2558	0.45534 3784	0.45518 407
28	0.47179 5521	0.47157 8243	0.47137 0287	0.47117 1927	0.47098 3426	0.47080 503
29	0.48739 5841	0.48715 4127	0.48692 2767	0.48670 2068	0.48649 2326	0.48629 382
30	0.50286 8042	0.50260 0087	0.50234 3590	0.50209 8896	0.50186 6334	0.50164 622
31	0.51820 8304	0.51791 2230	0.51762 8795	0.51735 8383	0.51710 1359	0.51685 808
32	0.53341 2871	0.53308 6728	0.53277 4482	0.53247 6560	0.53219 3368	0.53192 530
33	0.54847 8051	0.54811 9815	0.54777 6815	0.54744 9522	0.54713 8388	0.54684 385
34	0.56340 0223	0.56300 7795	0.56263 2023	0.56227 3428	0.56193 2511	0.56160 975
35	0.57817 5837	0.57774 7040	0.57733 6405	0.57694 4505	0.57657 1893	0.57621 909
36	0.59280 1418	0.59233 3997	0.59188 6331	0.59145 9048	0.59105 2759	0.59066 864
37	0.60727 3567	0.60676 5188	0.60627 8245	0.60581 3427	0.60537 1407	0.60495 282
38	0.62158 8967	0.62103 7214	0.62050 8668	0.62000 4087	0.61952 4206	0.61906 972
39	0.63574 4384	0.63514 6758	0.63457 4203	0.63402 7550	0.63350 7602	0.63301 512
40	0.64973 6673	0.64909 0590	0.64847 1536	0.64788 0422	0.64731 8123	0.64678 547
41	0.66356 2779	0.66286 5567	0.66219 7440	0.66155 9391	0.66095 2376	0.66037 730
42	0.67721 9742	0.67646 8639	0.67574 8777	0.67506 1235	0.67440 7056	0.67378 723
43	0.69070 4700	0.68989 6854	0.68912 2504	0.68838 2824	0.68767 8947	0.68701 195
44	0.70401 4894	0.70314 7359	0.70231 5677	0.70152 1122	0.70076 4925	0.70004 826
45	0.71714 7672	0.71621 7407	0.71532 5452	0.71447 3192	0.71366 1962	0.71289 304

φ.	F(70°).	F(71°).	F(72°).	F(73°).	F(74°).	F(75°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4075	0.01745 4085	0.01745 4094	0.01745 4103	0.01745 4111	0.01745 4120
2	0.03491 2846	0.03491 2924	0.03491 2998	0.03491 3070	0.03491 3137	0.03491 3201
3	0.05238 1015	0.05238 1278	0.05238 1529	0.05238 1770	0.05238 1998	0.05238 2214
4	0.06986 3295	0.06986 3919	0.06986 4516	0.06986 5086	0.06986 5627	0.06986 6139
5	0.08736 4416	0.08736 5637	0.08736 6805	0.08736 7920	0.08736 8978	0.08736 9980
6	0.10488 9130	0.10489 1245	0.10489 3268	0.10489 5198	0.10489 7030	0.10489 8764
7	0.12244 2219	0.12244 5586	0.12244 8807	0.12245 1879	0.12245 4795	0.12245 7555
8	0.14002 8499	0.14003 3539	0.14003 8361	0.14004 2959	0.14004 7324	0.14005 1456
9	0.15765 2825	0.15766 0025	0.15766 6912	0.15767 3480	0.15767 9715	0.15768 5617
10	0.17532 0101	0.17533 0012	0.17533 9493	0.17534 8535	0.17535 7119	0.17536 5245
11	0.19303 5281	0.19304 8524	0.19306 1193	0.19307 3276	0.19308 4748	0.19309 5607
12	0.21080 3379	0.21082 0646	0.21083 7165	0.21085 2920	0.21086 7881	0.21088 2042
13	0.22862 9474	0.22865 1530	0.22867 2632	0.22869 2758	0.22871 1873	0.22872 9965
14	0.24651 8717	0.24654 6404	0.24657 2895	0.24659 8162	0.24662 2163	0.24664 4878
15	0.26447 6339	0.26451 0577	0.26454 3340	0.26457 4591	0.26460 4279	0.26463 2377
16	0.28250 7655	0.28254 9149	0.28258 9446	0.28262 7601	0.28266 3851	0.28269 8161
17	0.30061 8074	0.30066 8515	0.30071 6793	0.30076 2852	0.30080 66[illegible]6	0.30084 8040
18	0.31881 3104	0.31887 3376	0.31893 1071	0.31898 6118	0.31903 8429	0.31908 7947
19	0.33709 8363	0.33716 9746	0.33723 8085	0.33730 3294	0.33736 5270	0.33742 3942
20	0.35547 9585	0.35556 3460	0.35564 3769	0.35572 0408	0.35579 3258	0.35586 2230
21	0.37396 2628	0.37406 0484	0.37415 4193	0.37424 3629	0.37432 8656	0.37440 9165
22	0.39255 3483	0.39266 6922	0.39277 5570	0.39287 9278	0.39297 7886	0.39307 1267
23	0.41125 8283	0.41138 9028	0.41151 4271	0.41163 3836	0.41174 7539	0.41185 5228
24	0.43008 3313	0.43023 3215	0.43037 6832	0.43051 3959	0.43064 4384	0.43076 7927
25	0.44903 5019	0.44920 6064	0.44936 9967	0.44952 6488	0.44967 5384	0.44981 6445
26	0.46812 0019	0.46831 4339	0.46850 0579	0.46867 8462	0.46884 7709	0.46900 8074
27	0.48734 5112	0.48756 4993	0.48777 5771	0.48797 7129	0.48816 8747	0.48835 0338
28	0.50671 7292	0.50696 5183	0.50720 2862	0.50742 9962	0.50764 6120	0.50785 1001
29	0.52624 3756	0.52652 2284	0.52678 9397	0.52704 4673	0.52728 7699	0.52751 8090
30	0.54593 1919	0.54624 3899	0.54654 3163	0.54682 9228	0.54710 1623	0.54735 9908
31	0.56578 9425	0.56613 7875	0.56647 2204	0.56679 1861	0.56709 6312	0.56738 5053
32	0.58582 4162	0.58621 2317	0.58658 4836	0.58694 1096	0.58728 0488	0.58760 2439
33	0.60604 4275	0.60647 5601	0.60688 9665	0.60728 5759	0.60766 3193	0.60802 1316
34	0.62645 8180	0.62693 6395	0.62739 5603	0.62783 5002	0.62825 3811	0.62865 1291
35	0.64707 4580	0.64760 3672	0.64811 1888	0.64859 8321	0.64906 2089	0.64950 2354
36	0.66790 2481	0.66848 6729	0.66904 8102	0.66958 5577	0.67009 8160	0.67058 4901
37	0.68895 1210	0.68959 5205	0.69021 4193	0.69080 7021	0.69137 2568	0.69130 9761
38	0.71023 0429	0.71093 9102	0.71162 0496	0.71227 3315	0.71289 6295	0.71348 8227
39	0.73175 0156	0.73252 8804	0.73327 7758	0.73399 5560	0.73468 0790	0.73533 2083
40	0.75352 0784	0.75437 5101	0.75519 7159	0.75598 5322	0.75673 7995	0.75745 3639
41	0.77555 3101	0.77648 9208	0.77739 0339	0.77825 4661	0.77908 0381	0.77986 5766
42	0.79785 8308	0.79888 2792	0.79986 9428	0.80081 6161	0.80172 0981	0.80258 1934
43	0.82044 8042	0.82156 7996	0.82264 7070	0.82368 2964	0.82467 3424	0.82561 6255
44	0.84333 4399	0.84455 7463	0.84573 6455	0.84686 8802	0.84795 1978	0.84898 3517
45	0.86652 9957	0.86786 4366	0.86915 1352	0.87038 8035	0.87157 1586	0.87269 9237

φ.	E(70°).	E(71°).	E(72°).	E(73°).	E(74°).	E(75°).
45°	0.71714 7672	0.71621 7407	0.71532 5452	0.71447 3192	0.71366 1962	0.71289 304
46	0.73010 0495	0.72910 4358	0.72814 9093	0.72723 6202	0.72636 7131	0.72554 327
47	0.74287 0939	0.74180 5687	0.74078 3974	0.73980 7426	0.73887 7610	0.73799 603
48	0.75545 6701	0.75431 8987	0.75322 7585	0.75218 4252	0.75119 0685	0.75024 851
49	0.76785 5608	0.76664 1977	0.76547 7537	0.76436 4184	0.76330 3756	0.76229 801
50	0.78006 5617	0.77877 2505	0.77753 1567	0.77634 4851	0.77521 4342	0.77414 195
51	0.79208 4827	0.79070 8555	0.78938 7545	0.78812 4008	0.78692 0087	0.78577 784
52	0.80391 1481	0.80244 8253	0.80104 3480	0.79969 9547	0.79841 8765	0.79720 336
53	0.81554 3977	0.81398 9876	0.81249 7527	0.81106 9500	0.80970 8286	0.80841 620
54	0.82698 0873	0.82533 1858	0.82374 7991	0.82223 2048	0.82078 6705	0.81941 456
55	0.83822 0896	0.83647 2798	0.83479 3351	0.83318 5529	0.83165 2227	0.83019 624
56	0.84926 2952	0.84741 1471	0.84563 2237	0.84392 8447	0.84230 3218	0.84075 957
57	0.86010 6134	0.85814 6834	0.85626 3471	0.85445 9479	0.85273 8212	0.85110 292
58	0.87074 9735	0.86867 8041	0.86668 6062	0.86477 7487	0.86295 5921	0.86122 487
59	0.88119 3256	0.87900 4450	0.87689 9221	0.87488 1529	0.87295 5248	0.87112 416
60	0.89143 6420	0.88912 5638	0.88690 2372	0.88477 0871	0.88273 5296	0.88079 971
61	0.90147 9185	0.89904 1413	0.89669 5166	0.89444 5001	0.89229 5384	0.89025 060
62	0.91132 1758	0.90875 1830	0.90627 7498	0.90390 3643	0.90163 5059	0.89947 645
63	0.92096 4611	0.91825 7205	0.91564 9517	0.91314 6772	0.91075 4115	0.90847 660
64	0.93040 8497	0.92755 8134	0.92481 1650	0.92217 4636	0.91965 2608	0.91725 100
65	0.93965 4467	0.93665 5510	0.93376 4619	0.93098 7771	0.92833 0878	0.92579 978
66	0.94870 3890	0.94555 0543	0.94250 9460	0.93958 7025	0.93678 9570	0.93412 337
67	0.95755 8474	0.95424 4784	0.95104 7549	0.94797 3582	0.94502 9660	0.94222 251
68	0.96622 0288	0.96274 0147	0.95938 0624	0.95614 8986	0.95305 2479	0.95009 832
69	0.97469 1785	0.97103 8933	0.96751 0816	0.96411 5174	0.96085 9747	0.95775 227
70	0.98297 5826	0.97914 3861	0.97544 0676	0.97187 4503	0.96845 3603	0.96518 626
71	0.99107 5708	0.98705 8094	0.98317 3205	0.97942 9786	0.97583 6644	0.97240 264
72	0.99899 5189	0.99478 5269	0.99071 1890	0.98678 4330	0.98301 1962	0.97940 425
73	1.00673 8518	1.00232 9530	0.99806 0740	0.99394 1973	0.98998 3191	0.98619 448
74	1.01431 0462	1.00969 5562	1.00522 4323	1.00090 7131	0.99675 4553	0.99277 733
75	1.02171 6335	1.01688 8622	1.01220 7806	1.00768 4840	1.00333 0910	0.99915 744
76	1.02896 2025	1.02391 4574	1.01901 6992	1.01428 0801	1.00971 7817	1.00534 015
77	1.03605 4022	1.03077 9921	1.02565 8362	1.02070 1433	1.01592 1580	1.01133 161
78	1.04299 9438	1.03749 1835	1.03213 9113	1.02695 3915	1.02194 9312	1.01713 881
79	1.04980 6030	1.04405 8185	1.03846 7192	1.03304 6235	1.02780 8991	1.02276 966
80	1.05648 2213	1.05048 7556	1.04465 1329	1.03898 7228	1.03350 9514	1.02823 305
81	1.06303 7067	1.05678 9265	1.05070 1056	1.04478 6614	1.03906 0746	1.03353 894
82	1.06948 0336	1.06297 3367	1.05662 6724	1.05045 5017	1.04447 3555	1.03869 841
83	1.07582 2418	1.06905 0647	1.06243 9502	1.05600 3980	1.04975 9838	1.04372 367
84	1.08207 4341	1.07503 2601	1.06815 1362	1.06144 5955	1.05493 2525	1.04862 812
85	1.08824 7730	1.08093 1400	1.07377 5045	1.06679 4274	1.06000 5555	1.05342 631
86	1.09435 4753	1.08675 9840	1.07932 4010	1.07206 3097	1.06499 3828	1.05813 3931
87	1.10040 8061	1.09253 1271	1.08481 2357	1.07726 7331	1.06991 3118	1.06276 7670
88	1.10642 0711	1.09825 9511	1.09025 4733	1.08242 2523	1.07477 9955	1.06734 5141
89	1.11240 6074	1.10395 8746	1.09566 6213	1.08754 4727	1.07961 1471	1.07188 467
90	1.11837 7738	1.10964 3414	1.10106 2169	1.09265 0346	1.08442 5219	1.07640 511

φ.	F (70°).	F (71°).	F (72°).	F (73°).	F (74°).	F (75°).
45°	0.86652 9957	0 86786 4366	0 86915 1352	0.87038 8035	0.87157 1586	0.87269 9237
46	0.89004 7795	0 89150 2434	0.89290 6138	0.89425 5687	0.89554 7914	0.89677 9712
47	0.91390 1521	0.91518 5981	0.91701 5836	0.91848 7489	0.91989 7394	0.92124 2067
48	0.93810 5295	0.93982 9936	0 94149 6150	0.94309 9919	0.94463 7277	0.94610 4317
49	0 96267 3852	0.96454 9873	0.96636 3500	0.96811 0250	0.96978 5683	0.97138 5421
50	0.98762 2528	0 98966 2043	0 99163 5065	0.99353 6591	0.99536 1657	0.99710 5354
51	1.01296 7279	1.01518 3403	1.01732 8818	1.01939 7943	1.02138 5227	1.02328 5169
52	1.03872 4708	1.04113 1650	1.04346 3569	1.04571 4243	1.04787 7468	1.04994 7077
53	1.06491 2084	1.06752 5248	1.07005 9005	1.07250 6421	1.07486 0563	1.07711 4521
54	1.09154 7362	1.09438 3459	1.09713 5729	1.09979 6449	1.10235 7873	1.10481 2258
55	1.11864 9198	1.12172 6370	1.12471 5303	1.12760 7400	1.13039 4008	1.13306 6451
56	1.14623 6961	1.14957 4918	1.15282 0285	1.15596 3499	1.15899 4895	1.16190 4755
57	1.17433 0743	1.17795 0908	1.18147 4264	1.18489 0177	1.18818 7856	1.19135 6415
58	1.20295 1356	1.20687 7032	1.21070 1894	1.21441 4122	1.21800 1677	1.22145 2366
59	1.23212 0327	1.23637 6874	1.24052 8916	1.24456 3329	1.24846 6686	1.25222 5332
60	1.26185 9883	1.26647 4909	1.27098 2182	1.27536 7139	1.27961 4817	1.28370 9928
61	1.29219 2916	1.29179 6493	1.30208 9659	1.30685 6276	1.31147 9680	1.31594 2763
62	1.32314 2942	1.32856 7829	1.33388 0425	1.33906 2867	1.34409 6615	1.34896 2535
63	1.35473 4035	1.36061 5928	1.36638 4646	1.37202 0451	1.37750 2737	1.38281 0121
64	1.38699 0740	1.39336 8532	1.39963 3530	1.40576 3962	1.41173 6962	1.41752 8656
65	1.41993 7958	1.42685 4020	1.43365 9251	1.44032 9692	1.44684 0011	1.45316 3588
66	1.45360 0800	1.46110 1275	1.46849 4844	1.47575 5213	1.48285 4380	1.48976 2713
67	1.48800 4402	1.49613 9508	1.50417 4047	1.51207 9256	1.51982 4267	1.52737 6164
68	1.52317 3691	1.53199 8034	1.54073 1095	1.54934 1536	1.55779 5445	1.56605 6353
69	1.55913 3104	1.56870 5989	1.57820 0447	1.58758 2505	1.59681 5059	1.60585 7841
70	1.59590 6244	1 60629 1974	1.61661 6435	1.62684 3018	1.63693 1336	1 64683 7113
71	1.63351 5471	1 64478 3625	1 65601 2820	1.66716 3897	1.67819 3176	1.68905 2235
72	1.67198 1413	1.68420 7087	1.69642 2238	1.70858 5365	1.72064 9602	1.73256 2353
73	1.71132 2402	1.72458 6386	1.73787 5521	1.75114 6331	1.76434 9036	1.77742 6998
74	1.75155 3820	1.76594 2692	1.78040 0878	1.79488 3503	1.80933 8364	1.82370 5143
75	1.79268 7358	1.80829 3463	1.82402 2922	1.83983 0298	1.85566 1752	1.87145 3964
76	1.83473 0190	1.85165 1468	1.86876 1528	1.88601 5535	1.90335 9180	1.92072 7240
77	1.87768 4075	1.89602 3695	1.91463 0525	1.93346 1893	1.95246 4654	1.97157 3334
78	1.92154 4391	1.94141 0158	1.96163 6234	1.98218 4137	2.00300 4082	2.02403 2706
79	1.96629 9145	1.98780 2630	2.00977 5863	2.03218 7098	2.05499 2806	2.07813 4920
80	2.01192 7981	2.03518 3347	2 05903 5819	2.08346 3518	2.10843 2818	2.13389 5144
81	2.05840 1245	2.08352 3731	2.10938 9994	2.13599 1750	2.16330 9741	2.19131 0204
82	2.10567 9166	2.13278 3232	2.16079 8135	2.18973 3489	2.21958 9703	2.25035 4329
83	2.15371 1219	2.18290 8361	2.21320 4408	2.24463 1678	2.27721 6310	2.31097 4823
84	2.20243 5751	2.23383 2036	2.26653 6322	2 30060 8799	2.33610 7997	2.37308 8039
85	2 25177 9950	2 28547 3348	2.32070 4164	2.35756 5779	2.39615 7101	2.43657 6136
86	2.30166 0207	2.33773 7842	2.37560 1108	2.41538 1760	2.45722 4027	2.50128 5197
87	2.35198 2931	2.39051 8402	2.43110 4124	2.47391 4954	2.51914 7864	2.56702 5290
88	2.40264 5825	2.44369 6766	2.48707 5763	2.53300 4706	2.58173 8723	2.63357 2959
89	2.45353 9601	2.49714 5656	2.54336 6813	2.59247 4820	2.64478 6880	2.70067 6392
90	2.50455 0079	2 55073 1450	2.59981 9730	2.65213 8005	2.70806 7615	2.76806 3145

φ.	E (75°).	E (76°).	E (77°).	E (78°).	E (79°).	E (80°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2465	0.01745 2458	0.01745 2451	0.01745 2445	0.01745 2439	0.01745 2433
2	0.03489 9970	0.03489 9912	0.03489 9855	0.03489 9803	0.03489 9755	0.03489 9711
3	0.05233 7558	0.05233 7357	0.05233 7167	0.05233 6991	0.05233 6828	0.05233 6678
4	0.06976 0273	0.06975 9794	0.06975 9345	0.06975 8926	0.06975 8539	0.06975 8185
5	0.08716 3166	0.08716 2230	0.08716 1352	0.08716 0534	0.08715 9778	0.08715 9085
6	0.10454 1295	0.10453 9676	0.10453 8158	0.10453 6745	0.10453 5439	0.10453 4241
7	0.12188 9728	0.12188 7156	0.12188 4745	0.12188 2500	0.12188 0425	0.12187 8521
8	0.13920 3543	0.13919 9701	0.13919 6100	0.13919 2748	0.13918 9649	0.13918 6807
9	0.15647 7831	0.15647 2357	0.15646 7228	0.15646 2453	0.15645 8039	0.15645 3990
10	0.17370 7697	0.17370 0183	0.17369 3144	0.17368 6591	0.17368 0533	0.17367 4975
11	0.19088 8263	0.19087 8256	0.19086 8882	0.19086 0155	0.19085 2087	0.19084 4685
12	0.20801 4669	0.20800 1668	0.20798 9492	0.20797 8155	0.20796 7673	0.20795 8058
13	0.22508 2075	0.22506 5535	0.22505 0043	0.22503 5620	0.22502 2283	0.22501 0050
14	0.24208 5663	0.24206 4990	0.24204 5627	0.24202 7600	0.24201 0930	0.24199 5640
15	0.25902 0638	0.25899 5193	0.25897 1359	0.25894 9169	0.25892 8649	0.25890 9827
16	0.27588 2233	0.27585 1326	0.27582 2377	0.27579 5424	0.27577 0499	0.27574 7635
17	0.29266 5706	0.29262 8602	0.29259 3848	0.29256 1489	0.29253 1565	0.29250 4115
18	0.30936 6345	0.30932 2260	0.30928 0966	0.30924 2516	0.30920 6960	0.30917 4342
19	0.32597 9469	0.32592 7570	0.32587 8956	0.32583 3689	0.32579 1827	0.32575 3423
20	0.34250 0431	0.34243 9836	0.34238 3074	0.34233 0219	0.34228 1339	0.34223 6495
21	0.35892 4619	0.35885 4395	0.35878 8613	0.35872 7355	0.35867 0703	0.35861 8728
22	0.37524 7456	0.37516 6622	0.37509 0897	0.37502 0379	0.37495 5160	0.37489 5325
23	0.39146 4406	0.39137 1928	0.39128 5292	0.39120 4611	0.39112 9989	0.39106 1525
24	0.40757 0974	0.40746 5767	0.40736 7202	0.40727 5408	0.40719 0506	0.40711 2606
25	0.42356 2706	0.42344 3632	0.42333 2072	0.42322 8170	0.42313 2066	0.42304 3885
26	0.43943 5193	0.43930 1063	0.43917 5389	0.43905 8339	0.43895 0068	0.43885 0721
27	0.45518 4075	0.45503 3644	0.45489 2689	0.45476 1401	0.45463 9954	0.45452 8513
28	0.47080 5039	0.47063 7007	0.47047 9552	0.47033 2887	0.47019 7211	0.47007 2707
29	0.48629 3825	0.48610 6836	0.48593 1607	0.48576 8379	0.48561 7373	0.48547 8796
30	0.50164 6223	0.50143 8864	0.50124 4536	0.50106 3506	0.50089 6024	0.50074 2319
31	0.51685 8080	0.51662 8881	0.51641 4072	0.51621 3952	0.51602 8799	0.51585 8868
32	0.53192 5301	0.53167 2731	0.53143 6004	0.53121 5453	0.53101 7384	0.53082 4084
33	0.54684 3850	0.54656 6319	0.54630 6180	0.54606 3801	0.54583 9523	0.54563 3663
34	0.56160 9752	0.56130 5608	0.56102 0503	0.56075 4846	0.56050 9014	0.56028 3357
35	0.57621 9098	0.57588 6625	0.57557 4942	0.57528 4500	0.57501 5714	0.57476 8973
36	0.59066 8046	0.59030 5463	0.58996 5527	0.58964 8734	0.58935 5542	0.58908 6381
37	0.60495 2822	0.60455 8281	0.60418 8354	0.60384 3585	0.60352 4480	0.60323 1509
38	0.61906 9724	0.61864 1309	0.61823 9588	0.61786 5157	0.61751 8572	0.61720 0350
39	0.63301 5125	0.63255 0851	0.63211 5465	0.63170 9622	0.63133 3932	0.63098 8961
40	0.64678 5476	0.64628 3283	0.64581 2293	0.64537 3224	0.64496 6742	0.64459 3468
41	0.66037 7308	0.65983 5062	0.65932 6458	0.65885 2279	0.65841 3255	0.65801 0066
42	0.67378 7235	0.67320 2725	0.67265 4422	0.67214 3182	0.67166 9800	0.67123 5019
43	0.68701 1957	0.68638 2892	0.68579 2730	0.68524 2403	0.68473 2779	0.68426 4670
44	0.70004 8265	0.69937 2272	0.69873 8011	0.69814 6496	0.69759 8675	0.69709 5433
45	0.71289 3043	0.71216 7663	0.71148 6981	0.71085 2100	0.71026 4054	0.70972 3805

φ.	F(75°).	F(76°).	F(77°).	F(78°).	F(79°).	F(80°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4120	0.01745 4127	0.01745 4134	0.01745 4140	0.01745 4146	0.01745 4152
2	0.03491 3201	0.03491 3261	0.03491 3317	0.03491 3369	0.03491 3418	0.03491 3462
3	0.05238 2214	0.05238 2416	0.05238 2606	0.05238 2782	0.05238 2946	0.05238 3096
4	0.06986 6139	0.06986 6620	0.06986 7071	0.06986 7490	0.06986 7878	0.06986 8234
5	0.08736 9980	0.08737 0920	0.08737 1802	0.08737 2623	0.08737 3382	0.08737 4079
6	0.10489 8764	0.10490 0393	0.10490 1921	0.10490 3343	0.10490 4657	0.10490 5863
7	0.12245 7555	0.12246 0149	0.12246 2581	0.12246 4845	0.12246 6938	0.12246 8858
8	0.14005 1456	0.14005 5341	0.14005 8981	0.14006 2371	0.14006 5505	0.14006 8380
9	0.15768 5617	0.15769 1168	0.15769 6369	0.15770 1212	0.15770 5690	0.15770 9798
10	0.17536 5245	0.17537 2888	0.17538 0050	0.17538 6719	0.17539 2886	0.17539 8543
11	0.19309 5607	0.19310 5824	0.19311 5397	0.19312 4310	0.19313 2554	0.19314 0116
12	0.21088 2042	0.21089 5368	0.21090 7853	0.21091 9480	0.21093 0233	0.21094 0098
13	0.22872 9965	0.22874 6993	0.22876 2948	0.22877 7806	0.22879 1548	0.22880 4156
14	0.24664 4878	0.24666 6262	0.24668 6299	0.24670 4959	0.24672 2218	0.24673 8054
15	0.26463 2377	0.26465 8833	0.26468 3623	0.26470 6712	0.26472 8068	0.26474 7663
16	0.28269 8161	0.28273 0471	0.28276 0748	0.28278 8948	0.28281 5034	0.28283 8971
17	0.30084 8040	0.30088 7055	0.30092 3616	0.30095 7673	0.30098 9179	0.30101 8092
18	0.31908 7947	0.31913 4589	0.31917 8303	0.31921 9025	0.31925 6700	0.31929 1276
19	0.33742 3942	0.33747 9213	0.33753 1019	0.33757 9283	0.33762 3940	0.33766 4926
20	0.35586 2230	0.35592 7212	0.35598 8126	0.35604 4881	0.35609 7398	0.35614 5602
21	0.37440 9165	0.37448 5028	0.37455 6147	0.37462 2418	0.37468 3745	0.37474 0041
22	0.39307 1267	0.39315 9270	0.39324 1779	0.39331 8671	0.39338 9835	0.39345 5166
23	0.41185 5228	0.41195 6728	0.41205 1904	0.41214 0610	0.41222 2717	0.41229 8101
24	0.43076 7927	0.43088 4387	0.43099 3604	0.43109 5409	0.43118 9651	0.43127 6186
25	0.44981 6445	0.44994 9437	0.45007 4175	0.45019 0464	0.45029 8125	0.45039 6993
26	0.46900 8074	0.46915 9292	0.46930 1144	0.46943 3404	0.46955 5868	0.46966 8343
27	0.48835 0338	0.48852 1600	0.48868 2279	0.48883 2115	0.48897 0870	0.48909 8324
28	0.50785 1001	0.50804 4264	0.50822 5613	0.50839 4749	0.50855 1400	0.50869 5310
29	0.52751 8090	0.52773 5457	0.52793 9457	0.52812 9751	0.52830 6023	0.52846 7980
30	0.54735 9908	0.54760 3639	0.54783 2424	0.54804 5873	0.54824 3625	0.54842 5345
31	0.56738 5053	0.56765 7580	0.56791 3444	0.56815 2199	0.56837 3433	0.56857 6763
32	0.58760 2439	0.58790 6378	0.58819 1789	0.58845 8167	0.58870 5040	0.58893 1971
33	0.60802 1316	0.60835 9480	0.60867 7098	0.60897 3594	0.60924 8431	0.60950 1111
34	0.62865 1291	0.62902 6710	0.62937 9398	0.62970 8701	0.63001 4010	0.63029 4756
35	0.64950 2354	0.64991 8290	0.65030 9134	0.65067 4145	0.65101 2631	0.65132 3944
36	0.67058 4901	0.67104 4869	0.67147 7196	0.67188 1044	0.67225 5629	0.67260 0213
37	0.69190 9761	0.69241 7551	0.69289 4952	0.69334 1017	0.69375 4856	0.69413 5633
38	0.71348 8227	0.71404 7926	0.71457 4278	0.71506 6212	0.71552 2718	0.71594 2851
39	0.73533 2083	0.73594 8106	0.73652 7597	0.73706 9348	0.73757 2216	0.73803 5130
40	0.75745 3639	0.75813 0755	0.75876 7917	0.75936 3760	0.75991 6991	0.76042 6398
41	0.77986 5766	0.78060 9133	0.78130 8870	0.78196 3435	0.78257 1369	0.78313 1298
42	0.80258 1934	0.80339 7135	0.80416 4759	0.80488 3068	0.80555 0414	0.80616 5242
43	0.82561 6255	0.82650 9334	0.82735 0606	0.82813 8112	0.82886 9987	0.82954 4475
44	0.84898 3517	0.84996 1030	0.85088 2206	0.85174 4832	0.85254 6804	0.85328 6135
45	0.87269 9237	0.87376 8302	0.87477 6178	0.87572 0371	0.87659 8504	0.87740 8330

φ.	E(75°).	E(76°).	E(77°).	E(78°).	E(79°).	E(80°).
45°	0.71289 3043	0.71216 7663	0.71148 6981	0.71085 2100	0.71026 4054	0.70972 3805
46	0.72554 3272	0.72476 5957	0.72403 6448	0.72335 5941	0.72272 5563	0.72214 6362
47	0.73799 6034	0.73716 4145	0.73638 3311	0.73565 4835	0.73497 9939	0.73435 9765
48	0.75024 8517	0.74935 9318	0.74852 4572	0.74774 5692	0.74702 4008	0.74636 0761
49	0.76229 8019	0.76134 8674	0.76045 7330	0.75962 5522	0.75885 4692	0.75814 6189
50	0.77414 1952	0.77312 9521	0.77217 8794	0.77129 1434	0.77046 9008	0.76971 2979
51	0.78577 7848	0.78469 9284	0.78368 6281	0.78274 0646	0.78186 4075	0.78105 8159
52	0.79720 3366	0.79605 5506	0.79497 7226	0.79397 0483	0.79303 7119	0.79217 8858
53	0.80841 6296	0.80719 5858	0.80604 9184	0.80497 8390	0.80398 5173	0.80307 2307
54	0.81941 4566	0.81811 8144	0.81689 9835	0.81576 1929	0.81470 6589	0.81373 5849
55	0.83019 6249	0.82882 0309	0.82752 6996	0.82631 8790	0.82519 8036	0.82416 6939
56	0.84075 9573	0.83930 0442	0.83792 8622	0.83664 6798	0.83545 7518	0.83436 3151
57	0.85110 2928	0.84955 6788	0.84810 2816	0.84674 3916	0.84518 2840	0.84432 2183
58	0.86122 4876	0.85958 7759	0.85824 7838	0.85660 8256	0.85527 1993	0.85404 1866
59	0.87112 4160	0.86939 1939	0.86776 2115	0.86623 8088	0.86482 3087	0.86352 0168
60	0.88079 9718	0.87896 8098	0.87724 4249	0.87563 1847	0.87413 4394	0.87275 5204
61	0.89025 0696	0.88831 5205	0.88649 3031	0.88478 8149	0.88320 4354	0.88174 5244
62	0.89947 6458	0.89743 2440	0.89550 7453	0.89370 5796	0.89203 1584	0.89048 8724
63	0.90847 6609	0.90631 9212	0.90428 6724	0.90238 3798	0.90061 4894	0.89898 4258
64	0.91725 1007	0.91497 5171	0.91283 0285	0.91082 1383	0.90895 3300	0.90723 0649
65	0.92579 9784	0.92340 0236	0.92113 7832	0.91901 8017	0.91704 6037	0.91522 6908
66	0.93412 3370	0.93159 4609	0.92920 9336	0.92697 3425	0.92489 2585	0.92297 2268
67	0.94222 2516	0.93955 8804	0.93704 5045	0.93468 7614	0.93249 2688	0.93046 6207
68	0.95009 8324	0.94729 3674	0.94464 5566	0.94216 0899	0.93984 6379	0.93770 8471
69	0.95775 2274	0.95480 0442	0.95201 1841	0.94939 3937	0.94695 4009	0.94469 9102
70	0.96518 6263	0.96208 0737	0.95914 5210	0.95638 7757	0.95381 6285	0.95143 8469
71	0.97240 2640	0.96913 6634	0.96604 7445	0.96314 3808	0.96043 4306	0.95792 7312
72	0.97940 4252	0.97597 0700	0.97272 0802	0.96966 3999	0.96680 9614	0.96416 6778
73	0.98619 4489	0.98258 6044	0.97916 8068	0.97595 0763	0.97294 4218	0.97015 8485
74	0.99277 7339	0.98898 6372	0.98539 2625	0.98200 7109	0.97884 0804	0.97590 4579
75	0.99915 7443	0.99517 6055	0.99139 8518	0.98783 6704	0.98450 2519	0.98140 7814
76	1.00534 0157	1.00116 0193	0.99719 0531	0.99344 3953	0.98993 3351	0.98667 1642
77	1.01133 1618	1.00694 4694	1.00277 4275	0.99883 4092	0.99513 8086	0.99170 0319
78	1.01713 8816	1.01253 6356	1.00815 6278	1.00401 3299	1.00012 2457	0.99649 9035
79	1.02276 9661	1.01794 2950	1.01334 4091	1.00898 8807	1.00489 3275	1.00107 4067
80	1.02823 3053	1.02317 3309	1.01834 6395	1.01376 9041	1.00945 8588	1.00543 2947
81	1.03353 8948	1.02823 7415	1.02317 3109	1.01836 3751	1.01382 7847	1.00958 4670
82	1.03869 8415	1.03314 6476	1.02783 5499	1.02278 4156	1.01801 2086	1.01353 9916
83	1.04372 3676	1.03791 2989	1.03234 6271	1.02704 3075	1.02202 4105	1.01731 1292
84	1.04862 8125	1.04255 0787	1.03671 9648	1.03115 5044	1.02587 8644	1.02091 3574
85	1.05342 6318	1.04707 5042	1.04097 1402	1.03513 6398	1.02959 2518	1.02436 3932
86	1.05813 3931	1.05150 2238	1.04511 8851	1.03900 5290	1.03318 4698	1.02768 2086
87	1.06276 7670	1.05585 0083	1.04918 0771	1.04278 1633	1.03667 6290	1.03089 0362
88	1.06734 5141	1.06013 7366	1.05317 7252	1.04648 6951	1.04009 0390	1.03401 3579
89	1.07188 4677	1.06438 3754	1.05712 9461	1.05014 4104	1.04345 1785	1.03707 8722
90	1.07640 5113	1.06860 9533	1.06105 9334	1.05377 6920	1.04678 6499	1.04011 4396

φ.	F(75°).	F(76°).	F(77°).	F(78°).	F(79°).	F(80°).
45°	0.87269 9237	0.87376 8302	0.87477 6178	0.87572 0371	0.87659 8504	0.87740 8330
46	0.89677 9712	0.89794 8062	0.89905 0034	0.90008 2817	0.90104 3724	0.90193 0214
47	0 92124 2067	0.92251 8115	0.92372 2240	0.92485 1270	0.92590 2173	0.92687 2074
48	0.94610 4317	0.94749 7224	0.94881 2288	0.95004 5931	0.95119 4727	0.95225 5424
49	0.97138 5421	0.97290 5177	0.97434 0775	0.97568 8179	0.97694 3518	0.97810 3110
50	0.99710 5354	0.99876 2865	1.00032 9490	1.00180 0674	1.00317 2141	1.00443 9424
51	1.02328 5169	1.02509 2357	1.02680 1498	1.02840 7452	1.02990 5270	1.03129 0230
52	1 04994 7077	1.05191 6991	1.05378 1248	1.05553 4044	1.05716 9781	1.05868 3104
53	1.07711 4521	1.07926 1463	1.08129 4672	1.08320 7594	1.08499 3891	1.08664 7488
54	1.10481 2258	1.10715 1926	1.10936 9307	1.11145 6996	1.11340 7813	1.11521 4858
55	1.13306 6451	1.13561 6079	1.13803 4419	1.14031 3039	1.14244 3819	1.14441 8918
56	1.16190 4755	1.16468 3555	1.16732 1134	1.16980 8563	1.17213 6425	1.17429 5801
57	1.19135 6415	1.19438 4925	1.19726 2593	1.19997 8638	1.20252 2598	1.20488 4311
58	1.22145 2366	1.22475 3902	1.22789 4097	1.23086 0751	1.23364 1971	1.23622 6172
59	1.25222 5332	1.25582 5454	1.25925 3285	1.26249 5009	1.26553 7094	1.26836 6318
60	1.28370 9928	1.28763 6943	1.29138 0307	1.29492 4363	1.29825 3702	1.30135 3213
61	1.31594 2763	1.32022 8066	1.32431 8014	1.32819 4848	1.33184 1007	1.33523 9202
62	1.34896 2535	1.35364 1002	1.35811 2155	1.36235 5840	1.36635 2025	1.37008 0904
63	1.38281 0121	1.38792 0552	1.39281 1583	1.39746 0332	1.40184 3927	1.40593 9647
64	1.41752 8656	1.42311 4279	1.42846 8466	1.43356 5223	1.43837 8420	1.44288 1952
65	1.45316 3588	1.45927 2632	1.46513 8489	1.47073 1625	1.47602 2157	1.48098 0063
66	1.48976 2713	1.49644 9058	1.50288 1064	1.50902 5169	1.51484 7183	1.52031 2532
67	1.52737 6164	1.53470 0075	1.54175 9503	1.54851 6323	1.55493 1393	1.56096 4856
68	1.56605 6353	1.57408 5305	1.58184 1181	1.58928 0688	1.59635 9013	1.60303 0167
69	1.60585 7841	1.61466 7446	1.62319 7628	1.63139 9276	1.63922 1089	1.64660 9966
70	1.64683 7113	1.65651 2149	1.66590 4562	1.67495 8726	1.68361 5948	1.69181 4892
71	1.68905 2235	1.69968 7781	1.71004 1803	1.72005 1438	1.72964 9618	1.73876 5505
72	1.73256 2353	1.74426 5022	1.75569 3034	1 76677 5575	1.77743 6159	1.78759 3036
73	1.77742 6998	1.79031 6254	1.80294 5345	1.81523 4854	1.82709 7825	1.83844 0066
74	1.82370 5143	1.83791 4673	1.85188 8487	1.86553 8061	1.87876 4978	1.89146 1010
75	1.87145 3964	1.88713 3051	1.90261 3730	1 91779 8142	1.93257 5604	1.94682 2305
76	1.92072 7240	1.93804 2064	1.95521 2223	1.97213 0750	1.98867 4269	2.00470 2066
77	1.97157 3334	1.99070 8091	2.00977 2696	2.02865 2019	2.04721 0233	2.06528 8939
78	2.02403 2706	2.04519 0371	2.06637 8355	2.08747 5353	2.10833 4427	2.12877 9715
79	2.07813 4920	2.10153 7463	2.12510 2807	2.14870 6952	2.17219 4857	2.19537 5155
80	2 13389 5144	2.15978 2927	2.18600 4861	2.21243 9773	2.23892 9961	2.26527 3261
81	2.19131 0204	2.21994 0244	2.24912 2128	2.27874 5684	2.30865 9371	2.33865 9082
82	2.25035 4329	2.28199 7092	2.31446 3442	2.34766 5656	2.38147 1626	2.41569 0023
83	2.31097 4823	2.34590 9231	2.38200 0341	2.41919 8096	2.45740 8567	2.49647 5729
84	2.37308 8040	2.41159 4470	2.45165 8139	2.49328 5824	2.53644 6712	2.58105 2135
85	2.43657 6137	2.47892 7378	2.52330 7475	2.56980 2810	2.61847 6760	2.66935 0448
86	2.50128 5198	2.54773 5614	2.59675 7647	2.64854 2513	2.70328 3726	2.76116 3994
87	2.56702 5291	2.61779 8834	2.67175 3276	2.72921 0333	2.79053 1625	2.85611 8747
88	2.63357 2960	2.68885 1060	2.74797 5893	2.81142 3003	2.87975 7703	2.95365 6298
89	2.70067 6392	2.76058 7039	2.82505 1583	2.89471 7290	2.97038 1101	3.05303 9141
90	2.76806 3145	2.83267 2583	2.90256 4941	2.97856 8952	3.06172 8612	3.15338 5252

φ.	E(80°).	E(81°).	E(82°).	E(83°).	E(84°).	E(85°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2433	0.01745 2428	0.01745 2424	0.01745 2420	0.01745 2416	0.01745 2413
2	0.03489 9711	0.03489 9670	0.03489 9634	0.03489 9602	0.03489 9574	0.03489 9551
3	0.05233 6678	0.05233 6542	0.05233 6420	0.05233 6312	0.05233 6218	0.05233 6138
4	0.06975 8185	0.06975 7862	0.06975 7573	0.06975 7316	0.06975 7094	0.06975 6905
5	0.08715 9085	0.08715 8455	0.08715 7890	0.08715 7389	0.08715 6954	0.08715 6585
6	0.10453 4241	0.10453 3152	0.10453 2174	0.10453 1309	0.10453 0557	0.10452 9919
7	0.12187 8521	0.12187 6792	0.12187 5239	0.12187 3864	0.12187 2669	0.12187 1656
8	0.13918 6807	0.13918 4224	0.13918 1905	0.13917 9852	0.13917 8067	0.13917 6554
9	0.15645 3990	0.15645 0311	0.15644 7007	0.15644 4082	0.15644 1540	0.15643 9384
10	0.17367 4975	0.17366 9926	0.17366 5392	0.17366 1378	0.17365 7889	0.17365 4929
11	0.19084 4685	0.19083 7961	0.19083 1922	0.19082 6576	0.19082 1931	0.19081 7987
12	0.20795 8058	0.20794 9322	0.20794 1477	0.20793 4531	0.20792 8496	0.20792 3373
13	0.22501 0050	0.22499 8935	0.22498 8953	0.22498 0116	0.22497 2437	0.22496 5919
14	0.24199 5640	0.24198 1747	0.24196 9269	0.24195 8223	0.24194 8624	0.24194 0477
15	0.25890 9827	0.25889 2725	0.25887 7365	0.25886 3767	0.25885 1949	0.25884 1920
16	0.27574 7635	0.27572 6861	0.27570 8203	0.27569 1684	0.27567 7327	0.27566 5144
17	0.29250 4115	0.29247 9173	0.29245 6770	0.29243 6937	0.29241 9698	0.29240 5071
18	0.30917 4342	0.30914 4704	0.30911 8083	0.30909 4514	0.30907 4028	0.30905 6646
19	0.32575 3423	0.32571 8528	0.32568 7184	0.32565 9433	0.32563 5311	0.32561 4844
20	0.34223 6495	0.34219 5747	0.34215 9146	0.34212 6739	0.34209 8570	0.34207 4669
21	0.35861 8728	0.35857 1498	0.35852 9074	0.35849 1511	0.35845 8859	0.35843 1155
22	0.37489 5325	0.37484 0950	0.37479 2107	0.37474 8859	0.37471 1265	0.37467 9368
23	0.39106 1525	0.39099 9307	0.39094 3418	0.39089 3930	0.39085 0910	0.39081 4409
24	0.40711 2606	0.40704 1812	0.40697 8217	0.40692 1904	0.40687 2951	0.40683 1415
25	0.42304 3885	0.42296 3746	0.42289 1753	0.42282 8003	0.42277 2582	0.42272 5558
26	0.43885 0721	0.43876 0429	0.43867 9314	0.43860 7484	0.43854 5037	0.43849 2051
27	0.45452 8513	0.45442 7226	0.45433 6230	0.45425 5648	0.45418 5591	0.45412 6146
28	0.47007 2707	0.46995 9544	0.46985 7875	0.46976 7838	0.46968 9559	0.46962 3137
29	0.48547 8796	0.48535 2836	0.48523 9667	0.48513 9442	0.48505 2303	0.48497 8361
30	0.50074 2319	0.50060 2604	0.50047 7070	0.50036 5893	0.50026 9227	0.50018 7200
31	0.51585 8868	0.51570 4397	0.51556 5600	0.51544 2671	0.51533 5784	0.51524 5082
32	0.53082 4084	0.53065 3816	0.53050 0818	0.53036 5307	0.53024 7475	0.53014 7484
33	0.54563 3663	0.54544 6514	0.54527 8339	0.54512 9381	0.54499 9849	0.54488 9930
34	0.56028 3357	0.56007 8198	0.55989 3833	0.55973 0526	0.55958 8512	0.55946 7998
35	0.57476 8973	0.57454 4634	0.57434 3022	0.57416 4430	0.57400 9119	0.57387 7315
36	0.58908 6381	0.58884 1643	0.58862 1686	0.58842 6836	0.58825 7379	0.58811 3565
37	0.60323 1509	0.60296 5106	0.60272 5665	0.60251 3544	0.60232 9058	0.60217 2485
38	0.61720 0350	0.61691 0967	0.61665 0857	0.61642 0413	0.61621 9983	0.61604 9870
39	0.63098 8961	0.63067 5232	0.63039 3223	0.63014 3363	0.62992 6036	0.62974 1574
40	0.64459 3468	0.64425 3976	0.64394 8789	0.64367 8377	0.64344 3162	0.64324 3509
41	0.65801 0066	0.65764 3338	0.65731 3644	0.65702 1501	0.65676 7369	0.65655 1650
42	0.67123 5019	0.67083 9527	0.67048 3947	0.67016 8848	0.66989 4730	0.66966 2034
43	0.68426 4670	0.68383 8825	0.68345 5927	0.68311 6596	0.68282 1381	0.68257 0763
44	0.69709 5433	0.69663 7587	0.69622 5883	0.69586 0997	0.69554 3529	0.69527 4004
45	0.70972 3805	0.70923 2245	0.70879 0187	0.70839 8370	0.70805 7448	0.70776 7994

φ.	F(80°).	F(81°).	F(82°).	F(83°).	F(84°).	F(85°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4152	0.01745 4157	0.01745 4162	0.01745 4165	0.01745 4169	0.01745 4172
2	0.03491 3462	0.03491 3502	0.03491 3539	0.03491 3571	0.03491 3599	0.03491 3622
3	0.05238 3096	0.05238 3232	0.05238 3354	0.05238 3463	0.05238 3557	0.05238 3636
4	0.06986 8234	0.06986 8557	0.06986 8847	0.06986 9104	0.06986 9328	0.06986 9517
5	0.08737 4079	0.08737 4711	0.08737 5279	0.08737 5782	0.08737 6219	0.08737 6590
6	0.10490 5863	0.10490 6959	0.10490 7943	0.10490 8814	0.10490 9571	0.10491 0213
7	0.12246 8858	0.12247 0603	0.12247 2170	0.12247 3557	0.12247 4762	0.12247 5785
8	0.14006 8380	0.14007 0992	0.14007 3338	0.14007 5415	0.14007 7220	0.14007 8752
9	0.15770 9798	0.15771 3530	0.15771 6882	0.15771 9850	0.15772 2429	0.15772 4618
10	0.17539 8543	0.17540 3682	0.17540 8299	0.17541 2387	0.17541 5940	0.17541 8953
11	0.19314 0116	0.19314 6987	0.19315 3159	0.19315 8624	0.19316 3374	0.19316 7403
12	0.21094 0098	0.21094 9061	0.21095 7113	0.21096 4242	0.21097 0440	0.21097 5697
13	0.22880 4156	0.22881 5612	0.22882 5904	0.22883 5016	0.22884 2938	0.22884 9658
14	0.24673 8054	0.24675 2444	0.24676 5372	0.24677 6819	0.24678 6771	0.24679 5213
15	0.26474 7663	0.26476 5472	0.26478 1471	0.26479 5637	0.26480 7954	0.26481 8403
16	0.28283 8971	0.28286 0727	0.28288 0272	0.28289 5780	0.28291 2629	0.28292 5396
17	0.30101 8092	0.30104 4371	0.30106 7981	0.30108 8890	0.30110 7070	0.30112 2494
18	0.31929 1276	0.31932 2705	0.31935 0944	0.31937 5953	0.31936 7699	0.31941 6149
19	0.33766 4926	0.33770 2184	0.33773 5662	0.33776 5313	0.33779 1097	0.33781 2974
20	0.35614 5602	0.35618 9425	0.35622 8805	0.35626 3685	0.35629 4017	0.35631 9755
21	0.37474 0041	0.37479 1225	0.37483 7222	0.37487 7966	0.37491 3399	0.37494 3468
22	0.39345 5166	0.39351 4569	0.39356 7958	0.39361 5252	0.39365 6383	0.39369 1289
23	0.41229 8101	0.41236 6651	0.41242 8265	0.41248 2850	0.41253 0325	0.41257 0616
24	0.43127 6186	0.43135 4883	0.43142 5623	0.43148 8297	0.43154 2812	0.43158 9081
25	0.45039 6993	0.45048 6914	0.45056 7751	0.45063 9378	0.45070 1683	0.45075 4568
26	0.46966 8343	0.46977 0650	0.46986 2631	0.46994 4139	0.47001 5045	0.47007 5234
27	0.48909 8324	0.48921 4270	0.48931 8522	0.48941 0913	0.48949 1292	0.48955 9528
28	0.50869 5310	0.50882 6242	0.50894 3982	0.50904 8335	0.50913 9130	0.50921 6213
29	0.52846 7980	0.52861 5352	0.52874 7890	0.52886 5370	0.52896 7596	0.52905 4390
30	0.54842 5345	0.54859 0721	0.54873 9469	0.54887 1333	0.54898 6084	0.54908 3523
31	0.56857 6763	0.56876 1831	0.56892 8313	0.55907 5915	0.56920 4375	0.56931 3462
32	0.58893 1971	0.58913 8552	0.58932 4411	0.58948 9213	0.58963 2657	0.58975 4481
33	0.60950 1111	0.60973 1168	0.60993 8178	0.61012 1758	0.61028 1565	0.61041 7299
34	0.63029 4756	0.63055 0408	0.63078 0487	0.63098 4551	0.63116 2210	0.63131 3123
35	0.65132 3944	0.65160 7483	0.65186 2699	0.65208 9091	0.65228 6215	0.65245 3680
36	0.67260 0213	0.67291 4114	0.67319 6706	0.67344 7422	0.67366 5754	0.67385 1258
37	0.69413 5633	0.69448 2573	0.69479 4967	0.69507 2166	0.69531 3597	0.69551 8751
38	0.71594 2851	0.71632 5730	0.71667 0550	0.71697 6576	0.71724 3154	0.71746 9707
39	0.73803 5130	0.73845 7091	0.73883 7185	0.73917 4579	0.73946 8527	0.73971 8377
40	0.76042 6398	0.76089 0850	0.76130 9309	0.76168 0829	0.76200 4566	0.76227 9775
41	0.78313 1298	0.78364 1943	0.78410 2125	0.78451 0774	0.78486 6928	0.78516 9743
42	0.80616 5242	0.80672 6105	0.80723 1666	0.80768 0709	0.80807 2144	0.80840 5013
43	0.82954 4475	0.83015 9936	0.83071 4856	0.83120 7854	0.83163 7695	0.83200 3287
44	0.85328 6135	0.85396 0969	0.85456 9589	0.85511 0430	0.85558 2087	0.85598 3323
45	0.87740 8330	0.87814 7747	0.87881 4810	0.87940 7742	0.87992 4947	0.88036 5019

φ.	E(80°).	E(81°).	E(82°).	E(83°).	E(84°).	E(85°).
45°	0.70972 3805	0.70923 2245	0.70879 0187	0.70839 8370	0.70805 7448	0.70776 799
46	0.72214 6362	0.72161 9308	0.72114 5290	0.72072 5110	0.72035 9484	0.72004 903
47	0.73435 9765	0.73379 5369	0.73328 7717	0.73283 7686	0.73244 6055	0.73211 350
48	0.74636 0761	0.74575 7100	0.74521 4077	0.74473 2645	0.74431 3655	0.74395 785
49	0.75814 6189	0.75750 1263	0.75692 1058	0.75640 6614	0.75595 8854	0.75557 859
50	0.76971 2979	0.76902 4707	0.76840 5437	0.76785 6299	0.76737 8300	0.76697 232
51	0.78105 8159	0.78032 4375	0.77966 4077	0.77907 8494	0.77856 8723	0.77813 572
52	0.79217 8858	0.79139 7305	0.79069 3933	0.79007 0077	0.78952 6934	0.78906 554
53	0.80307 2307	0.80224 0633	0.80149 2052	0.80082 8017	0.80024 9829	0.79975 862
54	0.81373 5849	0.81285 1600	0.81205 5581	0.81134 9374	0.81073 4394	0.81021 188
55	0.82416 6939	0.82322 7552	0.82238 1766	0.82163 1303	0.82097 7703	0.82042 232
56	0.83436 3151	0.83336 5949	0.83246 7961	0.83157 1060	0.83097 6923	0.83038 702
57	0.84432 2183	0.84326 4367	0.84231 1627	0.84146 6001	0.84072 9318	0.84010 318
58	0.85404 1866	0.85292 0504	0.85191 0339	0.85101 3590	0.85023 2250	0.84956 807
59	0.86352 0168	0.86233 2189	0.86126 1794	0.86031 1401	0.85948 3185	0.85877 906
60	0.87275 5204	0.87149 7384	0.87036 3813	0.86935 7126	0.86847 9695	0.86773 361
61	0.88174 5244	0.88041 4198	0.87921 4351	0.87814 8576	0.87721 9465	0.87642 930
62	0.89048 8724	0.88908 0891	0.88781 1502	0.88668 3693	0.88570 0296	0.88486 381
63	0.89898 4258	0.89749 5888	0.89615 3510	0.89496 0552	0.89392 0112	0.89303 493
64	0.90723 0649	0.90565 7787	0.90423 8779	0.90297 7374	0.90187 6965	0.90094 056
65	0.91522 6908	0.91356 5376	0.91206 5884	0.91073 2533	0.90956 9045	0.90857 873
66	0.92297 2268	0.92121 7648	0.91963 3583	0.91822 4568	0.91699 4691	0.91594 75
67	0.93046 6207	0.92861 3818	0.92694 0838	0.92545 2197	0.92415 2395	0.92304 544
68	0.93770 8471	0.93575 3345	0.93398 6827	0.93241 4334	0.93104 0821	0.92987 072
69	0.94469 9102	0.94263 5960	0.94077 0974	0.93911 0103	0.93765 8819	0.93642 203
70	0.95143 8469	0.94926 1692	0.94729 2968	0.94553 8867	0.94400 5439	0.94269 813
71	0.95792 7312	0.95563 0906	0.95355 2802	0.95170 0253	0.95007 9961	0.94869 79
72	0.96416 6778	0.96174 4346	0.95955 0807	0.95759 4182	0.95588 1917	0.95442 07
73	0.97015 8485	0.96760 3183	0.96528 7699	0.96322 0916	0.96141 1124	0.95986 588
74	0.97590 4579	0.97320 9083	0.97076 4640	0.96858 1107	0.96666 7733	0.96503 300
75	0.98140 7814	0.97856 4276	0.97598 3305	0.97367 5856	0.97165 2278	0.96992 211
76	0.98667 1642	0.98367 1649	0.98094 5969	0.97850 6800	0.97636 5744	0.97453 358
77	0.99170 0319	0.98853 4854	0.98565 5618	0.98307 6205	0.98080 9660	0.97886 821
78	0.99649 9035	0.99315 8446	0.99011 6078	0.98738 7102	0.98498 6210	0.98292 731
79	1.00107 4067	0.99754 8039	0.99433 2188	0.99144 3443	0.98889 8385	0.98671 28
80	1.00543 2947	1.00171 0505	0.99831 0002	0.99525 0318	0.99255 0186	0.99022 77
81	1.00958 4670	1.00565 4204	1.00205 7047	0.99881 4222	0.99594 6887	0.99347 59
82	1.01353 9916	1.00938 9254	1.00558 2639	1.00214 3399	0.99909 5396	0.99646 26
83	1.01731 1292	1.01292 7841	1.00889 8258	1.00524 8285	1.00200 4731	0.99919 50
84	1.02091 3574	1.01628 4549	1.01201 7982	1.00814 2050	1.00468 6656	1.00168 31
85	1.02436 3932	1.01947 6693	1.01495 8964	1.01084 1239	1.00715 6504	1.00394 02
86	1.02768 2086	1.02252 4606	1.01774 1901	1.01336 6486	1.00943 4185	1.00598 45
87	1.03089 0362	1.02545 1813	1.02039 1392	1.01574 3186	1.01154 5314	1.00784 07
88	1.03401 3579	1.02828 4991	1.02293 6078	1.01800 1931	1.01352 2194	1.00954 23
89	1.03707 8722	1.03105 3651	1.02540 8362	1.02017 8426	1.01540 4202	1.01113 23
90	1.04011 4396	1.03378 9462	1.02784 3620	1.02231 2588	1.01723 6918	1.01266 35

φ.	F(80°).	F(81°).	F(82°).	F(83°).	F(84°).	F(85°).
45°	0.87740 8330	0.87814 7747	0.87881 4810	0.87940 7742	0.87992 4947	0.88036 5019
46	0.90193 0214	0.90273 9909	0.90347 0601	0.90412 0274	0.90468 7115	0.90516 9526
47	0.92687 2074	0.92775 8278	0.92855 8281	0.92926 9795	0.92989 0758	0.93041 9350
48	0.95225 5424	0.95322 4967	0.95410 0517	0.95487 9471	0.95555 9486	0.95613 8489
49	0.97810 3110	0.97916 3492	0.98012 1440	0.98097 3996	0.98171 8491	0.98235 2565
50	1.00443 9424	1.00559 8892	1.00664 6783	1.00757 9731	1.00839 4696	1.00908 8985
51	1.03129 0230	1.03255 7870	1.03370 4026	1.03472 4866	1.03561 6921	1.03637 7118
52	1.05868 3104	1.06006 8945	1.06132 2565	1.06243 9595	1.06341 6074	1.06424 8490
53	1.08664 7488	1.08816 2621	1.08953 3891	1.09075 6313	1.09182 5360	1.09273 7010
54	1.11521 4858	1.11687 1573	1.11837 1800	1.11970 9843	1.12088 0519	1.12187 9217
55	1.14441 8918	1.14623 0863	1.14787 2624	1.14933 7682	1.15062 0095	1.15171 4570
56	1.17429 5801	1.17627 8168	1.17807 5486	1.17968 0285	1.18108 5743	1.18228 5770
57	1.20488 4311	1.20705 4046	1.20902 2595	1.21078 1385	1.21232 2569	1.21363 9126
58	1.23622 6172	1.23860 2225	1.24075 9572	1.24268 8355	1.24437 9527	1.24582 4981
59	1.26836 6318	1.27096 9937	1.27333 5822	1.27545 2615	1.27730 9868	1.27889 8194
60	1.30135 3213	1.30420 8282	1.30680 4951	1.30913 0106	1.31117 1655	1.31291 8700
61	1.33523 9202	1.33837 2644	1.34122 5241	1.34378 1821	1.34602 8352	1.34795 2151
62	1.37008 0904	1.37352 3156	1.37666 0192	1.37947 4421	1.38194 9512	1.38407 0664
63	1.40593 9647	1.40972 5223	1.41317 9134	1.41628 0932	1.41901 1563	1.42135 3695
64	1.44288 1952	1.44705 0110	1.45085 7925	1.45428 1565	1.45729 8729	1.45988 9057
65	1.48098 0063	1.48557 5605	1.48977 9749	1.49356 4640	1.49690 4097	1.49977 4115
66	1.52031 2532	1.52538 6760	1.53003 6023	1.53422 7676	1.53793 0873	1.54111 7203
67	1.56096 4856	1.56657 6719	1.57172 7440	1.57637 8640	1.58049 3849	1.58403 9299
68	1.60303 0167	1.60924 7648	1.61496 5146	1.62013 7403	1.62472 1135	1.62867 6027
69	1.64660 9966	1.65351 1755	1.65987 2092	1.66563 7435	1.67075 6206	1.67518 0049
70	1.69181 4892	1.69949 2418	1.70658 4561	1.71302 7771	1.71876 0333	1.72372 3953
71	1.73876 5505	1.74732 5402	1.75525 3889	1.76247 5299	1.76891 5468	1.77450 3742
72	1.78759 3036	1.79716 0147	1.80604 8399	1.81416 7416	1.82142 7683	1.82774 3083
73	1.83844 0066	1.84916 1091	1.85915 5518	1.86831 5087	1.87653 1276	1.88369 8506
74	1.89146 1010	1.90350 8955	1.91478 4071	1.92525 6351	1.93449 3662	1.94266 5774
75	1.94682 2305	1.96040 1862	1.97316 6655	1.98496 0272	1.99562 1183	2.00498 7756
76	2.00470 2066	2.02005 6097	2.03456 1958	2.04803 1301	2.06026 5968	2.07106 4130
77	2.06528 8939	2.08270 6204	2.09925 6741	2.11471 3882	2.12883 3920	2.14136 3376
78	2.12877 9715	2.14860 3925	2.16756 7010	2.18539 6970	2.20179 3780	2.21643 7516
79	2.19537 5155	2.21801 5285	2.23983 7607	2.26051 7772	2.27968 6976	2.29694 0029
80	2.26527 3261	2.29121 4789	2.31643 8965	2.34056 3450	2.36313 7361	2.38364 7090
81	2.33865 9082	2.36847 5306	2.39775 9091	2.42606 8530	2.45285 8880	2.47748 1512
82	2.41569 0023	2.45005 1818	2.48418 7936	2.51760 4238	2.54965 7120	2.57953 6804
83	2.49647 5729	2.53615 6904	2.57609 0247	2.61575 3683	2.65441 6992	2.69109 4397
84	2.58105 2135	2.62692 6038	2.67376 2203	2.72106 3915	2.76806 2632	2.81361 7754
85	2.66935 0448	2.72237 2007	2.77736 7475	2.83396 3302	2.89146 6641	2.94868 8755
86	2.76116 3994	2.82233 0812	2.88685 1750	2.95463 3512	3.02527 6781	3.09782 0285
87	2.85611 8747	2.92640 6812	3.00184 3391	3.08283 5807	3.16963 0126	3.26197 9246
88	2.95365 6298	3.03393 1831	3.12156 2966	3.21771 9649	3.32376 4936	3.44116 0392
89	3.05303 9141	3.14395 8147	3.24478 1053	3.35768 7267	3.48564 2253	3.63279 2864
90	3.15338 5252	3.25530 2942	3.36986 8027	3.50042 2499	3.65185 5969	3.83174 2090

φ.	E(85°).	E(86°).	E(87°).	E(88°).	E(89°).	E(90°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 000
1	0.01745 2413	0.01745 2411	0.01745 2409	0.01745 2408	0.01745 2407	0.01745 24
2	0.03489 9551	0.03489 9531	0.03489 9516	0.03489 9505	0.03489 9498	0.03489 94
3	0.05233 6138	0.05233 6073	0.05233 6022	0.05233 5985	0.05233 5963	0.05233 59
4	0.06975 6905	0.06975 6750	0.06975 6629	0.06975 6543	0.06975 6491	0.06975 64
5	0.08715 6585	0.08715 6282	0.08715 6046	0.08715 5878	0.08715 5776	0.08715 57
6	0.10452 9919	0.10462 9396	0.10452 8988	0.10452 8697	0.10452 8521	0.10452 84
7	0.12187 1656	0.12187 0825	0.12187 0177	0.12186 9714	0.12186 9436	0.12186 934
8	0.13917 6554	0.13917 5313	0.13917 4346	0.13917 3655	0.13917 3239	0.13917 31
9	0.15643 9384	0.15643 7616	0.15643 6239	0.15643 5254	0.15643 4662	0.15643 44
10	0.17365 4929	0.17365 2503	0.17365 0612	0.17364 9261	0.17364 8448	0.17364 81
11	0.19081 7987	0.19081 4756	0.19081 2238	0.19081 0438	0.19080 9356	0.19080 89
12	0.20792 3373	0.20791 9175	0.20791 5903	0.20791 3564	0.20791 2159	0.20791 16
13	0.22496 5919	0.22496 0577	0.22495 6414	0.22495 3438	0.22495 1650	0.22495 10
14	0.24194 0477	0.24193 3799	0.24192 8596	0.24192 4875	0.24192 2641	0.24192 18
15	0.25884 1920	0.25883 3699	0.25882 7294	0.25882 2713	0.25881 9962	0.25881 904
16	0.27566 5144	0.27565 5157	0.27564 7377	0.27564 1812	0.27563 8470	0.27563 735
17	0.29240 5071	0.29239 3079	0.29238 3737	0.29237 7055	0.29237 3043	0.29237 170
18	0.30905 6646	0.30904 2396	0.30903 1293	0.30902 3353	0.30901 8585	0.30901 699
19	0.32561 4844	0.32559 8265	0.32558 4992	0.32557 5642	0.32557 0027	0.32556 815
20	0.34207 4669	0.34205 5074	0.34203 9807	0.34202 8887	0.34202 2330	0.34202 014
21	0.35843 1155	0.35840 8440	0.35839 0743	0.35837 8085	0.35837 0484	0.35836 79
22	0.37467 9368	0.37465 3214	0.37463 2838	0 37461 8264	0.37460 9512	0.37460 659
23	0.39081 4409	0.39078 4480	0.39076 1162	0.39074 4484	0.39073 4468	0.39073 112
24	0.40683 1415	0.40679 7357	0.40677 0821	0.40675 1842	0.40674 0444	0.40673 664
25	0.42272 5558	0.42268 7000	0.42265 6957	0.42263 5470	0.42262 2565	0.42261 826
26	0.43849 2051	0.43844 8604	0.43841 4751	0.43839 0537	0.43837 5996	0.43837 114
27	0.45412 6146	0.45407 7402	0.45403 9421	0.45401 2255	0.45399 5940	0.45399 050
28	0.46962 3137	0.46956 8670	0.46952 6229	0.46949 5873	0.46947 7642	0.46947 156
29	0.48497 8361	0.48491 7726	0.48487 0479	0.48483 6684	0.48481 6389	0.48480 962
30	0.50018 7200	0.50011 9933	0.50006 7517	0.50003 0026	0.50000 7509	0.50000 000
31	0.51524 5082	0.51517 0699	0.51511 2737	0.51507 1278	0.51504 6379	0.51503 807
32	0.53014 7484	0.53006 5480	0.53000 1579	0.52995 5871	0.52992 8419	0.52991 926
33	0.54488 9930	0.54479 9781	0.54472 9530	0.54467 9280	0.54464 9100	0.54463 903
34	0.55946 7998	0.55936 9155	0.55929 2129	0.55923 7031	0.55920 3939	0.55919 290
35	0.57387 7315	0.57376 9210	0.57368 4965	0.57362 4701	0.57358 8507	0.57357 643
36	0.58811 3565	0.58799 5606	0.58790 3679	0.58783 7919	0.58779 8424	0.58778 525
37	0.60217 2485	0.60204 4057	0.60194 3968	0.60187 2368	0.60182 9365	0.60181 502
38	0.61604 9870	0.61591 0332	0.61580 1582	0.61572 3785	0.61567 7058	0.61566 147
39	0.62974 1574	0,62959 0260	0.62947 2330	0.62938 7963	0.62933 7290	0.62932 039
40	0.64324 3509	0.64307 9728	0,64295 2077	0.64286 0754	0.64280 5903	0 64278 761
41	0.65655 1650	0.65637 4682	0.65623 6749	0.65613 8068	0.65607 8797	0.65605 902
42	0.66966 2034	0.66947 1132	0.66932 2333	0,66921 5876	0.66915 1932	0.66913 060
43	0.68257 0763	0.68236 5149	0.68220 4877	0,68209 0208	0.68202 1331	0.68199 836
44	0.69527 4004	0.69505 2870	0.69488 0493	0.69475 7160	0.69468 3078	0.69465 83
45	0.70776 7994	0.70753 0497	0.70734 5358	0.70721 2890	0.70713 3320	0.70710 67

φ.	F (85°).	F (86°).	F (87°).	F (88°).	F (89°).	F (90°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4172	0.01745 4174	0.01745 4176	0.01745 4178	0.01745 4178	0.01745 4179
2	0.03491 3622	0.03491 3641	0.03491 3657	0.03491 3667	0.03491 3674	0.03491 3676
3	0.05238 3636	0.05238 3702	0.05238 3753	0.05238 3789	0.05238 3811	0.05238 3819
4	0.06986 9517	0.06986 9673	0.06986 9794	0.06986 9880	0.06986 9932	0.06986 9949
5	0.08737 6590	0.08737 6894	0.08737 7131	0.08737 7300	0.08737 7402	0.08737 7436
6	0.10491 0213	0.10491 0740	0.10491 1150	0.10491 1443	0.10491 1620	0.10491 1678
7	0.12247 5785	0.12247 6623	0.12247 7277	0.12247 7743	0.12247 8025	0.12247 8118
8	0.14007 8752	0.14008 0007	0.14008 0986	0.14008 1685	0.14008 2105	0.14008 2245
9	0.15772 4618	0.15772 6412	0.15772 7810	0.15772 8810	0.15772 9410	0.15772 9610
10	0.17541 8953	0.17542 1425	0.17542 3350	0.17542 4727	0.17542 5554	0.17542 5830
11	0.19316 7403	0.19317 0707	0.19317 3282	0.19317 5123	0.19317 6229	0.19317 6597
12	0.21097 5697	0.21098 0008	0.21098 3367	0.21098 5769	0.21098 7212	0.21098 7693
13	0.22884 9658	0.22885 5168	0.22885 9462	0.22886 2533	0.22886 4377	0.22886 4992
14	0.24679 5213	0.24680 2136	0.24680 7530	0.24681 1388	0.24681 3704	0.24681 4477
15	0.26481 8403	0.26482 6972	0.26483 3648	0.26483 8424	0.26484 1291	0.26484 2248
16	0.28292 5396	0.28293 5866	0.28294 4024	0.28294 9859	0.28295 3362	0.28295 4531
17	0.30112 2494	0.30113 5143	0.30114 5000	0.30115 2050	0.30115 6283	0.30115 7695
18	0.31941 6149	0.31943 1281	0.31944 3072	0.31945 1506	0.31945 6570	0.31945 8259
19	0.33781 2974	0.33783 0916	0.33784 4898	0.33785 4899	0.33786 0905	0.33786 2908
20	0.35631 9755	0.35634 0864	0.35635 7315	0.35636 9081	0.35637 6148	0.35637 8505
21	0.37494 3468	0.37496 8129	0.37498 7348	0.37500 1096	0.37500 9352	0.37501 2106
22	0.39369 1289	0.39371 9920	0.39374 2232	0.39375 8194	0.39376 7780	0.39377 0977
23	0.41257 0616	0.41260 3666	0.41262 9423	0.41264 7849	0.41265 8916	0.41266 2606
24	0.43158 9081	0.43162 7035	0.43165 6616	0.43167 7779	0.43169 0488	0.43169 4727
25	0.45075 4568	0.45079 7951	0.45083 1765	0.45085 5956	0.45087 0485	0.45087 5330
26	0.47007 5234	0.47012 4611	0.47016 3099	0.47019 0634	0.47020 7173	0.47021 2688
27	0.48955 9528	0.48961 5510	0.48965 9147	0.48969 0368	0.48970 9121	0.48971 5374
28	0.50921 6213	0.50927 9458	0.50932 8759	0.50936 4033	0.50938 5220	0.50939 2286
29	0.52905 4390	0.52912 5608	0.52918 1126	0.52922 0850	0.52924 4711	0.52925 2670
30	0.54908 3523	0.54916 3479	0.54922 5813	0.54927 0416	0.54929 7208	0.54930 6144
31	0.56931 3462	0.56940 2984	0.56947 2781	0.56952 2725	0.56955 2727	0.55956 2733
32	0.58975 4481	0.58985 4462	0.58993 2418	0.58998 8204	0.59002 1715	0.59003 2893
33	0.61041 7299	0.61052 8706	0.61061 5576	0.61067 7743	0.61071 5090	0.61072 7547
34	0.63131 3123	0.63143 7000	0.63153 3599	0.63160 2733	0.63164 4266	0.63165 8120
35	0.65245 3680	0.65259 1156	0.65269 8368	0.65277 5101	0.65282 1202	0.65283 6580
36	0.67385 1258	0.67400 3557	0.67412 2339	0.67420 7358	0.67425 8438	0.67427 5478
37	0.69551 8751	0.69568 7201	0.69581 8589	0.69591 2638	0.69596 9145	0.69598 7996
38	0.71746 9707	0.71765 5746	0.71780 0868	0.71790 4753	0.71796 7174	0.71798 7998
39	0.73971 8377	0.73992 3570	0.74008 3648	0.74019 8248	0.74026 7111	0.74029 0084
40	0.76227 9775	0.76250 5824	0.76268 2190	0.76280 8459	0.76288 4339	0.76290 9652
41	0.78516 9743	0.78541 8499	0.78561 2602	0.78575 1581	0.78583 5103	0.78586 2967
42	0.80840 5013	0.80867 8496	0.80889 1916	0.80904 4740	0.80913 6587	0.80916 7229
43	0.83200 3287	0.83230 3701	0.83253 8165	0.83270 6074	0.83280 6993	0.83284 0663
44	0.85598 3323	0.85631 3077	0.85657 0473	0.85675 4823	0.85686 5631	0.85690 2601
45	0.88036 5019	0.88072 6753	0.88100 9150	0.88121 1426	0.88133 3019	0.88137 3587

φ.	E (85°).	E (86°).	E (87°).	E (88°).	E (89°).	E (9
45°	0.70776 7994	0.70753 0497	0.70734 5358	0.70721 2890	0.70713 3320	0.7071
46	0.72004 9036	0.71979 4301	0.71959 5715	0.71945 3622	0.71936 8268	0.719
47	0.73211 3506	0.73184 0620	0.73162 7875	0.73147 5646	0.73138 4201	0.7313
48	0.74395 7850	0.74366 5863	0.74343 8217	0.74327 5319	0.74317 7464	0.7431
49	0.75557 8590	0.75526 6512	0.75502 3191	0.75484 9069	0.75474 4468	0.754
50	0.76697 2324	0.76663 9122	0.76637 9317	0.76619 3392	0.76608 1698	0.766
51	0.77813 5725	0.77778 0321	0.77750 3189	0.77730 4856	0.77718 5704	0.777
52	0.78906 5549	0.78868 6816	0.78839 1475	0.78818 0102	0.78805 3112	0.788
53	0.79975 8629	0.79935 5390	0.79904 0919	0.79881 5843	0.79868 0616	0.7986
54	0.81021 1885	0.80978 2907	0.80944 8340	0.80920 8869	0.80906 4988	0.809
55	0.82042 2320	0.81996 6312	0.81961 0637	0.81935 6044	0.81920 3071	0.8191
56	0.83038 7027	0.82990 2634	0.82952 4789	0.82925 4310	0.82909 1787	0.829
57	0.84010 3187	0.83958 8986	0.83918 7855	0.83890 0689	0.83872 8131	0.8386
58	0.84956 8074	0.84902 2568	0.84859 6977	0.84829 2279	0.84810 9177	0.848
59	0.85877 9060	0.85820 0672	0.85774 9383	0.85742 6262	0.85723 2080	0.8571
60	0.86773 3614	0.86712 0680	0.86664 2385	0.86629 9901	0.86609 4071	0.866
61	0.87642 9307	0.87578 0069	0.87527 3385	0.87491 0541	0.87469 2462	0.8746
62	0.88486 3817	0.88417 6413	0.88363 9875	0.88325 5615	0.88302 4650	0.882
63	0.89303 4934	0.89230 7387	0.89173 9438	0.89133 2640	0.89108 8109	0.891
64	0.90094 0563	0.90017 0771	0.89956 9753	0.89913 9220	0.89888 0402	0.898
65	0.90857 8731	0.90776 4453	0.90712 8597	0.90667 3050	0.90639 9172	0.906
66	0.91594 7594	0.91508 6434	0.91441 3847	0.91393 1915	0.91364 2149	0.913
67	0.92304 5445	0.92213 4836	0.92142 3483	0.92091 3696	0.92060 7149	0.920
68	0.92987 0725	0.92890 7905	0.92815 5597	0.92761 6367	0.92729 2077	0.9271
69	0.93642 2030	0.93540 4021	0.93460 8391	0.93403 8000	0.93369 4925	0.933
70	0.94269 8131	0.94162 1709	0.94078 0190	0.94017 6771	0.93981 3776	0.939
71	0.94869 7987	0.94755 9650	0.94666 9444	0.94603 0957	0.94564 6804	0.945
72	0.95442 0768	0.95321 6693	0.95227 4739	0.95159 8949	0.95119 2275	0.951
73	0.95986 5880	0.95859 1877	0.95759 4809	0.95687 9250	0.95644 8551	0.956
74	0.96503 3000	0.96368 4455	0.96262 8550	0.96187 0488	0.96141 4090	0.961
75	0.96992 2118	0.96849 3922	0.96737 5038	0.96657 1419	0.96608 7451	0.965
76	0.97453 3589	0.97302 0056	0.97183 3557	0.97098 0945	0.97046 7294	0.970
77	0.97886 8210	0.97726 2969	0.97600 3626	0.97509 8127	0.97455 2389	0.974
78	0.98292 7314	0.98122 3183	0.97988 5052	0.97892 2209	0.97834 1619	0.9781
79	0.98671 2895	0.98490 1722	0.98347 7986	0.98245 2646	0.98183 3989	0.981
80	0.99022 7789	0.98830 0253	0.98678 3019	0.98568 9154	0.98502 8639	0.984
81	0.99347 5913	0.99142 1280	0.98980 1315	0.98863 1775	0.98792 4865	0.987
82	0.99646 2601	0.99426 8427	0.99253 4806	0.99128 0984	0.99052 2144	0.990
83	0.99919 5089	0.99684 6868	0.99498 6513	0.99363 7860	0.99282 0186	0.992
84	1.00168 3193	0.99916 3963	0.99716 1043	0.99570 4376	0.99481 9019	0.994
85	1.00394 0267	1.00123 0255	0.99906 5441	0.99748 3920	0.99651 9150	0.9961
86	1.00598 4534	1.00306 1007	1.00071 0653	0.99898 2297	0.99792 1898	0.997
87	1.00784 0791	1.00467 8521	1.00211 4143	1.00020 9815	0.99903 0177	0.998
88	1.00954 2324	1.00611 5371	1.00330 4480	1.00118 5988	0.99985 0703	0.999
89	1.01113 2321	1.00741 7952	1.00432 8539	1.00195 0492	1.00040 1985	0.9998
90	1.01266 3506	1.00864 7957	1.00525 8587	1.00258 4086	1.00075 1578	1.0000

φ.	F(85°).	F(86°).	F(87°).	F(88°).	F(89°).	F(90°).
45°	0.88036 5019	0.88072 6753	0.88100 9150	0.88121 1426	0.88133 3019	0.88137 3587
46	0.90516 9526	0.90556 6132	0.90587 5799	0.90609 7633	0.90623 0991	0.90627 5488
47	0.93041 9350	0.93085 4010	0.93119 3440	0 93143 6625	0.93158 2830	0.93163 1615
48	0.95613 8489	0.95661 4700	0.95698 6641	0.95725 3151	0.95741 3393	0.95746 6865
49	0.98235 2565	0.98287 4185	0.98238 1667	0.98357 3683	0.98374 9276	0.98380 7873
50	1.00908 8985	1.00966 0278	1.01010 6650	1.01042 6582	1.01061 8981	1.01068 3189
51	1.03637 7118	1.03700 2804	1.03749 1776	1.03784 2297	1.03805 3114	1.03812 3471
52	1.06424 8490	1.06493 3807	1.06546 9501	1.06585 3579	1.06608 4604	1.06616 1711
53	1.09273 7010	1.09348 7784	1.09407 4785	1.09449 5727	1.09474 8956	1.09483 3479
54	1.12187 9217	1.12270 1945	1.12334 5372	1.12380 6868	1.12408 4532	1.12417 7216
55	1.15171 4570	1.15261 6515	1.15332 2095	1.15382 8279	1.15413 2874	1.15423 4554
56	1.18228 5770	1.18327 5074	1.18404 9233	1.18460 4745	1 18493 9075	1.18505 0691
57	1.21363 9126	1.21472 4946	1.21557 4917	1.21618 4984	1.21655 2208	1.21667 4818
58	1.24582 4981	1.24701 7646	1.24795 1595	1.24862 2122	1.24902 5815	1.24916 0615
59	1.27889 8194	1.28020 9391	1.28123 6571	1.28197 4257	1.28241 8475	1.28256 6819
60	1.31291 8700	1.31436 1702	1.31549 2633	1.31630 5100	1.31679 4462	1.31695 7897
61	1.34795 2151	1.34954 2088	1.35078 8778	1.35168 4737	1 35222 4519	1.35240 4817
62	1.38407 0664	1.38582 4852	1.38720 1066	1.38819 0511	1.38878 6777	1 38898 5969
63	1.42135 3695	1.42329 2035	1.42481 3618	1.42590 8069	1.42656 7815	1.42678 8247
64	1.45988 9057	1.46203 4523	1.46371 9803	1.46493 2605	1.46566 3941	1.46590 8333
65	1.49977 4115	1.50215 3360	1.50402 3643	1.50537 0333	1.50618 2712	1.50645 4237
66	1.54111 7203	1.54376 1310	1.54584 1498	1.54734 0269	1.54824 4773	1.54854 7153
67	1.58403 9299	1.58698 4715	1.58930 4088	1.59097 6372	1.59198 6073	1.59232 3702
68	1.62867 6027	1 63196 5749	1.63455 8948	1.63643 0158	1.63756 0582	1.63793 8683
69	1.67518 0049	1 67886 5129	1.68177 3421	1.68387 3910	1.68514 3631	1.68556 8456
70	1.72372 3953	1.72786 5428	1.73113 8340	1.73350 4644	1.73493 6063	1.73541 5163
71	1.77450 3742	1.77917 5143	1.78287 2599	1.78554 9070	1.78716 9446	1.78771 2017
72	1.82774 3083	1.83303 3719	1.83722 8864	1.84026 9854	1.84211 2678	1.84273 0035
73	1.88369 8506	1.88971 7811	1 89450 0801	1.89797 3603	1.90008 0472	1.90078 6690
74	1.94266 5774	1.94954 9154	1.95503 2299	1.95902 1190	1.96144 4389	1 96225 7194
75	2.00498 7756	2.01290 4517	2.01922 9377	2.02384 1259	2.02664 7398	2.02758 9422
76	2.07106 4130	2.08022 8416	2.08757 5756	2 09294 8170	2.09622 3403	2.09732 3997
77	2.14136 3376	2.15204 9455	2.16065 3460	2.16696 6231	2.17082 3920	2.17212 1830
78	2.21643 7516	2.22900 1487	2.23917 0470	2.24666 3011	2.25125 5276	2.25280 2704
79	2.29694 0029	2.31185 1130	2.32399 8357	2.33299 6074	2.33853 1716	2.34040 0693
80	2.38364 7090	2.40153 3580	2.41622 4236	2.42718 0030	2.43395 3341	2.43624 6054
81	2 47748 1512	2.49919 8897	2 51722 3469	2.53078 5206	2.53922 4111	2.54209 0436
82	2.57953 6804	2.60627 0521	2.62876 2481	2.64588 6921	2.65663 7327	2.66030 6128
83	2.69109 4397	2.72451 5216	2.75314 4709	2.77529 8348	2.78938 0362	2.79421 9058
84	2.81361 7754	2.85611 5181	2.89341 4969	2.92294 5499	2.94206 3224	2.94870 0239
85	2.94868 8755	3.00370 9259	3.05362 9498	3.09448 8983	3.12169 7678	3.13130 1332
86	3.09782 0285	3.17204 1744	3.23914 6200	3.29836 9368	3.33964 3841	3.35467 3512
87	3.26197 9246	3.35887 2602	3.45644 5172	3.54748 4399	3.61613 2184	3.64253 3357
88	3.44116 0392	3.57109 5982	3.71310 7620	3.86107 5156	3.99109 6314	4.04812 5419
89	3.63279 2864	3.80508 2411	4.01090 9863	4.26139 2700	4.55346 9119	4.74134 8760
90	3.83174 2000	4.05275 8170	4.33865 3976	4.74271 7265	5.43490 9830	Infini logarith.

[illegible] Imp. lith. de Mme Formentin [illegible]

Léonard EULER,

Géomètre célèbre.

Né à Bâle, le 15 Avril 1707.

Mort à Petersbourg, le 17 Septembre 1783

TRAITÉ

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

Quoique le nom d'Euler soit attaché à presque toutes les théories importantes du Calcul intégral, cependant j'ai cru qu'il me serait permis de donner plus spécialement le nom d'*Intégrales Eulériennes*, à deux sortes de transcendantes dont les propriétés ont fait le sujet de plusieurs beaux Mémoires d'Euler, et forment la théorie la plus complète que l'on connaisse jusqu'à présent sur les intégrales définies.

La première est l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ qu'on suppose prise entre les limites $x=0$, $x=1$. Nous la représenterons, comme Euler, par le caractère abrégé $\left(\frac{p}{q}\right)$.

La seconde est l'intégrale $\int dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise de même entre les limites $x=0$, $x=1$, que nous représenterons par Γa, et dans laquelle Euler suppose que a est égal à une fraction rationnelle quelconque $\frac{p}{q}$.

Nous considérerons ces deux sortes d'intégrales, d'abord sous le même point de vue qu'Euler; ensuite sous un point de vue plus étendu, afin d'en perfectionner la théorie.

CHAPITRE PREMIER.

Propriétés générales des Intégrales Eulériennes de la première espèce.

1. L'EXPRESSION $\left(\frac{p}{q}\right)$ par laquelle nous désignons l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, est en général une fonction des deux exposans p et q; et de l'exposant n, qu'on regarde comme des nombres entiers. Mais nous supposons n constant, et notre but est de comparer entre elles les diverses valeurs de $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, afin de réduire au moindre nombre possible les transcendantes que cette expression renferme.

Nous observerons d'abord que les deux exposans p et q peuvent être échangés entre eux. En effet, si on fait $x^n = 1 - y^n$, on aura

$$\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\frac{y^{q-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}},$$

et la transformée en y devra être intégrée depuis $y=1$ jusqu'à $y=0$. En changeant son signe, elle devra être intégrée depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$; et comme alors on peut mettre x à la place de y, on aura

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ou suivant notre notation,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right), \tag{a}$$

ce qui est la propriété énoncée.

2. Il faut faire voir maintenant que si dans la formule $\left(\frac{p}{q}\right)$, l'un des deux nombres p et q est plus grand que n, la formule se ramène aisément au cas où p et q sont compris l'un et l'autre dans les limites 1 et n. Pour

cela soit $Z = x^k(1-x^n)^r$, on aura la différentielle

$$dZ = kx^{k-1}dx\,(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)x^{k+n-1}dx\,(1-x^n)^{r-1},$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$Z = k\int x^{k-1}dx\,(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)\int x^{k+n-1}dx\,(1-x^n)^{r-1}.$$

Donc si on prend les intégrales entre les limites $x=0$, $x=1$, et qu'en même temps on suppose $k>0$, et $r>0$, afin que Z s'évanouisse dans les deux limites, on aura

$$\int x^{k+n-1}dx\,(1-x^n)^{r-1} = \frac{k}{k+rn}\int x^{k-1}dx\,(1-x^n)^{r-1};$$

d'où il suit qu'en faisant $k+n=p$ et $r=\frac{q}{n}$, il viendra

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\cdot\left(\frac{p-n}{q}\right) \qquad \text{(b)}.$$

Au moyen de cette formule, toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans laquelle on a $p>n$, se réduira successivement aux fonctions $\left(\frac{p-n}{q}\right)$, $\left(\frac{p-2n}{q}\right)$, etc., jusqu'à un terme $\left(\frac{p-in}{q}\right)$ ou $\left(\frac{p'}{q}\right)$, dans lequel p' sera le reste de la division de p par n.

Arrivé à ce terme, si de son côté q est plus grand que n, la fonction $\left(\frac{p'}{q}\right)$ qui est la même que $\left(\frac{q}{p'}\right)$, se réduira successivement aux fonctions $\left(\frac{q-n}{p'}\right)$, $\left(\frac{q-2n}{p'}\right)$, etc., jusqu'à un terme $\left(\frac{q'}{p'}\right)$ ou $\left(\frac{p'}{q'}\right)$, dans lequel q' sera le reste de la division de q par n.

De là on voit qu'on peut toujours supposer la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ réduite à une forme où p et q soient compris tous deux dans la suite $1, 2, 3 \ldots n$.

3. Cela posé, il y a deux cas principaux où on peut trouver immédiatement la valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$; c'est lorsque n est égal à l'un des deux nombres p et q, ou lorsqu'il est égal à leur somme.

Soit, 1°. $q=n$, on aura immédiatement $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p} + C$, intégrale qui, étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, se réduit à $\frac{1}{p}$; d'où résulte

$$\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p} \qquad \text{(c)}.$$

Soit, 2°., $p+q=n$, ou $p=a$, $q=n-a$, on aura $\left(\frac{p}{q}\right)=\int x^{a-1}dx(1-x^n)^{-\frac{a}{n}}$; faisant $1-x^n=x^nz^n$, on aura la transformée rationnelle

$$\left(\frac{p}{q}\right) \text{ ou } \left(\frac{a}{n-a}\right)=\int\frac{z^{n-a-1}dz}{1+z^n},$$

intégrale qui doit être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; or, par les formules connues (*Eul.*, *Calc. intég.*, t. I, p. 252), cette intégrale $=\dfrac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}}$. Donc si on fait $\frac{\pi}{n}=\omega$, on aura

$$\left(\frac{a}{n-a}\right)=\frac{\omega}{\sin a\omega}. \tag{d}$$

Excepté ces deux cas généraux, toutes les quantités désignées par $\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des transcendantes plus ou moins composées, selon la valeur de n, et ne sont point susceptibles d'une évaluation exacte. Mais, pour chaque valeur de n, on peut exprimer toutes ces transcendantes au moyen d'un petit nombre d'entre elles, et c'est l'objet des recherches suivantes.

4. Observons d'abord qu'en mettant $p+n$ à la place de p, l'équation (b) donne

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+q}{p}\cdot\left(\frac{p+n}{q}\right).$$

On aurait semblablement

$$\left(\frac{p+n}{q}\right)=\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\left(\frac{p+2n}{q}\right)$$
$$\left(\frac{p+2n}{q}\right)=\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdot\left(\frac{p+3n}{q}\right)$$
etc.

Donc, en général, i étant un nombre entier positif à volonté, on aura

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdots\frac{p+q+in}{p+in}\cdot\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right);$$

mettant $p+r$ au lieu de p, on aura semblablement

$$\left(\frac{p+r}{q}\right)=\frac{p+q+r}{p+r}\cdot\frac{p+q+r+n}{p+r+n}\cdot\frac{p+q+r+2n}{p+r+2n}\cdots\frac{p+q+r+in}{p+r+in}\cdot\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right).$$

Divisons ces deux formules l'une par l'autre, et faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^{\circ} &= \frac{(p+q)(p+r)}{p.(p+q+r)}\\
\mathrm{M}' &= \frac{(p+q+n)(p+r+n)}{(p+n)(p+q+r+n)}\\
\mathrm{M}'' &= \frac{(p+q+2n)(p+r+2n)}{(p+2n)(p+q+r+2n)},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

nous aurons

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = \mathrm{M}^{\circ}\,\mathrm{M}'\,\mathrm{M}''\ldots.\mathrm{M}^{(i)}\,\frac{\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)}.$$

Supposons r positif et $<n$; alors il est clair que la quantité $\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)$ sera plus petite que $\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)$ et plus grande que $\left(\frac{p+\overline{i+2}.n}{q}\right.$. Car si on considère diverses formules $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui ne diffèrent que par l'exposant p; comme ces formules désignent chacune l'intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, d'une différentielle $\frac{x^{p-1}dx}{\mathrm{X}}$ dont le dénominateur est le même pour toutes, il est évident que l'intégrale sera d'autant plus petite que p sera plus grand.

Mais la formule (b) donne

$$\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right) = \frac{p+q+\overline{i+1}.n}{p+\overline{i+1}.n}\cdot\left(\frac{p+\overline{i+2}.n}{q}\right).$$

Donc on a d'une part le rapport

$$\frac{\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)} > 1,$$

et de l'autre, ce même rapport $< \frac{p+q+\overline{i+1}.n}{p+\overline{i+1}.n}$. Si l'on veut donc que ce rapport soit compris entre les limites 1 et $1+\frac{1}{k}$, il faudra prendre... $i+1 > \frac{qk-p}{n}$ et alors on aura

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = \mathrm{M}^{\circ}\mathrm{M}'\,\mathrm{M}''\ldots.\mathrm{M}^{(i)}\left(1+\frac{1}{k'}\right),$$

k' étant plus grand que k.

On sait par cette équation combien on approche du rapport de $\left(\frac{p}{q}\right)$ à $\left(\frac{p+r}{q}\right)$, en prolongeant le produit $M^{\circ}M'M''\ldots$ jusqu'à un terme $M^{(\omega)}$; et il est clair qu'en continuant ce produit à l'infini, on aura la vraie valeur de ce rapport, laquelle sera

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = M^{\circ}M'M''M''', \text{ etc.}$$

Maintenant si dans cette équation on échange entre elles les lettres q et r, les quantités M°, M', M'', etc., resteront les mêmes, de sorte qu'on aura encore

$$\frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{p+q}{r}\right)} = M^{\circ}M'M''M''', \text{ etc.}$$

Donc par la comparaison de ces équations, on obtient la formule générale

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\cdot\left(\frac{p+r}{q}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(e).}$$

Cette formule dont la découverte appartient à Euler, est une sorte d'équation aux différences finies, qui renferme presque toute la théorie des transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$. Et d'abord, nous allons en déduire l'expression générale des quantités $\left(\frac{p}{q}\right)$.

5. Les formules (c) et (d) donnent les valeurs exactes de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, toutes les fois que l'un des deux nombres p et q ou leur somme est égale à n. Supposons maintenant qu'on connaisse de plus toutes les valeurs de $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque $p+q=n-1$, et désignons en général par A_a la fonction $\left(\frac{n-a-1}{a}\right)$, en sorte qu'on ait

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right) = A_a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(f).}$$

On aura donc successivement $\left(\frac{n-2}{1}\right)=A_1$, $\left(\frac{n-3}{2}\right)=A_2$, $\left(\frac{n-4}{3}\right)=A_3$, etc.; et parce que $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)$, on aura aussi $\left(\frac{1}{n-2}\right)=A_1$, $\left(\frac{2}{n-3}\right)=A_2$, etc.; donc en général

$$A_{(n-1-a)} = A_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g).$$

D'où l'on voit que le nombre des auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc., se réduit toujours à $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair.

Par exemple, si $n=7$, il y aura trois auxiliaires $A_1 = \left(\frac{5}{1}\right)$, $A_2 = \left(\frac{4}{2}\right)$, $A_3 = \left(\frac{3}{3}\right)$, puisqu'on aurait $A_4 = \left(\frac{2}{4}\right) = A_2$, et $A_5 = \left(\frac{1}{5}\right) = A_1$.

Si $n=8$, il n'y aura encore que trois auxiliaires A_1, A_2, A_3; car on auroit, en vertu de l'équation (g), $A_4 = A_3$, $A_5 = A_2$, $A_6 = A_1$.

Cela posé, au moyen des équations (c), (d), (e) et des auxiliaires données par l'équation (f), nous pourrons trouver l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans deux cas généraux : 1°. lorsque $p+q$ est $< n$; 2°. lorsque $p+q$ est $> n$. Voici comment on y parvient.

6. L'équation (e) donne immédiatement $\left(\frac{n-a-1}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{1}\right) = \ldots\ldots \left(\frac{n-a-1}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a}{a}\right)$; substituant dans celle-ci les valeurs connues par les équations (d) et (g), on aura

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \frac{A_a \sin a\omega}{\sin \omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h).$$

Ainsi on connaît toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle l'un des deux nombres p et q est égal à l'unité; si, pour plus de simplicité, on met a à la place de $n-a-1$, on aura pour le même objet la formule

$$\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{A_a \sin (a+1)\omega}{\sin \omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i).$$

La même équation (e) donne $\left(\frac{n-a-2}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{1}\right) = \left(\frac{n-a-2}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a-1}{a}\right)$, et substituant les valeurs connues, il en résulte

$$\left(\frac{n-a-2}{a}\right) = \frac{A_a A_{a+1}}{A_1} \cdot \frac{\sin (a+1)\omega}{\sin \omega}.$$

Ainsi on a la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle $p+q = n-2$.

De l'équation (e) on déduit encore immédiatement

$$\left(\frac{n-a-3}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{1}\right) = \left(\frac{n-a-3}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a-2}{a}\right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{n-a-3}{a}\right)=\frac{A_a A_{a+1}\, A_{a+2}}{A_1 A_2}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\,\sin(a+2)\omega}{\sin\omega\,\sin 2\omega}.$$

Ainsi on connaît la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans laquelle $p+q=n-3$.

En général, l'équation (e) donne

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right)\cdot\left(\frac{n-k}{1}\right)=\left(\frac{n-a-k}{1}\right)\cdot\left(\frac{n-a-k+1}{a}\right),$$

et en mettant les valeurs tirées de l'équation (h), il en résulte

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right)=\frac{A_{a+k-1}\sin(a+k-1)\omega}{A_{k-1}\sin(k-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a-k+1}{a}\right).$$

Donc on aura, en général,

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right)=\frac{A_a A_{a+1}\ldots A_{a+k-1}}{A_1 A_2\ldots A_{k-1}}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\sin(a+2)\omega\ldots\sin(a+k-1)\omega}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(k-1)\omega}\ldots(k).$$

C'est la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans laquelle $p+q$ est moindre que n.

7. Pour avoir l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ lorsque $p+q$ est plus grand que n, observons que l'équation (e) donne aussi

$$\left(\frac{n-a+k}{a}\right)\cdot\left(\frac{n+k}{1}\right)=\left(\frac{n-a+k}{1}\right)\cdot\left(\frac{n-a+k+1}{a}\right).$$

Or par l'équation (b) on a

$$\left(\frac{n+k}{1}\right)=\frac{k}{k+1}\cdot\left(\frac{k}{1}\right);$$

par l'équation (i) on a

$$\left(\frac{k}{1}\right)=\frac{A_k\sin(k+1)\omega}{\sin\omega},$$

et par l'équation (h) on a

$$\left(\frac{n-a+k}{1}\right)=\frac{A_{a-k-1}\sin(a-k-1)\omega}{\sin\omega};$$

substituant toutes ces valeurs, il viendra

$$\left(\frac{n-a+k+1}{a}\right)=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{A_k\sin(k+1)\omega}{A_{a-k-1}\sin(a-k-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a+k}{a}\right)\ldots(l)$$

Tout se réduit donc à trouver la valeur de $\left(\frac{n-a+1}{a}\right)$.

Or l'équation (e) donne

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\cdot\left(\frac{n}{1}\right)=\left(\frac{n-a}{1}\right)\cdot\left(\frac{n-a+1}{a}\right),$$

substituant les valeurs connues, il viendra

$$\left(\frac{n-a+1}{a}\right)=\frac{1}{A_{a-1}}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m)}.$$

De là et de l'équation (l) on déduit successivement

$$\left(\frac{n-a+2}{a}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{A_1}{A_{a-1}A_{a-2}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin2\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega\sin(a-2)\omega},$$

$$\left(\frac{n-a+3}{a}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{A_1A_2}{A_{a-1}A_{a-2}A_{a-3}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin2\omega\sin3\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega\sin(a-2)\omega\sin(a-3)\omega},$$

et en général,

$$\left(\frac{n-a+k}{a}\right)=\frac{1}{k}\cdot\frac{A_1A_2\ldots A_{k-1}}{A_{a-1}A_{a-2}\ldots A_{a-k}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin k\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega\ldots\sin(a-k)\omega}\ldots\text{(n)}.$$

Cette formule donne la valeur de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ lorsque $p+q$ surpasse n; ainsi en la réunissant à la formule (k), on a généralement l'expression de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, en supposant seulement connues les fonctions semblables pour lesquelles $p+q=n-1$, et on a déjà remarqué que le nombre de ces auxiliaires est $\frac{n+2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair.

8. La formule (n) pourrait être regardée comme une suite de la formule (k); et on n'aurait ainsi qu'une seule et même formule pour toutes les valeurs de p et q; mais alors on aurait besoin de nouvelles auxiliaires A_0, A_{-1}, A_{-2}, etc., et il faudrait en fixer les valeurs ainsi $A_0=\frac{\omega}{\sin 0\omega}$, ou plutôt i étant infiniment petit, $A_i=\frac{\omega}{\sin i\omega}=\frac{1}{i}$, $A_{-1}=-A_1$, $A_{-2}=-A_2$, etc. C'est pour éviter l'embarras de ces substitutions, surtout dans le cas de A_0, que nous avons donné les deux formules séparément.

Il est assez étonnant que l'expression générale des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ ait échappé à Euler; on voit cependant qu'il s'était occupé spécialement de cette recherche, par le passage du tome V des *Nova Acta Petropol.*, pag. 125, où il dit: *Neque tamen hinc adhuc elucet quânam lege omnes determinationes progrediantur, quandoquidem valores certarum formularum continuo magis evadunt complicati.*

CHAPITRE II.

Formule pour la comparaison et la réduction des Transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$, *qui répondent à une même valeur de* n.

9. Nous allons maintenant démontrer diverses formules, qui serviront à comparer entre elles et à réduire à la forme la plus simple les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$, qui répondent à une même valeur de n. Ces formules devront être considérées comme autant de théorèmes fort remarquables sur les intégrales définies dont nous nous occupons.

De l'équation (e) on déduit les deux suivantes :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p+q}{n-p-q}\right)=\left(\frac{p}{n-p-q}\right)\cdot\left(\frac{n-q}{q}\right),$$

$$\left(\frac{p}{n-p-q}\right)\cdot\left(\frac{n-q}{n-p}\right)=\left(\frac{p}{n-p}\right)\cdot\left(\frac{n}{n-p-q}\right);$$

multipliant ces deux équations entre elles, et mettant dans le produit les valeurs connues par les formules (c) et (d), on aura

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{n-p}{n-q}\right)=\frac{\varpi\sin(p+q)\varpi}{(n-p-q)\sin p\varpi\sin q\varpi} \qquad \text{(p)};$$

d'où il suit que la valeur de $\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$ se déduit immédiatement de celle de $\left(\frac{p}{q}\right)$, qui est en quelque sorte son complément. On a en particulier,

$$\left(\frac{a}{a}\right)\cdot\left(\frac{n-a}{n-a}\right)=\frac{2\varpi\cot a\varpi}{n-2a} \qquad \text{(q)}.$$

Ainsi connaissant les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$, lorsque a est plus petit que $\frac{1}{2}n$, on en déduit les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$ lorsque a est plus grand que $\frac{1}{2}n$.

10. Pour examiner plus particulièrement les fonctions de la forme $\left(\frac{a}{a}\right)$, reprenons la valeur primitive de ces fonctions, laquelle est

$$\left(\frac{a}{a}\right)=\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

si l'on fait

$$1-x^n=\frac{z^n}{4x^n},\ \text{ou}\ x^n=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)},$$

la transformée sera

$$\left(\frac{a}{a}\right)=\mp\, 2^{-\frac{2a}{n}}\int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}.$$

Quant aux limites de cette nouvelle intégrale, il faut observer que les valeurs $x^n=0$, $x^n=\frac{1}{2}$, $x^n=1$ donnent respectivement $z=0$, $z=1$, $z=0$. D'où l'on voit qu'il faut prendre deux fois l'intégrale en z, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. Et comme alors rien n'empêche de mettre x à la place de z, on aura

$$\left(\frac{a}{a}\right)=2^{1-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} \qquad \text{(r)};$$

cette intégrale est ainsi réduite à la forme la plus simple dont elle soit susceptible, puisque le radical n'est plus que du second degré.

11. Si dans cette formule on met $n-a$ à la place de a, on aura

$$\left(\frac{n-a}{n-a}\right)=2^{-1+\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{n-a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}};$$

de là et de l'équation (q) résulte cette formule remarquable qui donne le produit de deux intégrales :

$$\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\cdot\int\frac{x^{n-a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{2\omega\cot a\omega}{n-2a} \qquad \text{(s)}.$$

12. Puisque les fonctions $\left(\frac{a}{a}\right)$ sont les plus simples entre les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ non comprises dans les formules (c) et (l), il semblerait convenable de les substituer aux auxiliaires désignées par A_a, pour exprimer par leur moyen toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Dans cette vue, désignons en général la fonction $\left(\frac{a}{a}\right)$ par M_a; comme on peut supposer $a<\frac{1}{2}n$, on aura par la formule (k),

$$M_a=\frac{A_aA_{a+1}\ldots A_{n-a-1}}{A_1A_2\ldots A_{n-2a-1}}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\sin(a+2)\omega\ldots\sin(n-a-1)\omega}{\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin(n-2a-1)\omega},$$

valeur qui, au moyen des équations $A_{n-1-k}=A_k$, $\sin(n-k)\omega=\sin k\omega$, se réduit à cette forme

$$M_a=\frac{A_aA_{a+1}\ldots A_{2a-1}}{A_1A_2\ldots A_{a-1}}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\sin(a+2)\omega\ldots\sin2a\omega}{\sin\omega\sin2\omega\ldots\sin a\omega} \qquad \text{(t)};$$

d'où l'on tire successivement

$$M_1 = A_1 \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega},$$

$$M_2 = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 3\omega \sin 4\omega}{\sin \omega \sin 2\omega},$$

$$M_3 = \frac{A_3 A_4 A_5}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin 4\omega \sin 5\omega \sin 6\omega}{\sin \omega \sin 2\omega \sin 3\omega}.$$

etc.

Ces équations, qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= M_1 \cdot \frac{\sin \omega}{\sin 2\omega} \\ \frac{A_2 A_3}{A_1 A_1} &= \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\sin^2 2\omega}{\sin 3\omega \sin 4\omega} \\ \frac{A_4 A_5}{A_2 A_2} &= \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{\sin^2 3\omega}{\sin 5\omega \sin 6\omega} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (\text{u}$$

serviront à déterminer les auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc., au moyen d'un ég
nombre de quantités M_1, M_2, M_3, etc., prises dans l'ordre convenable. C
pourra donc exprimer par ces dernières quantités toutes les fontions (
qui répondent à une meme valeur de n.

Mais il faut observer que ces substitutions ne peuvent s'effectuer que po
des valeurs particulières de n, et qu'ainsi par l'emploi des auxiliaires M
on ne peut parvenir à des formules aussi générales que le sont les formul
(k) et (n).

15. Considérons maintenant la formule

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) = \int \frac{x^{n-2a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}}:$$

si on fait $x^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1+z^n)}$, on aura la transformée

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) = 2^{-\frac{2a}{n}} \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt[n]{(1+z^n)}} \quad (\text{v}$$

dans laquelle il faudra prendre l'intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$,
qui d'ailleurs suppose $a < \frac{1}{2} n$. Mais en vertu des équations (e) et (p), on

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right) = \frac{\omega}{a \sin 2a\omega},$$

$$\left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right) = \left(\frac{a}{n-a}\right) \cdot \left(\frac{n}{a}\right) = \frac{\omega}{a \sin a\omega};$$

donc $\left(\frac{a}{a}\right) = 2\cos a\omega . \left(\frac{n-2a}{a}\right)$, ou, en substituant la valeur donnée par l'équation (v),

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos a\omega . \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \qquad (x).$$

Cette formule n'a lieu que lorsque a est $< \frac{1}{2} n$; si a est $> \frac{1}{2} n$, on commencera par prendre la valeur de $\left(\frac{n-a}{n-a}\right)$, laquelle sera

$$\left(\frac{n-a}{n-a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}-1} \cos (n-a)\,\omega . \int \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}},$$

et on en déduira celle de $\left(\frac{a}{a}\right)$ au moyen de l'équation (q). On aura ainsi, a étant $> \frac{1}{2} n$,

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{2^{2-\frac{2a}{n}}}{2a-n} \cdot \frac{\omega}{\sin a\omega} : \int \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \qquad (y).$$

14. Si l'on compare maintenant les équations (r), (x) et (y), on en tirera les formules

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} &= \cos a\omega . \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \\ \int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} &= \frac{2\omega}{(2a-n)\sin a\omega} : \int \frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \end{aligned}\right\} \qquad (z),$$

la première ayant lieu lorsque a est $< \frac{1}{2} n$, et la seconde lorsque a est $> \frac{1}{2} n$.

Lorsque n est impair, si on fait dans la première équation, $x = 1 - y^2$ et $z = y^2 - 1$, les formules intégrales comprises dans les deux membres se réduiront l'une et l'autre à la forme

$$\int \frac{(1-y^2)^{a-1}dy}{\sqrt{\left(n - \frac{n.n-1}{1.2}y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}y^4 - \text{etc.}\right)}}:$$

on voit donc que la partie de cette dernière intégrale, prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et la partie prise depuis $y=1$ jusqu'à $y=\infty$, sont entre elles :: $\cos\frac{a\pi}{n} : 1$.

15. Considérons de nouveau la formule

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

si l'on fait

$$1 - x^n = \frac{x^{2n}}{4z^n},$$

on obtient d'abord

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 2^{2-\frac{2q}{n}}\int x^{p+2q-2n-1}dx \cdot z^{n-q}.$$

Soit $p = 2a$ et $q = n - a$, on aura

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}}\int z^a \cdot \frac{dx}{x},$$

et en achevant les substitutions, il viendra

$$\int\left(z^{a-1}dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right);$$

cela posé, il faut distinguer deux cas, selon que a est $< \frac{1}{2}n$ ou $> \frac{1}{2}n$.

Soit, 1°. $a < \frac{1}{2}n$, on aura par les formules du n° 13,

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = \frac{\varpi}{a \sin 2a\varpi} : \left(\frac{n-2a}{a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}} \cdot \frac{\varpi}{a \sin 2a\varpi} : \int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}},$$

donc

$$\int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \cdot \int\left(z^{a-1}dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2\varpi}{a \sin 2a\varpi} \qquad (a').$$

Soit, 2°. $a > \frac{1}{2}n$, on aura par l'équation (b),

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = \frac{2a-n}{a} \cdot \left(\frac{2a-n}{n-a}\right);$$

mais en faisant $a = n - c$, on a

$$\left(\frac{2a-n}{n-a}\right) = \left(\frac{n-2c}{c}\right),$$

et par l'équation (v), on a

$$\frac{n-2c}{c} = 2^{-\frac{2c}{n}}\int\frac{z^{c-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

Donc au lieu de l'équation (a′), on aura

$$\int\left(z^{a-1}dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2a-n}{2a}\int\frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \qquad (b').$$

Au reste, cette dernière équation se vérifie immédiatement au moyen de la fonction $P = z^{a-\frac{1}{2}n}\sqrt{(1+z^n)} - z^a$, qui s'évanouit dans les deux limites, lorsque $z = 0$ et lorsque $z = \infty$; car si on prend la différentielle de cette fonction, et qu'ensuite on l'intègre, on trouvera

$$\int\left(z^{a-1}dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2a-n}{2a}\int\frac{z^{a-\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}},$$

formule qui ne diffère pas de la précédente, parce qu'en mettant $\frac{1}{z}$ au lieu de z, l'intégrale $\int\frac{z^{a-\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$ se change en $\int\frac{z^{n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$, les limites étant toujours $z=0$, $z=\infty$.

16. Considérons enfin, dans la supposition de n pair, la formule

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right)=\int\frac{x^{\frac{1}{2}n-a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

si on fait $x^{-n}=1+z^n$, on aura par la substitution,

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right)=\int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}},\qquad\text{(c}'\text{)}$$

et l'intégrale du second membre devra être prise entre les limites $z=0$, $z=\infty$.

Maintenant, par la combinaison des équations (x) et (c′), on obtient

$$\left(\frac{a}{a}\right)=2^{1-\frac{2a}{n}}\cos a\omega\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right),$$

et par conséquent aussi,

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right)=2^{\frac{2a}{n}}\sin a\omega\left(\frac{a}{\frac{1}{2}n-a}\right).$$

De ces deux-ci on conclura

$$\left(\frac{a}{a}\right)=2^{1-\frac{4a}{n}}\operatorname{cotang}a\omega.\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right)\qquad\text{(d}'\text{)},$$

d'où l'on voit que n étant pair, il suffit d'avoir les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$ pour tous les cas où a ne surpasse pas $\frac{1}{4}n$, et qu'ainsi le nombre des auxiliaires nécessaires pour déterminer toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, se réduit à $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$, selon que n est de la forme $4m$ ou $4m+2$.

17. A l'aide de l'équation (d′), on trouvera des relations entre les auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc., qui réduiront leur nombre comme il vient d'être dit.

Pour cela reprenons la formule (t),

$$\left(\frac{a}{a}\right)=\frac{A_aA_{a+1}\ldots A_{2a-1}}{A_1A_2\ldots A_{a-1}}\cdot\frac{\sin(a+1)\omega\sin(a+2)\omega\ldots\sin 2a\omega}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin a\omega};$$

elle donne, en faisant $n=2m$,

$$\left(\frac{m-a}{m-a}\right)=\frac{A_{m-a}.A_{m-a+1}\ldots A_{2m-2a-1}}{A_1A_2\ldots A_{m-a-1}}\cdot\frac{\sin(m-a+1)\omega\sin(m-a+2)\omega\ldots\sin(2m-2a)\omega}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(m-a)\omega};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (d'), et faisant les réductions dans l'hypothèse $a < \frac{1}{2}m$, on aura généralement

$$\frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{2a-1}}{A_{m-1} A_{m-2} \ldots A_{m-a}} = 2^{-\frac{a}{m}} \cdot \frac{\sin(m-1)\omega \sin(m-2)\omega \ldots \sin(m-a+1)\omega}{\sin a\omega \sin(a+1)\omega \ldots \sin(2a-1)\omega} \qquad (e').$$

De là résultent, en faisant successivement $a = 1, 2, 3$, etc., des équations particulières qui peuvent être mises sous cette forme

$$\left.\begin{aligned} A_{m-1} &= A_1 . 2^{\frac{1}{m}} \sin \omega \\ A_{m-2} &= \frac{A_2 A_3}{A_1} . 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 3\omega \\ A_{m-3} &= \frac{A_4 A_5}{A_2} . 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 5\omega \\ A_{m-4} &= \frac{A_6 A_7}{A_3} . 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 7\omega \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (f').$$

Elles devront être continuées jusqu'à ce que le nombre en soit $\frac{n-4}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

18. Par exemple, lorsque $n = 12$, il y a cinq auxiliaires $A = \left(\frac{10}{1}\right)$, $A_2 = \left(\frac{9}{2}\right)$, $A_3 = \left(\frac{8}{3}\right)$, $A_4 = \left(\frac{7}{4}\right)$, $A_5 = \left(\frac{6}{5}\right)$, entre lesquelles on a ces deux équations

$$A_5 = A_1 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \sin \omega,$$
$$A_4 = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot 2^{\frac{7}{6}} \sin 3\omega.$$

De sorte que le nombre d'auxiliaires nécessaires se réduit à trois, pour lesquelles on peut prendre A_1, A_2, A_3.

Si on préférait de prendre pour auxiliaires trois des quantités M_a, il faudrait avoir recours aux équations (u), lesquelles donnent

$$A_1 = M_1 \cdot \frac{\sin \omega}{\sin 2\omega},$$
$$\frac{A_2 A_3}{A_1 A_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\sin^2 . 2\omega}{\sin 3\omega \sin 4\omega},$$
$$\frac{A_4 A_5}{A_2 A_2} = \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{\sin^2 3\omega}{\sin 5\omega \sin 6\omega}.$$

Au moyen de ces équations et des précédentes, observant d'ailleurs qu'on a $\omega = \frac{\pi}{12}$, on trouve

$$A_1 = 2 \sin\omega \,.\, M_1,$$
$$A_2 = 2^{\frac{1}{6}} \sin\omega \,.\, M_2 \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_3 \cos 2\omega}\right)},$$
$$A_3 = 2^{\frac{1}{3}} \sin\omega \,.\, M_3 \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_3 \cos 2\omega}\right)},$$
$$A_4 = 2^{\frac{1}{6}} \sin\omega \,.\, M_2 \,.\, \frac{1}{\cos 2\omega},$$
$$A_5 = 2^{\frac{7}{6}} \sin^2\omega \,.\, M_1.$$

Ainsi, par les trois seules données M_1, M_2, M_3, on peut déterminer exactement toutes les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à la valeur $n = 12$; mais nous ferons voir ci-après que ces trois données peuvent se réduire à deux, ce qui rend encore plus simple la solution de ce problème.

CHAPITRE III.

Des cas où les Intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ peuvent être exprimées par les fonctions elliptiques.

Ces cas sont ceux où l'exposant n est égal à l'un des nombres 3, 4, 6, 8 et 12 : nous allons les examiner successivement.

Premier cas. $n = 3$.

19. La seule transcendante à déterminer est

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2^{-\frac{2}{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}.$$

Or en faisant $x = 1 - r^2 \cot^2 \frac{1}{2}\varphi$, $r = \sqrt[4]{3}$, $c^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, ou $c = \sin 75°$, on a $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{1}{r} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2\varphi)}} = \frac{1}{r} F(c, \varphi) + \text{const.}$ Cette intégrale doit être prise depuis $\tang \frac{1}{2}\varphi = r$, jusqu'à $\varphi = \pi$; mais par les formules connues (fonct. ell. art. 24) on trouve que la valeur $\tang \frac{1}{2}\varphi = r = \sqrt[4]{3}$, répond à la fonction $F\varphi = \frac{4}{3} F^1$; de là résulte $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{3} F^1 c$; donc l'intégrale cherchée

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{5}{4}} F^1(\sin 75^\circ) = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} F^1(\sin 15^\circ);$$

car on sait que $\qquad F^1(\sin 75^\circ) = \sqrt{3}\; F^1(\sin 15^\circ).$

Second cas $n = 4$.

20. Il suffit encore dans ce cas de déterminer la transcendante

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}}.$$

Soit $z = \text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi$, et $c^2 = \frac{1}{2}$ ou $c = \sin 45^\circ$, on aura $\int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}} = \ldots$ $\int \frac{\frac{1}{2} d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{2} F(c, \varphi)$; cette intégrale doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$; donc on aura

$$\left(\frac{1}{1}\right) = F^1 c = F^1(\sin 45^\circ).$$

Troisième cas $n = 6$.

21. On sait d'après le n° 16 que toutes les intégrales représentées par $\left(\frac{p}{q}\right)$ seront déterminées au moyen de la seule transcendante

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{2}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = 2^{\frac{2}{3}} \cos \frac{\pi}{6} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^6)}};$$

or par la substitution $\frac{1}{x^2} = 1 + z^2$, la première forme conduit au résultat $\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} F^1(\sin 15^\circ)$, et par la substitution $\frac{1}{z^2} = y^2 - 1$, la seconde forme conduirait au résultat $\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} F^1(\sin 75^\circ)$, qui s'accorde avec le précédent, puisqu'on a $F^1(\sin 75^\circ) = \sqrt{3} . F^1(\sin 15^\circ)$.

Quatrième cas $n = 8$.

22. La détermination de toutes les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ exige dans ce cas qu'on connaisse les deux transcendantes

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{3}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 2^{\frac{3}{4}} \cos \frac{\pi}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^8)}},$$

$$\left(\frac{2}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{4} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^8)}}.$$

Mettant dans la seconde $x^{\frac{1}{2}}$ à la place de x, ce qui ne change pas les limites, on aura $\left(\frac{2}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{1}{2}F^1(\sin 45^\circ)$.

Ainsi tout se réduit à trouver l'intégrale $\left(\frac{1}{1}\right)$, ce qui se fera au moyen de l'intégrale $T=\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^8)}}$, prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$.

On peut supposer d'abord qu'elle soit prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$; ensuite pour la trouver depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$, il faudra mettre $\frac{1}{z}$ à la place de z, ce qui donnera l'intégrale $\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1+z^8)}}$ à prendre encore depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. Donc l'intégrale dont il s'agit est la même que l'intégrale $\int\frac{dz\,(1+z^2)}{\sqrt{(1+z^8)}}$ prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

Soit $1-z^2=qz$, on aura $\frac{1}{z}-z=q$, $\frac{dz}{z^2}+dz=-dq$, $\sqrt{(1+z^8)}=z^2\sqrt{[(q^2+2)^2-2]}$; donc

$$T=\int\frac{dq}{\sqrt{[(q^2+2)^2-2]}}.$$

Cette intégrale devant être prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=\infty$, nous ferons $m^2=2+\sqrt{2}$, $q=m\,\text{tang}\,\varphi$, $b^2=2\sqrt{2}-2$, ce qui donnera l'intégrale indéfinie $T=\frac{1}{m}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{m}F(b,\varphi)$, et l'intégrale complète $T^1=\frac{1}{m}F^1b$; donc enfin la valeur de la transcendante cherchée sera $\left(\frac{1}{1}\right)=2^{-\frac{1}{4}}F^1b$, parce que d'ailleurs $m=2\cos\frac{\pi}{8}$.

Nous remarquerons que le module $b=\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}$ est le complément du module $c=\sqrt{2}-1$; or par la propriété de ces modules démontrée art. 85 des fonct. ell., on a $F^1b=\sqrt{2}\,F^1c$, donc on aura plus simplement

$$\left(\frac{1}{1}\right)=2^{\frac{1}{4}}F^1c=2^{\frac{1}{4}}F^1\left(\text{tang}\,\frac{\pi}{8}\right).$$

Cinquième cas $n=12$.

23. Il suffit dans ce cas de connaître les trois transcendantes

$$\left(\frac{1}{1}\right)=2^{\frac{5}{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=2^{\frac{5}{6}}\cos\frac{\pi}{12}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$$
$$\left(\frac{2}{2}\right)=2^{\frac{4}{6}}\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=2^{\frac{4}{6}}\cos\frac{2\pi}{12}\int\frac{zdz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$$
$$\left(\frac{3}{3}\right)=2^{\frac{3}{6}}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=2^{\frac{3}{6}}\cos\frac{3\pi}{12}\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}.$$

La seconde et la troisième se ramènent immédiatement aux formules déjà intégrées. En effet, si dans la seconde on met $x^{\frac{1}{2}}$ à la place de x, on aura

$$\left(\frac{2}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2^{-\frac{1}{3}}\, 3^{-\frac{1}{4}}\, \mathrm{F}^1(\sin 15^\circ);$$

et si dans la troisième on met $x^{\frac{1}{3}}$ au lieu de x, on aura

$$\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{3}\, \mathrm{F}^1(\sin 45^\circ);$$

il ne reste donc plus qu'à trouver la première $\left(\frac{1}{1}\right)$. Considérons, pour cet effet, l'intégrale $\mathrm{Z} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$ prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, on trouve, comme ci-dessus, qu'elle est égale à l'intégrale $\int \frac{dz(1+z^4)}{\sqrt{(1+z^{12})}}$ prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

Soit $1+z^4=pz^2$, on aura la transformée $\mathrm{Z} = \int \frac{\frac{1}{2}dp\sqrt{p}}{\sqrt{(p^4-7p^2+12)}}$ qu'il faut prendre depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$. Soit encore $n^4=12$, et $p^2+n^2=pv$, on aura

$$p^4-7p^2+12=p^2(v^2-2n^2+7)$$
$$2p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(v+2n)}+\sqrt{(v-2n)}$$
$$2p^{-\frac{1}{2}}dp = \frac{dv}{\sqrt{(v+2n)}} + \frac{dv}{\sqrt{(v-2n)}},$$

et enfin,

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{\sqrt{(v+2n)}\cdot\sqrt{(v^2-2n^2-7)}} + \frac{1}{4}\int \frac{dv}{\sqrt{(v-2n)}\cdot\sqrt{(v^2-2n^2-7)}}.$$

Nouvelle formule dont les deux parties doivent être intégrées depuis $v=\sqrt{(2n^2+7)}=2+\sqrt{3}$, jusqu'à $v=\infty$. Soit $2+\sqrt{3}=\lambda$ et $v+2n=x^2$, la première partie deviendra

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{(x^2-2n+\lambda)}\cdot\sqrt{(x^2-2n-\lambda)}}.$$

Soit encore $x^2=\frac{2n+\lambda}{\cos^2\varphi}$ et $c^2=\frac{\lambda-2n}{2\lambda}$, ou $c=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, la transformée sera $\frac{1}{2\sqrt{(2\lambda)}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, et sa valeur dans les limites requises sera $\frac{1}{2\sqrt{(2\lambda)}}\,\mathrm{F}^1 c$.

Si l'on fait semblablement $b=\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, valeur qui sera le complément du module c, l'autre intégrale sera $\frac{1}{2\sqrt{(2\lambda)}}\cdot\mathrm{F}^1 b$.

Donc l'intégrale cherchée $Z^1 = \frac{1}{2\sqrt{(2\lambda)}}(F^1c + F^1b)$. Mais on a trouvé (Fonct. ell., n° 156), que $F^1b = 3F^1c = \frac{6\cos 15^\circ}{\sqrt[4]{27}} F^1(\sin 45^\circ)$; d'ailleurs $\sqrt{(2\lambda)} = \sqrt{(4+2\sqrt{3})} = 2^{\frac{3}{2}}\cos 15^\circ$, donc $Z^1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(27)}} F^1(\sin 45^\circ)$. Donc, enfin, la transcendante cherchée

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{4}{3}}\,3^{-\frac{3}{4}}\cos 15^\circ . F^1(\sin 45^\circ).$$

24. Maintenant, si on fait $F^1(\sin 45^\circ) = B$, $F^1(\sin 15^\circ) = C$, on pourra exprimer les trois auxiliaires M_1, M_2, M_3, de l'art. 18, comme il suit :

$$M_1 = 2^{\frac{4}{3}}\,3^{-\frac{3}{4}}\cos\omega . B,$$
$$M_2 = 2^{-\frac{1}{3}}\,3^{-\frac{1}{4}}\,C,$$
$$M_3 = \tfrac{2}{3}\,B,$$

ce qui fait voir que les trois auxiliaires se réduisent à deux, puisque le rapport de M_3 à M_1 est connu. Au moyen de ces valeurs et des formules de l'art. 18, on trouvera

$$A_1 = 2^{\frac{1}{3}}\,3^{-\frac{3}{4}}\,B,$$
$$A_2 = (3^{-\frac{3}{4}}\sin\omega)^{\frac{1}{2}}\,C,$$
$$A_3 = (2.3^{-\frac{1}{4}}\sin\omega)^{\frac{1}{2}} . \tfrac{1}{3}\,B,$$
$$A_4 = 2^{\frac{5}{6}}\,3^{-\frac{3}{4}}\sin\omega . C,$$
$$A_5 = 2^{\frac{1}{2}}\,3^{-\frac{3}{4}}\sin\omega . B.$$

Ainsi, par les deux seules données B et C, on pourra déterminer toutes les transcendantes désignées par $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans le cas de $n = 12$. Ces transcendantes, en excluant celles qui sont déterminables par arcs de cercle, sont au nombre de 60, toutes différentes les unes des autres; car on compte pour une seule les deux $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$, et on suppose les deux nombres p et q moindres que 12. On voit de plus qu'elles se détermineront rationnellement en fonctions des trois quantités B, C, π, puisqu'elles s'expriment rationnellement par les auxiliaires A_1, A_2, etc.

Si on veut, par exemple, avoir la valeur de la transcendante $\left(\frac{5}{9}\right)$, on cherchera d'abord par l'équation (n) sa valeur en fonction de A, laquelle est

$$\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_3A_4} \cdot \frac{\sin\omega\sin 2\omega}{\sin 3\omega\sin 4\omega\sin 5\omega}.$$

Faisant ensuite les substitutions et les réductions, il viendra

$$\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{\pi}{2C}\sqrt{\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}\sin\omega}{6}\right)}.$$

CHAPITRE IV.

Formules pour évaluer par approximation les Intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$.

25. Ayant réduit au moindre nombre possible les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$, il ne reste plus qu'à faire voir comment on peut trouver par approximation, et d'une manière facile, la valeur de chacune de ces quantités.

Pour cet effet, considérons d'abord la formule

$$\left(\frac{a}{a}\right)=2^{1-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

et soit $\sqrt{(1-x^n)}=1-y$, ou $x^n=2y-y^2$, on aura pour transformée,

$$\left(\frac{a}{a}\right)=2^{1-\frac{a}{n}}\int\frac{dy}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{a}{n}-1};$$

cette différentielle étant développée et intégrée depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, on obtient

$$\left(\frac{a}{a}\right)=\frac{2^{1-\frac{a}{n}}}{a}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{n-a}{2n}\cdot\frac{a}{n+a}+\frac{n-a\,.\,2n-a}{2n\,.\,4n}\cdot\frac{a}{2n+a}\\&\qquad+\frac{n-a.2n-a.3n-a}{2n.4n.6n}\cdot\frac{a}{3n+a}\\&\qquad+\text{etc.},\end{aligned}\right\}\quad(g'),$$

formule dont chaque terme est moindre que la moitié du précédent.

26. En général, si on veut avoir la valeur approchée de la quantité $\left(\frac{p}{q}\right)=\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, il faut partager cette intégrale en deux parties, l'une depuis $x^n=0$ jusqu'à $x^n=\frac{1}{2}$, l'autre depuis $x^n=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x^n=1$.

La première partie étant nommée P, on trouve par les développemens ordinaires,

$$P = 2^{-\frac{p}{n}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \text{etc.}\right).$$

Pour avoir la seconde partie que nous nommerons Q, il faut faire $x^n = 1 - y^n$, alors on aura

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\int \frac{y^{q-1}dy}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

et la transformée en y devra être intégrée depuis $y^n = \frac{1}{2}$ jusqu'à $y^n = 0$. Si on change son signe, elle devra être intégrée depuis $y^n = 0$ jusqu'à $y^n = \frac{1}{2}$; on aura donc

$$Q = 2^{-\frac{q}{n}}\left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n} \cdot \frac{1}{n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+q} + \text{etc.}\right.$$

Il ne s'agit plus que de réunir ces deux parties, et on obtient

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{\begin{array}{l} 2^{-\frac{p}{n}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q \cdot 3n-q}{2n \cdot 4n \cdot 6n} \cdot \frac{1}{3n+p} + \text{etc.}\right) \\ + 2^{-\frac{q}{n}}\left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n} \cdot \frac{1}{n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p \cdot 3n-p}{2n \cdot 4n \cdot 6n} \cdot \frac{1}{3n+q} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\} \quad (h').$$

Les deux séries comprises dans cette formule sont toujours convergentes, puisque chaque terme est moindre que la moitié du précédent : on obvie ainsi à l'inconvénient que présenterait la méthode ordinaire, si on voulait intégrer tout d'un coup la valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ce qui donnerait la suite très peu convergente

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q}{n \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \text{etc.} \qquad (i').$$

Au reste, lorsqu'on suppose $p = q = a$, la formule (h') se réduit précisément à la formule (g') trouvée par une autre voie.

CHAPITRE V.

De l'Intégrale $\int x^{p-1}dx \log \frac{1}{x}(1-x^n)^{q-n}$ et autres semblables, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

27. On pourrait, sans rien diminuer de la généralité de la formule, faire $n=1$; mais pour l'application que nous voulons en faire, nous désignerons par n, un entier quelconque, ce qui n'empêchera pas que p ne soit un nombre à volonté entier ou fractionnaire, et que l'intégrale ne soit une fonction continue de p: Soit donc l'intégrale connue $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{q-n}=Z$, si on la différentie par rapport à p, on aura $-\frac{dZ}{dp}$ ou $Z'=\int x^{p-1}dx\,\mathcal{L}\frac{1}{x}(1-x^n)^{q-n}$; celle-ci donnera de même par la différentiation $\frac{ddZ}{dp^2}$ ou.............. $Z''=\int x^{p-1}dx\left(\mathcal{L}\frac{1}{x}\right)^2(1-x^n)^{q-n}$; ainsi de suite, ces nouvelles intégrales étant prises comme l'intégrale Z, entre les limites $x=0$, $x=1$.

Comme on a généralement par la formule (i')

$$Z=\frac{1}{p}+\frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{p+n}+\frac{n-q\,.\,2n-q}{n\,.\,2n}\cdot\frac{1}{p+2n}+\frac{n-q\,.\,2n-q\,.\,3n-q}{n\,.\,2n\,.\,3n}\cdot\frac{1}{p+3n}+\text{etc.},$$

on trouvera, par des différentiations successives,

$$Z'=\frac{1}{p^2}+\frac{n-q}{1}\cdot\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{n-q\,.\,2n-q}{n\,.\,2n}\cdot\frac{1}{(2n+p)^2}+\text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}\,Z''=\frac{1}{p^3}+\frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{(n+p)^3}+\frac{n-q\,.\,2n-q}{n\,.\,2n}\cdot\frac{1}{(2n+p)^3}+\text{etc.},$$

$$\frac{1}{2\,.\,3}\,Z'''=\frac{1}{p^4}+\frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{(n+p)^4}+\frac{n-q\,.\,2n-q}{n\,.\,2n}\cdot\frac{1}{(2n+p)^4}+\text{etc.}$$

Mais ces suites ont l'inconvénient de n'être pas suffisamment convergentes.

28. Pour avoir ces mêmes valeurs exprimées en suites plus conver-

gentes, il faudrait partir de la formule (h'), et la différencier par rapport à p, autant de fois qu'il est nécessaire. En la différenciant une fois, on aura

$$Z' = \frac{2^{-\frac{p}{n}}\log 2}{n}\left\{\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-q.2n-q}{2n\,4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \text{etc.}\right\}$$
$$+\, 2^{-\frac{p}{n}}\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{1}{(n+p)^2} + \frac{n-q.2n-q}{2n.4n}\cdot\frac{1}{(2n+p)^2} + \text{etc.}\right\}$$
$$+\, 2^{-\frac{q}{n}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n+q} + \frac{n-p.2n-p}{2n.4n.(2n+q)}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{2n-p}\right)\\ + \frac{n-p.2n-p.3n-p}{2n.4n.6n.(3n+q)}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{2n-p} + \frac{1}{3n+p}\right) + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Ces suites sont convergentes, puisque chaque terme est moindre que la moitié du précédent; mais leur forme est compliquée, et elle le deviendrait davantage dans la différentielle du second ordre ou d'un ordre plus élevé, c'est pourquoi il convient de recourir à d'autres moyens, si on veut évaluer facilement les intégrales dont il s'agit.

29. Par la formule de l'art. 4, on a cette expression de Z,

$$Z = \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdot\text{etc.},$$

où les facteurs successifs dont le nombre est infini, s'approchent continuellement de l'unité qui est leur limite. Si on différencie, par rapport à p, les logarithmes des deux membres, il viendra

$$\frac{dZ}{Zdp} = \left(\frac{1}{p+q} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{p+q+n} - \frac{1}{p+n}\right) + \left(\frac{1}{p+q+2n} - \frac{1}{p+2n}\right) + \text{etc.}$$

Soit Φ ou $\Phi(v)$ une fonction de v, telle qu'on ait

$$\Phi = \frac{v^p}{p} - \frac{v^{p+q}}{p+q} + \frac{v^{p+n}}{p+n} - \frac{v^{p+q+n}}{p+q+n} + \frac{v^{p+2n}}{p+2n} - \frac{v^{p+q+2n}}{p+q+2n} + \text{etc.}$$

La fonction $\Phi(v)$ devenant $\Phi(1)$, lorsque $v=1$, on aura $-\frac{dZ}{Zdp}$ ou $\frac{Z'}{Z} = \Phi(1)$.
Or, en différenciant par rapport à v la valeur de Φ, on a

$$d\Phi = dv\left\{\begin{array}{l} \quad v^{p-1} + v^{p+n-1} + v^{p+2n-1} + \text{etc.}\\ -v^{p+q-1} - v^{p+q+n-1} - v^{p+q+2n-1} - \text{etc.}\end{array}\right\},$$

ou en sommant ces suites $d\Phi = dv\left(\frac{v^{p-1} - v^{p+q-1}}{1-v^n}\right)$; donc

$$\Phi = \int\left(\frac{v^{p-1} - v^{p+q-1}}{1-v^n}\right)dv.$$

Cette intégrale doit être prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsqu $v=0$; on fera ensuite $v=1$, et on aura la valeur cherchée de $\Phi(1)$.

Mettant x à la place de v et faisant

$$T=\int\left(\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\right)dx,$$

on aura $Z'=ZT$; donc si on prend, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, les troi intégrales

$$Z'=\int\frac{x^{p-1}dx\log\frac{1}{x}}{(1-x^n)^{1-\frac{q}{n}}},\quad Z=\int\frac{x^{p-1}dx}{(1-x^n)^{1-\frac{q}{n}}},\quad T=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}dx;$$

la première sera égale au produit de deux autres, ce qui est un théorème fort remarquable.

30. Pour étendre encore davantage cette théorie, considérons ces deux suites d'intégrales en Z et T, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

$$Z=\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\quad T=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}dx,$$

$$Z'=\int\frac{x^{p-1}dx\log\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}};\quad T'=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}dx\log\frac{1}{x},$$

$$Z''=\int\frac{x^{p-1}dx\log^2\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\quad T''=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}dx\log^2\frac{1}{x},$$

etc., etc.

Il résulte d'abord du théorème précédent qu'on a

$$Z'=ZT.$$

Différenciant cette équation par rapport à p, et observant qu'on a $\frac{dZ}{dp}=-Z'$, $\frac{dZ'}{dp}=-Z''$, $\frac{dT}{dp}=-T'$, on aura $Z''=Z'T+ZT'$, ou

$$Z''=Z(T^2+T').$$

Celle-ci étant différenciée de nouveau par rapport à p, donne

$$Z'''=Z(T^3+3TT'+T''),$$

et ainsi de suite, la loi de ces expressions étant analogue à celle des différentielles successives de la formule $ue^{\int udp}$.

Si l'on veut donc avoir les valeurs des quantités Z', Z'', Z''', etc., ou simplement leur rapport à la fonction primitive Z, il faudra connaître les quantités T, T′, T″, etc., en pareil nombre. Mais, comme celles-ci sont rationnelles, et contiennent des puissances moins élevées de $\log\frac{1}{x}$, on voit qu'au moins la difficulté est diminuée.

31. Si l'on intègre la différentielle $x^{m+\alpha-1}dx$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura

$$\int x^{m+\alpha-1}dx=\frac{1}{m+\alpha}=\frac{1}{m}-\frac{\alpha}{m^2}+\frac{\alpha^2}{m^3}-\frac{\alpha^3}{m^4}+\text{etc.}$$

Si on met la même différentielle sous la forme $x^{m-1}dx.x^{\alpha}$, ou

$$x^{m-1}dx\left(1+\alpha\log x+\frac{\alpha^2}{1.2}\log^2 x+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\log^3 x+\text{etc.}\right),$$

son intégrale prise entre les mêmes limites, sera

$$\int x^{m-1}dx+\alpha\int x^{m-1}dx\log x+\frac{\alpha^2}{1.2}\int x^{m-1}dx\log^2 x+\text{etc.}$$

L'identité de ces deux formules exige donc qu'on ait

$$\int x^{m-1}dx=\frac{1}{m},$$

$$\int x^{m-1}dx\log\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{m^2},$$

$$\int x^{m-1}dx\log^2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1.2}{m^3},$$

$$\int x^{m-1}dx\log^3\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1.2.3}{m^4},$$

et en général

$$\int x^{m-1}dx\log^n\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1.2.3\ldots.n}{m^{n+1}}. \qquad (k')$$

32. A l'aide de cette formule on peut exprimer les quantités T′, T″, etc., par des séries régulières, composées des puissances réciproques des nombres pris à des intervalles égaux dans la suite des nombres naturels.

Ainsi en développant d'abord la différentielle qu'il faut intégrer pour avoir T′, on a

$$T'=\int dx\log\frac{1}{x}\left\{\begin{array}{l} x^{p-1}+x^{p+n-1}+x^{p+2n-1}+\text{etc.} \\ -x^{p+q-1}-x^{p+q+n-1}-x^{p+q+2n-1}-\text{etc.}\end{array}\right\},$$

et effectuant l'intégration entre les limites $x=0$, $x=1$, il vient

$$\begin{aligned}T'=&\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+n)^2}+\frac{1}{(p+2n)^2}+\text{etc.}\\ &-\frac{1}{(p+q)^2}-\frac{1}{(p+q+n)^2}-\frac{1}{(p+q+2n)^2}-\text{etc.}\end{aligned}$$

Désignons en général par $(a, n)^m$, la somme de la suite

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{(a+n)^m}+\frac{1}{(a+2n)^m}+\frac{1}{(a+3n)^m}+\text{etc.},\qquad (l')$$

laquelle deviendra $(1, n)^m$, $(2, n)^m$, $(3, n)^m$, etc., selon qu'on fera $a=1$, 2, 3, etc., n étant constant: on aura suivant cette notation,

$$\left.\begin{aligned} T' &= (p,\ n)^2-(p+q,\ n)^2 \\ \tfrac{1}{2}T'' &= (p,\ n)^3-(p+q,\ n)^3 \\ \tfrac{1}{2.3}T''' &= (p,\ n)^4-(p+q,\ n)^4 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}.\qquad (m')$$

33. Il faut observer que n et m restant les mêmes, on n'aura besoin de considérer les valeurs de $(a, n)^m$, que depuis $a=1$ jusqu'à $a=n$; car il est visible, par exemple, que $(n+1, n)^m$ se réduit à $(1, n)^m-1$, et qu'en général on a

$$(a+n, n)^m=(a, n)^m-\frac{1}{a^m}.\qquad (n')$$

Par suite de cette formule, on aurait de même

$$(a+2n, n)^m=(a, n)^m-\frac{1}{a^m}-\frac{1}{(a+n)^m},$$

et en général on réduira toute quantité $(a, n)^m$, où a est plus grand que n, à une quantité semblable où a n'excédera pas n.

On voit encore que $(n, n)^m$ représentant la suite

$$\frac{1}{n^m}+\frac{1}{(2n)^m}+\frac{1}{(3n)^m}+\text{etc.},$$

cette quantité est la même chose que

$$\frac{1}{n^m}\cdot\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\text{etc.}\right).$$

Si donc on désigne par S_m la somme des puissances de degré $-m$, des nombres naturels, en sorte qu'on ait

$$S_m=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{etc.},\qquad (p')$$

on aura $(n, n)^m=\frac{1}{n^m}S_m$. Enfin il est visible qu'on aura aussi l'équation

$$S_m=(1, n)^m+(2, n)^m\ldots\ldots+(n, n)^m,\qquad (q')$$

laquelle, en substituant la valeur de $(n, n)^m$, devient

$$\left(1-\frac{1}{n^m}\right)S_m = (1,n)^m + (2,n)^m + (3,n)^m + \ldots\ldots + (n-1,n)^m.$$

34. Considérons particulièrement le cas de $n=2, p=1, q=1$, alors on aura

$$T' = (1,2)^2 - (2,2)^2 = \left(1-\frac{2}{2^2}\right) S_2 = \frac{1}{2} S_2,$$
$$T'' = (1,2)^3 - (2,2)^3 = \left(1-\frac{2}{2^3}\right) S_3 = \frac{3}{4} S_3,$$
$$T''' = (1,2)^4 - (2,2)^4 = \left(1-\frac{2}{2^4}\right) S_4 = \frac{7}{8} S_4.$$
etc.

On sait que les quantités S_2, S_4, S_6, etc., sont connues en fonctions de π, et qu'on a $S_2 = \frac{1}{6}\pi^2$, $S_4 = \frac{1}{90}\pi^4$, $S_6 = \frac{1}{945}\pi^6$, etc. A l'égard des quantités S_3, S_5, etc., ce sont des transcendantes particulières qui ne se rattachent point aux autres transcendantes connues; il est facile néanmoins d'en trouver les valeurs avec une grande approximation, par les belles méthodes qu'Euler a données pour cet objet (*Calc. diff.*, pag. 451 et suiv.).

Au moyen de ces diverses quantités, on connaîtra donc les intégrales suivantes, déduites des équations de l'art. 30.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int \frac{dx \log \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2} \log 2,$$
$$\int \frac{dx \log^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{12}\right),$$
$$\int \frac{dx \log^3 \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\left(\log^3 2 + 3 \log 2 . \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{2} S_3\right),$$

et on pourra prolonger indéfiniment cette suite où tout est connu, excepté S_3, S_5, etc., dont on connaît au moins les valeurs très approchées, jusqu'à S_{15} (*Calc. diff.*, pag. 456.)

CHAPITRE VI.

De la réduction des Transcendantes désignées par (a, n)^m *dans le chapitre précédent.*

35. **O**CCUPONS-NOUS maintenant de réduire au plus petit nombre possible les quantités $(1, n)^m$, $(2, n)^m$, $(3, n)^m$, etc., qui répondent à une même valeur de n. Pour cet effet, nous supposerons connue la formule suivante dans laquelle $\omega = \frac{\pi}{n}$ (*),

$$\int\left(\frac{y^{a-1}-y^{n-a-1}}{1-y^n}\right)dy = \omega \cot a\omega. \qquad (r')$$

Cette formule étant différenciée successivement par rapport à a, donne les résultats suivans :

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{y^{a-1}+y^{n-a-1}}{1-y^n}\,dy \log\frac{1}{y} &= \frac{\omega^2}{\sin^2 a\omega} \\
\frac{1}{2}\int\frac{y^{a-1}-y^{n-a-1}}{1-y^n}\,dy \log^2\frac{1}{y} &= \frac{\omega^3}{\sin^3 a\omega}\cos a\omega \\
\frac{1}{2.3}\int\frac{y^{a-1}+y^{n-a-1}}{1-y^n}\,dy \log^3\frac{1}{y} &= \frac{\omega^4}{\sin^4 a\omega}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos^2 a\omega\right) \\
\text{etc.} &
\end{aligned}\right\}. \qquad (s')$$

(*) Soit $V = \int\frac{y^{a-1}-y^{n-a-1}}{1-y^n}\,dy$, on aura en réduisant en série et intégrant les différens termes de $y = 0$ à $y = 1$,

$$V = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a}\right) + \left(\frac{1}{2n+a} - \frac{1}{2n-a}\right) + \left(\frac{1}{3n+a} - \frac{1}{3n-a}\right) + \text{etc.},$$

ou

$$V = \frac{1}{a} - \frac{2a}{n^2-a^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} - \frac{2a}{9n^2-a^2} - \text{etc.};$$

or par une formule qui se trouve page 143 de *l'Introd. in An.*, le second membre se réduit à $\frac{\pi}{n}\cot\frac{a\pi}{n}$; donc $V = \omega \cot a\omega$.

Mettant au lieu des premiers membres les valeurs qu'ils obtiennent par le développement en série et l'application de la formule (k'), on aura

$$\left.\begin{aligned}
&(a\,,\,n)^2+(n-a\,,\,n)^2=\frac{\omega^2}{\sin^2 a\omega}\\
&(a\,,\,n)^3+(n-a\,,\,n)^3=\frac{\omega^3}{\sin^3 a\omega}\cos a\omega\\
&(a\,,\,n)^4+(n-a\,,\,n)^4=\frac{\omega^4}{\sin^4 a\omega}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos^2 a\omega\right)\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}. \tag{t'}$$

Ces formules serviront à établir entre les diverses quantités $(a\,,\,n)^m$, qui répondent à une même valeur de n, toutes les relations qu'on peut obtenir par d'autres voies, et qui sont données sous diverses formes dans les ouvrages d'Euler. C'est ce que nous allons développer dans deux exemples.

36. Soit $n=6$ et $m=2$, on aura l'équation générale

$$(a,n)^2+(6-a\,,6)^2=\frac{\omega^2}{\sin^2 a\omega},$$

d'où l'on déduit successivement

$$\left.\begin{aligned}
(1,6)^2+(5,6)^2&=\frac{\omega^2}{\sin^2 \omega}\\
(2,6)^2+(4,6)^2&=\frac{\omega^2}{\sin^2 2\omega}\\
(3,6)^2+(3,6)^2&=\frac{\omega^2}{\sin^2 3\omega}
\end{aligned}\right\}, \tag{u'}$$

ou en substituant la valeur $\omega=\frac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned}
(1,6)^2+(5,6)^2&=\frac{\pi^2}{9},\\
(2,6)^2+(4,6)^2&=\frac{\pi^2}{27},\\
(3,6)^2&=\frac{\pi^2}{72}.
\end{aligned}$$

La somme de ces équations est

$$\left(1-\frac{1}{36}\right)S_2=\frac{35}{216}\pi^2,$$

d'où l'on déduit $S_2=\frac{1}{6}\pi^2$, ce qui est un résultat connu; mais la démonstration qu'on en donne ici n'en est pas moins remarquable.

Outre cette valeur de S_2, on connaît $(3,6)^2=\frac{1}{72}\pi^2$, $(6,6)^2=\frac{1}{36}S=\frac{1}{216}\pi^2$: mais les quatre autres quantités $(1,6)^2$, $(2,6)^2$, $(4,6)^2$, $(5,6)^2$ ne peuvent être déterminées par les équations précédentes.

Observons cependant que puisqu'on a

$$(2,6)^2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{20^2} + \text{etc.},$$

il en résulte

$$(2,6)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc.}\right) = \frac{1}{4}(1,6)^2 + \frac{1}{4}(4,6)^2;$$

donc les quatre quantités dont il s'agit peuvent être déterminées au moyen de l'une d'entre elles, par exemple, au moyen de $(1,6)^2$, de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned}(1,6)^2 &= \zeta\\ (2,6)^2 &= \frac{1}{135}\pi^2 + \frac{1}{5}\zeta\\ (4,6)^2 &= \frac{4}{135}\pi^2 - \frac{1}{5}\zeta\\ (5,6)^2 &= \frac{1}{9}\pi^2 - \zeta\end{aligned}\right\}. \qquad (v')$$

37. Quant à la valeur absolue de ζ, elle n'est déterminable exactement par aucune formule connue; mais on peut en trouver une valeur aussi approchée qu'on voudra par la méthode qu'Euler a donnée (*Calc. diff.*, pag. 451.)

Pour cela ayant fait

$$s = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(a+2n)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+nx)^2},$$

on trouve en général

$$s = C - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a+nx} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a+nx)^2} - \frac{A'n}{(a+nx)^3} + \frac{B'n^3}{(a+nx)^5} - \frac{C'n^5}{(a+nx)^7} + \frac{D'n^7}{(a+nx)^9} - \text{etc.},$$

A', B', C', D', etc. étant la suite des nombres Bernoulliens.

Il résulte de cette formule que la somme de la suite prolongée à l'infini étant désignée par $(a, n)^2$, on a $(a, n)^2 = C$; donc réciproquement on a

$$(a, n)^2 = s + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a+nx} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a+nx)^2} + \frac{A'n}{(a+nx)^3} - \frac{B'n^3}{(a+nx)^5} + \frac{C'n^5}{(a+nx)^7} - \text{etc.} \qquad (x')$$

On sait que la suite A', B', C', D' est divergente à compter du troisième terme, et le devient plus que toute progression géométrique donnée; d'où il suit que la suite contenue dans la formule (x') deviendra nécessairement divergente après un certain nombre de termes. Mais ce qui est fort remarquable, c'est que cette formule n'en est pas moins propre à donner la valeur de $(a, n)^2$ avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer.

Pour cela il faut donner à x une valeur arbitraire d'autant plus grande qu'on voudra obtenir une plus grande approximation (la valeur $x = 10$ suffit pour donner 18 ou 20 décimales exactes). Au moyen de cette valeur, on commencera par prendre la somme effective de la suite

$$s = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(a+2n)^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(a+xn)^2};$$

substituant cette valeur de s ainsi que celle de x dans l'équation (x'), on aura pour la valeur de $(a, n)^2$ une suite d'abord très convergente, mais dont la convergence diminuera de plus en plus, jusqu'à un certain terme où elle deviendra divergente, et cette divergence augmenterait de plus en plus à l'infini.

Par le calcul des termes successifs, on obtiendra des résultats alternativement plus grands et plus petits que la valeur cherchée, et on devra s'arrêter aux termes où cesse la convergence.

Ces termes indiqueront deux limites fort rapprochées, entre lesquelles se trouve nécessairement la valeur de $(a, n)^2$.

Si ces deux limites ne donnaient pas encore une approximation suffisante, il ne resterait d'autre parti à prendre que de recommencer un nouveau calcul en donnant à x une valeur plus grande. Mais, pour l'ordinaire, une valeur médiocrement grande de x donnera une très grande approximation.

Nous donnerons ci-après un exemple du calcul de ces sortes de suites qu'on peut appeler *suites demi-convergentes.*

38. Soit maintenant $m = 3$ et $n = 6$, nous aurons l'équation générale

$$(a, 6)^3 - (6 - a, 6)^3 = \frac{\omega^3 \cos a\omega}{\sin^3 a\omega},$$

d'où l'on déduit les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} (1,6)^3 - (5,6)^3 &= \frac{\omega^3 \cos \omega}{\sin^3 \omega} = 4\omega^3\sqrt{3} \\ (2,6)^3 - (4,6)^3 &= \frac{\omega^3 \cos 2\omega}{\sin^3 2\omega} = \frac{4\omega^3}{3\sqrt{3}} \end{aligned}\right\}. \qquad (y')$$

D'ailleurs on a $(6,6)^3 = \frac{1}{216} S_3$, et

$$(1,6)^3 + (2,6)^3 + (3,6)^3 + (4,6)^3 + (5,6)^3 = \frac{215}{216} S_3.$$

Ces équations sont insuffisantes pour déterminer toutes les inconnues ; mais les diviseurs de 6 qui sont 2 et 3, en fournissent de nouvelles.

On a en effet,

$$(2,6)^3 = \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{10^3}+\text{etc.}\right) = \frac{1}{8}\left[(1,6)^3+(4,6)^3\right],$$

$$(3,6)^3 = \frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}\right) = \frac{1}{27}\left[(1,6)^3+(3,6)^3+(5,6)^3\right];$$

de là on voit que les cinq quantités $(1,6)^3$, $(2,6)^3$, $(3,6)^3$, $(4,6)^3$, $(5,6)^3$ se détermineront en supposant connue l'une d'entre elles. Ainsi en faisant $(1,6)^3 = \xi$, on aura

$$\begin{aligned}
(1,6)^3 &= \xi, \\
(2,6)^3 &= \frac{1}{7}\left(\xi - \frac{4\omega^3}{3\sqrt{3}}\right), \\
(3,6)^3 &= \frac{1}{13}\left(\xi - 2\omega^3\sqrt{3}\right), \\
(4,6)^3 &= \frac{1}{7}\left(\xi - \frac{32\omega^3}{3\sqrt{3}}\right), \\
(5,6)^3 &= \xi - 4\omega^3\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

La somme de ces quantités doit être égale à $\frac{215}{216}S_3$, ainsi on aura

$$\frac{215}{216}S_3 = \frac{215}{91}\xi - \frac{430}{91}\omega^3\sqrt{3},$$

ou

$$S_3 = \frac{216}{91}\xi - \frac{432}{91}\omega^3\sqrt{3}.$$

Réciproquement on peut exprimer toutes les quantités $(1,6)^3$, $(2,6)^3$, etc., au moyen de S_3 et de $\omega = \frac{\pi}{6}$, et on trouve

$$\left.\begin{aligned}
(1,6)^3 &= \frac{91}{216}S_3 + 2\omega^3\sqrt{3} \\
(2,6)^3 &= \frac{13}{216}S_3 + \frac{2}{9}\omega^3\sqrt{3} \\
(3,6)^3 &= \frac{7}{216}S_3 \\
(4,6)^3 &= \frac{13}{216}S_3 - \frac{2}{9}\omega^3\sqrt{3} \\
(5,6)^3 &= \frac{91}{216}S_3 - 2\omega^3\sqrt{3} \\
(6,6)^3 &= \frac{1}{216}S_3
\end{aligned}\right\}. \qquad (z')$$

39. On déduirait aisément des équations (q'') les autres propriétés

connues des quantités $(a, n)^m$, c'est-à-dire des suites qui résultent de la décomposition de la suite générale

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \text{etc.},$$

en prenant les termes de trois en trois, de quatre en quatre, ou en général de n en n. On trouverait, par exemple, que la suite

$$1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

est sommable lorsque m est impair, et qu'elle ne l'est pas lorsque m est pair.

On trouverait au contraire que la suite

$$1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

est sommable lorsque m est pair, et qu'elle ne l'est pas lorsque m est impair. Le mot *sommable* est ici entendu non dans un sens absolu, mais relativement aux méthodes connues jusqu'à présent.

Ces choses n'ayant point de difficulté, et ayant d'ailleurs été démontrées par d'autres voies, nous ne nous y arrêterons pas davantage. Nous ferons voir seulement comment on peut trouver, par des suites qui soient convergentes dans toute leur étendue, les valeurs des quantités ζ et S_3 qui sont restées inconnues dans les art. 36 et 38; recherche plus difficile qu'elle ne paraît au premier coup d'œil, parce qu'en suivant les méthodes qui se présentent naturellement, on retombe sur la même difficulté qu'on voulait résoudre.

40. Pour obtenir d'abord la valeur de S_3, j'observe qu'on peut supposer

$$\left.\begin{aligned}
(1,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y^6}\log^2 y \\
(2,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{1-y^6}\log^2 y \\
(3,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^2dy}{1-y^6}\log^2 y \\
(4,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^3dy}{1-y^6}\log^2 y \\
(5,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^4dy}{1-y^6}\log^2 y \\
(6,6)^3 &= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^5dy}{1-y^6}\log^2 y
\end{aligned}\right\}; \qquad (a'')$$

car les seconds membres étant intégrés depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, au moyen de la formule (k'), ces équations deviennent identiques.

Or, d'après les équations (y'), on a

$$(1,6)^3-(5,6)^3=\frac{1}{2}\int\frac{1-y^4}{1-y^6}\,dy\log^2 y=4\omega^3\sqrt{3},$$
$$(2,6)^3-(4,6)^3=\frac{1}{2}\int\frac{y-y^3}{1-y^6}\,dy\log^2 y=\frac{4\omega^3}{3\sqrt{3}}.$$

Ces deux équations ajoutées ensemble, puis soustraites l'une de l'autre, donnent les deux suivantes :

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy\log^2 y}{1-y+y^2}=4\omega^3\sqrt{3}+\frac{4\omega^3}{3\sqrt{3}}=\frac{40\omega^3\sqrt{3}}{9},$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{dy\log^2 y}{1+y+y^2}=4\omega^3\sqrt{3}-\frac{4\omega^3}{3\sqrt{3}}=\frac{32\omega^3\sqrt{3}}{9},$$

de sorte qu'on a entre ces intégrales le rapport très simple

$$\int\frac{dy\log^2 y}{1-y+y^2}=\frac{5}{4}\int\frac{dy\log^2 y}{1+y+y^2};$$

mais cette formule est susceptible d'être généralisée ainsi :

$$\int\frac{dy\log^m y}{1-y+y^2}=\frac{2^m+1}{2^m}\int\frac{dy\log^m y}{1+y+y^2}. \qquad (b'')$$

En effet, soit

$$P=\int\frac{dy\log^m y}{1-y+y^2},\ \text{et}\ Q=\int\frac{dy\log^m y}{1+y+y^2},$$

on aura

$$\frac{1}{2}(P-Q)=\int\frac{y\,dy\log^m y}{1+y^2+y^4};$$

mettant dans cette dernière $y^{\frac{1}{2}}$ au lieu de y, il viendra

$$\frac{1}{2}(P-Q)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\int\frac{dy\log^m y}{1+y+y^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}Q,$$

et par conséquent $P=\frac{2^m+1}{2^m}Q$.

Par la combinaison des équations (a''), et la substitution des valeurs données par les équations (z'), on obtient

$$(1,6)^3+(4,6)^3=\frac{1}{2}\int\frac{dy\log^2 y}{1-y^3}=\frac{104}{216}S_3+\frac{16}{9}\omega^3\sqrt{3},$$
$$(5,6)^3+(6,6)^3=\frac{1}{2}\int\frac{y^2dy\log^2 y}{1-y^3}=\frac{8}{216}S_3.$$

Soustrayant la seconde de la première, on aura

$$\frac{1}{2}\int\frac{(1+y)\,dy\log^2 y}{1+y+y^2}=\frac{4}{9}S_3+\frac{16}{9}\omega^3\sqrt{3};$$

d'ailleurs on a déjà trouvé

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy\log^2 y}{1+y+y^2}=\frac{32}{9}\omega^3\sqrt{3};$$

donc en éliminant ω^3, on aura

$$\frac{8}{9}S_3=\int\frac{(y+\frac{1}{2})\,dy\log^2 y}{1+y+y^2}. \tag{c''}$$

C'est de cette formule que nous allons tirer la valeur de S_3.

41. Je remarque d'abord qu'on peut faire

$$\int\frac{(y+\frac{1}{2})\,dy\log^2 y}{1+y+y^2}=\int\frac{dy}{1+y}\log^2 y-\frac{1}{2}\int\frac{(1-y)\,dy\log^2 y}{(1+y)(1+y+y^2)}.$$

La première partie

$$\int\frac{dy}{1+y}\log^2 y=2\left(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)=2S_3\left(1-\frac{2}{8}\right)=\frac{3}{2}S_3,$$

donc on aura

$$\frac{11}{18}S_3=\int\frac{\frac{1}{2}(1-y)\,dy\log^2 y}{(1+y)(1+y+y^2)}:$$

soit $y=\frac{1-z}{1+z}$, et la transformée sera

$$\frac{11}{18}S_3=\int\frac{z\,dz}{3+z^2}\log^2 y,$$

formule qui doit toujours être intégrée depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

On voit maintenant que comme z^2 est toujours plus petit que 1, on pourra réduire $\frac{z\,dz}{3+z^2}$ en une série convergente, de sorte que l'intégrale ne dépendra plus que de termes de la forme $\int z^{2n+1}dz\log^2 y$. Mais, pour rendre la série encore plus convergente, je fais $z^2=1-u^2$, et j'ai

$$\frac{11}{18}S_3=\int\frac{u\,du}{4-u^2}\log^2 y,$$

intégrale qui doit être encore prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$.

Cette intégrale étant prise par parties, devient

$$-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{u^2}{4}\right).\log^2 y+\int\frac{dy}{y}\log y\,.\log\left(1-\frac{u^2}{4}\right);$$

la première partie s'évanouit aux deux limites de l'intégrale; ainsi on a simplement

$$\frac{11}{18}S_3 = \int \frac{dy}{y}\log y \log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right).$$

Développant $\log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)$, et substituant la valeur $\frac{dy}{y} = -\frac{2dz}{u^2}$, on aura

$$\frac{11}{18}S_3 = \frac{1}{2}\int dz \log\frac{1}{y}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{u^4}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{u^6}{4^3} + \text{etc.}\right).$$

Soit donc

$$\frac{1}{2}\int dz \log\frac{1}{y} = P^0,$$
$$\frac{1}{2}\int u^2 dz \log\frac{1}{y} = P',$$
$$\frac{1}{2}\int u^4 dz \log\frac{1}{y} = P'',$$
$$\text{etc.},$$

ces intégrales étant prises depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, et on aura

$$\frac{11}{18}S_3 = P^0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{P'}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{P''}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{P'''}{4^3} + \text{etc.}$$

42. Pour avoir maintenant les quantités P^0, P', P'', etc., j'observe qu'on a en général

$$\int u^{2m}dz \log\frac{1}{y} = \log\frac{1}{y}\int u^{2m}dz + \int\frac{dy}{y}\cdot\int u^{2m}dz.$$

Dans cette formule, nous supposerons que l'intégrale $\int u^{2m}dz$ est prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $z = 1$ ou $u = 0$, alors la partie $\log\frac{1}{y}\int u^{2m}dz$ s'évanouit aux deux limites de l'intégrale, et on a simplement

$$\frac{1}{2}\int u^{2m}dz \log\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}\int u^{2m}dz = \int -\frac{dz}{u^2}\int u^{2m}dz,$$

où l'on voit que les logarithmes ont entièrement disparu, et qu'on ne doit plus tenir compte que de la relation $u^2 = 1 - z^2$.

On a d'ailleurs

$$\int u^{2m}dz = \frac{2m}{2m+1}\int u^{2m-2}dz + \frac{u^{2m}z}{2m+1};$$

multipliant de part et d'autre par $\frac{dz}{u^2}$ et intégrant, on aura

$$P^{(m)} = \frac{2m}{2m+1}P^{(m-1)} - \int\frac{u^{2m-2}zdz}{2m+1}.$$

Or, $zdz = -udu$, et par conséquent

$$-\int\frac{u^{2m-2}zdz}{2m+1} = \int\frac{u^{2m-1}du}{2m+1} = \frac{u^{2m}}{(2m+1)2m} + C;$$

cette intégrale devant être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, elle se réduit à $-\frac{1}{2m(2m+1)}$; donc on aura

$$P^{(m)}=\frac{2m}{2m+1}\cdot P^{(m-1)}-\frac{1}{2m(2m+1)}.$$

La première valeur

$$P^{0}=-\int\frac{dz}{u^{2}}\int dz=-\int\frac{dz}{u^{2}}(z-1)=\int\frac{dz}{1+z}=l(1+z)=l2\,;$$

donc on aura successivement

$$\begin{aligned}
P^{0} &= \log 2,\\
P' &= \tfrac{2}{3}\,P^{0}-\tfrac{1}{2.3},\\
P'' &= \tfrac{4}{5}\,P'-\tfrac{1}{4.5},\\
P''' &= \tfrac{6}{7}\,P''-\tfrac{1}{6.7},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Au moyen de cette loi très simple, on calculera aisément les différens termes de la suite décroissante P^{0}, P', P'', P''', etc. Ensuite on aura S_3 par la formule

$$S_3=\frac{18}{11}\left(P^{0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{P'}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{P''}{4^{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{P'''}{4^{3}}+\text{etc.}\right);$$

ce qui donne une approximation très rapide, puisque chaque terme est moindre que le quart du précédent.

En calculant cette suite jusqu'au terme P^{vi} inclusivement, on trouve $S_3=1.2020567$. Euler a trouvé par la méthode dont nous avons parlé, et en poussant l'approximation beaucoup plus loin,

$$S_3=1.2020569031595942\,81.$$

(Voyez *Calc. diff.*, page 453.)

43. Pour trouver par des procédés semblables la valeur de la transcendante ζ, demeurée inconnue dans les équations (v'), j'observe qu'on a

$$\begin{aligned}
(1,6)^{2} &= \int\frac{dy}{1-y^{6}}\log\frac{1}{y}=\zeta,\\
(2,6)^{2} &= \int\frac{y\,dy}{1-y^{6}}\log\frac{1}{y}=\frac{1}{135}\pi^{2}+\frac{1}{5}\zeta,\\
(4,6)^{2} &= \int\frac{y^{3}dy}{1-y^{6}}\log\frac{1}{y}=\frac{4}{135}\pi^{2}-\frac{1}{5}\zeta,\\
(5,6)^{2} &= \int\frac{y^{4}dy}{1-y^{6}}\log\frac{1}{y}=\frac{1}{9}\pi^{2}-\zeta:
\end{aligned}$$

de là je tire

$$(1,6)^2+(2,6)^2-(4,6)^2-(5,6)^2=\int\frac{dy\log\frac{1}{y}}{1-y+y^2}=\frac{12}{5}\zeta-\frac{2}{15}\pi^2;$$

donc

$$\zeta=\frac{1}{18}\pi^2+\frac{5}{12}\int\frac{dy\log\frac{1}{y}}{1-y+y^2};$$

tout se réduit donc à trouver la valeur de cette intégrale.

Si on fait successivement $y=\frac{1}{2}(1-u)$, $y=\frac{1}{2}(1+u)$, et qu'on ajoute les deux transformées prises positivement, on aura

$$\int\frac{dy\log\frac{1}{y}}{1-y+y^2}=\int\frac{2\,du}{3+u^2}\log\left(\frac{4}{1-u^2}\right),$$

nouvelle intégrale qui doit encore être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$.

La première partie de cette intégrale

$$\int\frac{2\,du\log 4}{3+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\log 4.\ \text{arc tang}\,\frac{u}{\sqrt{3}},$$

et en faisant $u=1$, elle se réduit à

$$\frac{2\log 4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\ \text{ou}\ \frac{2\pi\log 2}{3\sqrt{3}}.$$

L'autre partie

$$\int-\frac{2\,du}{3+u^2}\log(1-u^2)$$

étant appelée T, on aura par le développement de la fraction,

$$\mathrm{T}=\int-\frac{2du}{3}\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{3^2}-\frac{u^6}{3^3}+\text{etc.}\right)\log(1-u^2):$$

or, en intégrant par parties, on a

$$\int-u^{2m}\,du\log(1-u^2)=\frac{1-u^{2m+1}}{2m+1}\log(1-u^2)+\int\frac{1-u^{2m+1}}{2m+1}\cdot\frac{2\,udu}{1-u^2},$$

et puisque la quantité $(1-u^{2m+1})\log(1-u^2)$ s'évanouit aux deux limites de l'intégrale, on a simplement

$$\int-u^{2m}\,du\log(1-u^2)=\frac{1}{2m+1}\int\frac{1-u^{2m+1}}{1-u^2}.\,2\,udu$$
$$=\frac{2}{2m+1}\int\left(\frac{1-u^{2m+2}}{1-u^2}du-\frac{du}{1+u}\right).$$

Développant la quantité sous le signe et intégrant depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, on aura

$$\int -u^{2m}\,du\log(1-u^2)=\frac{2}{2m+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{2m+1}-\log 2\right);$$

donc enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{T} = &\tfrac{4}{3}\cdot(1-\log 2)\\ &-\tfrac{4}{3^2}\cdot\tfrac{1}{3}\left(1+\tfrac{1}{3}-\log 2\right)\\ &+\tfrac{4}{3^3}\cdot\tfrac{1}{5}\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\log 2\right)\\ &-\tfrac{4}{3^4}\cdot\tfrac{1}{7}\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\log 2\right)\\ &+\text{etc.},\end{aligned}$$

série convergente, puisque chaque terme est moindre que le tiers du précédent. T étant connu, on aura ζ par la valeur

$$\zeta=\frac{\pi^2}{18}+\frac{5\pi\log 2}{18\sqrt{3}}+\frac{5}{12}\,\mathrm{T}.$$

CHAPITRE VII.

Des Intégrales Eulériennes de la seconde espèce.

44. Considérons maintenant l'intégrale $\int x^{m-1}\,dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^n$, que nous supposerons toujours prise entre les limites $x=0$, $x=1$. On a d'abord, en intégrant par parties,

$$\int x^{m-1}\,dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n=\frac{x^m}{m}\left(l\frac{1}{x}\right)^n+\frac{n}{m}\int x^{m-1}\,dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1};$$

et comme la partie hors du signe s'évanouit aux deux limites, pourvu qu'on suppose $n>0$, on aura alors

$$\int x^{m-1}\,dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^n=\frac{n}{m}\int x^{m-1}\,dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1}; \qquad (\alpha)$$

et en général, si n est un nombre entier positif,

$$\int x^{m-1}dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^n = \frac{n.n-1.n-2.n-3.\ldots.1}{m^{n+1}}. \qquad (\mathfrak{E})$$

Lorsque n ne sera pas un nombre entier, l'intégrale $\int x^{m-1}dx\ \left(\log\frac{1}{x}\right)^n$ sera en général une transcendante dont il convient d'examiner les propriétés.

Et d'abord, au moyen de la formule (α), on pourra toujours ramener cette transcendante au cas où l'exposant n est compris entre 0 et -1.

De plus, j'observe que sans rien diminuer de la généralité du calcul, on peut faire $m=1$; car la formule $\int x^{m-1}dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^n$ étant proposée, si l'on fait $x^m=z$, cette formule deviendra $\frac{1}{m^{n+1}}\int dz\ \left(\log\frac{1}{z}\right)^n$.

45. Cela posé, il suffira de considérer l'intégrale $\int dx\ \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, dans laquelle nous supposerons que a est positif et plus petit que l'unité. Cette quantité étant simplement fonction de a, nous la désignerons par $\Gamma(a)$ et nous ferons

$$\Gamma(a)=\int dx\ \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}. \qquad (\gamma)$$

L'objet des recherches suivantes est d'évaluer la fonction $\Gamma(a)$, lorsque a est une fraction rationnelle donnée, telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., et nous nous proposons particulièrement de comparer entre elles les fonctions qui répondent à des valeurs de a de même dénomination, telles que $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, etc. Enfin nous chercherons aussi à déterminer par approximation la transcendante $\Gamma(a)$ pour toute valeur de a rationnelle ou irrationnelle.

46. En prenant les intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et supposant $m>1$, on a cette formule de réduction,

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mathfrak{C}})^{m-1} = \frac{(m-1)\mathfrak{C}}{\alpha+(m-1)\mathfrak{C}}\int x^{\alpha-1}dx\ (1-x^{\mathfrak{C}})^{m-2};$$

d'où il suit que si m est un entier, on aura exactement

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mathfrak{C}})^{m-1} = \frac{1.2.3\ldots.(m-1)\mathfrak{C}^{m-1}}{\alpha.\alpha+\mathfrak{C}.\alpha+2\mathfrak{C}\ldots.\alpha+(m-1)\mathfrak{C}}.$$

Désignons par $\Phi\ (\alpha,\ m)$ l'intégrale $\int x^{\alpha-1}dx\ (1-x^{\mathfrak{C}})^{m-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et dans l'hypothèse que m est un entier positif, on aura donc

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\alpha+\beta.\alpha+2\beta\ldots\alpha+(m-1)\beta}=\frac{\alpha}{\beta^{m-1}}\Phi(\alpha,\,m).$$

Dans cette équation, mettons successivement λm et $(\lambda+1)m$ à la place de m, nous aurons

$$\frac{1.2.3\ldots.\lambda m-1}{\alpha+\beta.\alpha+2\beta\ldots\ldots\alpha+(\lambda m-1)\beta}=\frac{\alpha}{\beta^{\lambda m-1}}.\Phi(\alpha,\,\lambda m),$$

$$\frac{1.2.3\ldots.\lambda m+m-1}{\alpha+\beta.\alpha+2\beta\ldots\alpha+(\lambda m+m-1)\beta}=\frac{\alpha}{\beta^{\lambda m+m-1}}.\Phi(\alpha,\,\lambda m+m).$$

Divisant la seconde par la première, et faisant pour abréger, $\alpha+\lambda m\beta=\alpha'$, il vient

$$\frac{\alpha'.\alpha'+\beta.\alpha'+2\beta\ldots.\alpha'+\overline{m-1}.\beta}{\lambda m.\lambda m+1.\lambda m+2\ldots\lambda m+m-1}=\beta^m.\frac{\Phi(\alpha,\,\lambda m)}{\Phi(\alpha,\,\lambda m+m)};$$

mais en mettant α' à la place de α dans l'équation primitive, on a

$$\frac{1.2.3\ldots.m-1}{\alpha'+\beta.\alpha'+2\beta\ldots\alpha'+\overline{m-1}.\beta}=\frac{\alpha'}{\beta^{m-1}}\Phi(\alpha+\lambda m\beta,\,m),$$

et multipliant ces deux équations entre elles, on a pour produit

$$\frac{1.2.3\ldots.m-1}{\lambda m.\lambda m+1\ldots.\lambda m+m-1}=\beta.\frac{\Phi(\alpha,\lambda m).\Phi(\alpha+\lambda m\beta,m)}{\Phi(\alpha,\lambda m+m)}.$$

Le premier membre, en vertu de l'équation primitive, peut être représenté par $\int x^{\lambda m-1}dx(1-x)^{m-1}$; et parce qu'on peut mettre x^n à la place de x, sans changer les limites de l'intégrale, il peut être aussi représenté par $n\int x^{\lambda nm-1}dx(1-x^n)^{m-1}$; donc on a

$$n\int x^{\lambda mn-1}dx(1-x^n)^{m-1}=\beta\,\frac{\Phi(\alpha,\lambda m).\Phi(\alpha+\lambda m\beta,m)}{\Phi(\alpha,\lambda m+m)}. \qquad (\delta)$$

Cette équation ainsi exprimée par un nombre fini de termes, acquiert une plus grande généralité, et ne suppose plus que m est un nombre entier.

En effet, les deux membres devant se réduire à une même fonction de m et de λm, laquelle est

$$\frac{1}{\lambda m}-\frac{m-1}{1}\cdot\frac{1}{\lambda m+1}+\frac{m-1\,.\,m-2}{1.2}\cdot\frac{1}{\lambda m+2}-\text{etc.},$$

on est maître de donner à m et λ des valeurs positives quelconques, et à plus forte raison aux quantités α, β, n, qui disparaissent dans les deux membres.

47. Soit donc $\alpha=1$ et $\beta=$ à un infiniment petit, on aura

$$1-x^\beta=\beta\log\frac{1}{x},\ \text{et}\ \Phi(\alpha,\,m)=\beta^{m-1}\int dx\left(l\,\frac{1}{x}\right)^{m-1},$$

de sorte qu'on aura en général

$$\Phi(a, k) = C^{k-1} . \Gamma(k).$$

Au moyen de cette formule, l'équation (δ) devient

$$n \int x^{\lambda mn - 1} dx \, (1 - x^n)^{m-1} = \frac{\Gamma(\lambda m) . \Gamma(m)}{\Gamma(\lambda m + m)}.$$

Soit maintenant $m = \frac{q}{n}$, $\lambda m = \frac{p}{n}$, on aura donc

$$\int x^{p-1} dx \, (1 - x^n)^{\frac{q}{n} - 1} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n \Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Le premier membre n'est autre chose que la transcendante désignée ci-dessus par $\left(\frac{p}{q}\right)$; ainsi on aura cette équation remarquable

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n \Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

D'où l'on voit que la transcendante $\left(\frac{p}{q}\right)$ serait connue, si on connaissait, pour la même valeur de n, les fonctions de la forme $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$, a étant entier.

48. Il résulte d'abord de cette valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$, qu'on peut échanger entre eux les nombres p et q, et qu'ainsi on a $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ce qui est une des principales propriétés de ces fonctions.

De plus, on tire de cette formule

$$\left(\frac{p}{q}\right) . \left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(\frac{q}{n}\right) \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{n^2 \Gamma\left(\frac{p+q+r}{n}\right)}.$$

Dans le second membre, il est visible que deux des nombres p, q, r, peuvent être échangés à volonté, ce qui donne le théorème fondamental contenu dans l'équation (e),

$$\left(\frac{p}{q}\right) . \left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) . \left(\frac{p+r}{q}\right),$$

dont on a ainsi une nouvelle démonstration très simple.

49. Faisons voir maintenant comment les fonctions Γ se déterminent au moyen des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ supposées connues pour une même valeur de n.

Observons d'abord qu'au moyen de l'équation (α), on a en général

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a),\qquad(\zeta)$$

ce qui permettra de réduire les cas où a est plus grand que l'unité à ceux où il est plus petit.

Si l'on a $a=1$, alors $\Gamma(a)$ se réduit à $\int dx=x=1$; ainsi on a

$$\Gamma(1)=1.\qquad(\eta)$$

Cela posé, faisons $q=n-p$ dans l'équation (ε), alors la valeur du premier membre est connue, et on a

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-p}{n}\right)}{n\Gamma(1)},$$

ou en d'autres termes,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.\qquad(\theta)$$

Lorsque $a=\frac{1}{2}$, on a $(\Gamma a)^2=\pi$; donc

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\qquad(\iota)$$

L'équation (θ), très remarquable dans cette théorie, fait voir qu'il suffit de connaître la valeur de $\Gamma(x)$ depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et on en déduira les autres valeurs de cette fonction depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=0$. Au reste, la valeur de $\Gamma(x)$ depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, ne varie qu'entre les limites $\sqrt{\pi}$ et 1, ou 1,77245 et 1, tandis que depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=0$, elle varie depuis 1,77245 jusqu'à l'infini ; et en particulier lorsque a est infiniment petit, la formule (θ) donne $\Gamma(a)=\frac{1}{a}$.

50. Si dans l'équation (ε) on fait $p=1$, et qu'on prenne successivement $q=1, 2, 3\ldots$ jusqu'à $n-1$, on aura cette suite d'équations :

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)}.$$

Multipliant les $a-1$ premières équations entre elles, on aura le produit

$$\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{a-1}\right)=\frac{\left(\Gamma\frac{1}{n}\right)^a}{n^{a-1}\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)};$$

si on les multiplie toutes, ou qu'on fasse $a=n$, le produit donnera

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=n\sqrt[n]{\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)\right]}.$$

Soit donc pour abréger

$$\mathrm{T}=\sqrt[n]{\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)\right]},$$

et on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=n\mathrm{T}.$$

Connaissant $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, on en déduira $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$ par l'équation déjà trouvée qui donne

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{n\mathrm{T}^a}{\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{a-1}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{1+a}\right)\cdots\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\mathrm{T}^{n-a}}.\qquad(x)$$

Et comme les quantités $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, etc. sont censées connues pour chaque valeur de n, il ne reste plus rien à désirer pour la détermination des fonctions $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$.

Ces formules font voir que toute fonction $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$ où $\frac{a}{n}$ est rationnel, peut se déterminer en général par la quadrature des courbes algébriques; mais ce moyen de solution ne s'applique avec succès que dans le petit nombre de cas où nous avons fait voir que les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ relatives à un même nombre n, peuvent s'exprimer par les fonctions elliptiques.

51. Réciproquement, si on connaissait la valeur de $\Gamma(x)$ pour toute valeur rationnelle de x, moindre que l'unité, il serait facile de déterminer l'intégrale $\left(\frac{p}{q}\right)$; car on a en général

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)};\qquad(\lambda)$$

et s'il arrive que $p+q$ soit $>n$, on changera, d'après l'équation (ζ), cette formule en celle-ci

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{(p+q-n)\,\Gamma\left(\frac{p+q-n}{n}\right)}. \tag{λ'}$$

Nous remarquerons que ces formules sont propres à donner l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ au moyen des quantités de la même espèce $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, etc. En effet, les valeurs de $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)$ étant tirées de la formule (x), on en déduira

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p+2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{p+q-1}\right)}{\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \tag{μ}$$

formule qui servira tant que $p+q$ sera plus petit que n.

Si on a $p+q>n$, il faudra faire usage de la seconde formule, qui donnera par de semblables substitutions,

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{p+q-n}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p+2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)}{\left(\frac{1}{p+q-n}\right)\left(\frac{1}{p+q-n+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{q-1}\right)}. \tag{μ'}$$

Ces formules répondent aux équations (k) et (n) trouvées ci-dessus, et on les ferait coïncider entièrement en substituant, au lieu de chaque quantité $\left(\frac{1}{a}\right)$, sa valeur

$$\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{A_a\sin(a+1)\,\omega}{\sin\omega};$$

ainsi les fonctions Γ offrent un nouveau moyen direct et très simple de déterminer l'expression générale des quantités $\left(\frac{p}{q}\right)$.

52. Pour revenir aux quantités $\Gamma(a)$, nous avons déjà trouvé l'équation

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

au moyen de laquelle les valeurs de la fonction, depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{2}$, se déduisent des valeurs supposées connues, depuis $a=\frac{1}{2}$ jusqu'à $a=1$.

Nous allons prouver ultérieurement qu'il suffit de connaître les valeurs de la fonction dans la moitié de cet intervalle, c'est-à-dire seulement depuis $a=\frac{3}{4}$ jusqu'à $a=1$, et on en déduira toutes les autres valeurs.

En effet, si on suppose $a < \frac{1}{2} n$, l'équation (ϵ) donne tout à la fois

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2a}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n-2a}{n}\right)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (d'), puis mettant simplement a au lieu de $\frac{a}{n}$, et réduisant les fonctions d'après la formule (θ), on aura

$$\Gamma(a) = \frac{2^{1-2a}}{\sqrt{\pi}} \cos a\pi . \Gamma(2a) . \Gamma\left(\tfrac{1}{2} - a\right),$$

équation qui suppose $a < \frac{1}{2}$.

Cette équation combinée avec l'équation (θ), donnera

$$\Gamma(1-a) = \frac{2^{2a}}{\sqrt{\pi}} \cos a\pi\, \Gamma(1-2a)\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2} + a\right);$$

enfin de celle-ci on déduit, en mettant $a - \frac{1}{2}$ au lieu de a,

$$\Gamma(a) = \frac{2^{1-2a}\sqrt{\pi}}{\sin a\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - a\right)}{\Gamma(2-2a)}. \qquad (\nu)$$

53. Nous supposerons connues les valeurs de $\Gamma(a)$ depuis $a = \frac{3}{4}$ jusqu'à $a = 1$.

Cela posé, 1°. Le second membre de l'équation (ν) sera connu pour toute valeur de a, depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = \frac{5}{8}$; donc on connaîtra $\Gamma(a)$ dans ce même intervalle depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = \frac{5}{8}$.

2°. Au moyen de ce premier cas, le second membre sera connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$; on connaîtra donc $\Gamma(a)$ toutes les fois que a est compris entre $\frac{11}{16}$ et $\frac{12}{16}$.

3°. Au moyen des deux premiers cas, le second membre de l'équation (ν) sera connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{11}{16}$ et $\frac{12}{16}$; donc on connaîtra $\Gamma(a)$ pour toutes les valeurs de a comprises depuis $a = \frac{5}{8} = \frac{20}{32}$ jusqu'à $a = \frac{21}{32}$.

4°. Le second membre sera encore connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{20}{32}$ et $\frac{21}{32}$; donc $\Gamma(a)$ sera connu depuis $a = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}$ jusqu'à $a = \frac{43}{64}$, et ainsi de suite.

Par ces diverses opérations les valeurs de a pour lesquelles $\Gamma(a)$ devient connu, se rapprochent alternativement de la limite $\frac{2}{3}$, qu'elles n'atteignent cependant qu'à l'infini, puisque $\frac{2}{3}$ ne peut pas s'exprimer exactement en fractions dont le dénominateur soit une puissance de 2. Mais on voit que par quatre opérations seulement, l'intervalle où $\Gamma(a)$ reste à déterminer, ne s'étend plus que depuis $a = \frac{44}{64}$ jusqu'à $a = \frac{43}{64}$. Une cinquième opération resserrerait cet intervalle de $\frac{43}{64}$ ou $\frac{86}{128}$ à $\frac{85}{128}$, et ainsi de suite.

La limite commune de ces suites est $\frac{2}{3}$; et $\Gamma\,\frac{2}{3}$ se détermine directement en faisant $a = \frac{2}{3}$ dans la formule (ν), ce qui donne

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{\pi}}{\sin\frac{2}{3}\pi}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

54. Dans les cas particuliers où l'on chercherait à déterminer une valeur de $\Gamma(a)$, on ne doit s'embarrasser aucunement de la distinction des cas précédens, et l'application immédiate de la formule (ν), répétée autant de fois qu'il est nécessaire, ou jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'inconnue à déterminer, conduira toujours au résultat qu'on cherche.

Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de $\Gamma(0.675)$, on aura directement

$$\Gamma(0.675) = \frac{2^{-0.35}\sqrt{\pi}}{\sin 38^\circ 30'}\cdot\frac{\Gamma(0.825)}{\Gamma(0.65)}.$$

Dans le second membre $\Gamma(0.65)$ est inconnue; pour la trouver, il faudra faire une seconde application de la formule, et on aura

$$\Gamma(0.65) = \frac{2^{-0.30}\sqrt{\pi}}{\sin 63^\circ}\cdot\frac{\Gamma(0.85)}{\Gamma(0.70)};$$

une troisième application donnera

$$\Gamma(0.70) = \frac{2^{-0.40}\sqrt{\pi}}{\sin 54^\circ}\cdot\frac{\Gamma(0.8)}{\Gamma(0.6)};$$

enfin une quatrième

$$\Gamma(0.60) = \frac{2^{-0.20}\sqrt{\pi}}{\sin 72^\circ}\cdot\frac{\Gamma(0.9)}{\Gamma(0.8)},$$

d'où en remontant on conclura la valeur de $\Gamma(0.675)$ exprimée en quantités connues. Cette détermination est un peu longue dans ce cas, parce que 0.675 approche beaucoup de la limite $\frac{2}{3}$.

CHAPITRE VIII.

Considérations générales sur les Intégrales Eulériennes de la première et de la seconde espèce.

55. En désignant par $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, Euler avait pour but de comparer entre elles les diverses intégrales de cette forme qui répondent à une même valeur de n, et il supposait d'ailleurs les nombres p, q, n entiers; mais on peut considérer les choses d'une manière plus générale.

Soit $x^n=y$, on aura la transformée $\frac{1}{n}\int y^{\frac{p}{n}-1}\,dy(1-y)^{\frac{q}{n}-1}$; mettant dans celle-ci p et q à la place de $\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$, elle deviendra $\frac{1}{n}\int y^{p-1}dy\,(1-y)^{q-1}$, nouvelle intégrale qui devra toujours être prise entre les limites $y=0$, $y=1$.

De là on voit que l'intégrale $\int x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$, prise entre les limites $x=0$, $x=1$, comprend l'intégrale d'Euler, lorsque p et q sont supposés rationnels; mais elle pourra en représenter une infinité d'autres.

Nous désignerons cette nouvelle intégrale par le symbole $[p, q]$, qui ne laisse rien de sous-entendu; les nombres p et q seront à volonté rationnels ou irrationnels; mais ils devront être positifs l'un et l'autre, parce que sans cette condition, l'intégrale aurait une valeur infinie. Au moyen de ce nouveau symbole, l'intégrale Eulérienne s'exprime ainsi,

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{n}\left[\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right].$$

56. Il est essentiel d'observer que l'intégrale désignée par $[p, q]$ peut être regardée comme une fonction continue de p et q, ou comme la troisième coordonnée d'une surface courbe dont p et q seraient les deux autres coordonnées. En effet, si l'on fait croître par degrés insensibles l'une ou l'autre

des variables p et q, la fonction $[p, q]$ diminuera de même progressivement. Si, par exemple, on augmente p de la quantité infiniment petite α, la puissance x^{p-1} deviendra $x^{p-1}\left(1-\alpha \log\frac{1}{x}\right)$, et l'intégrale dont il s'agit diminuera de la quantité infiniment petite $\alpha\int x^{p-1}dx \log\frac{1}{x}(1-x)^{q-1}$.

57. Pour découvrir plus facilement les propriétés de la fonction $[p, q]$, il est utile de considérer en même temps les intégrales Eulériennes de la seconde espèce. En donnant à ces intégrales la forme $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}-1}$, Euler supposait que les nombres p et q sont entiers, et son objet était de comparer entr'elles les diverses valeurs de l'intégrale qui répondent à une même valeur de q; mais nous avons déjà observé qu'on peut considérer l'intégrale dont il s'agit, comme une fonction continue de la variable $\frac{p}{q}$, qu'on supposera positive, mais qui peut être un nombre quelconque rationnel ou irrationnel. Ainsi nous regarderons l'intégrale $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, comme une fonction continue de a, que nous désignerons par Γa, et dans laquelle a pourra avoir toutes les valeurs, depuis $a=0$ jusqu'à $a=\infty$.

58. Si l'on fait $V=x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a}$, on aura $dV=dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a}-adx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$. Intégrant de part et d'autre depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et observant que V s'évanouit dans ces deux limites, on aura

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma a; \tag{1}$$

c'est la première et la principale propriété des fonctions Γ. La démonstration que nous venons d'en donner suppose a positif, sans quoi V ne s'évanouirait pas lorsque $x=1$.

On peut distinguer dans les valeurs successives de Γa, plusieurs périodes; la première comprise depuis $a=0$ jusqu'à $a=1$, la seconde depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$, et ainsi de suite à l'infini. Cela posé, il résulte de l'équation précédente que si l'on connaît la fonction Γ dans toute l'étendue d'une de ces périodes, on pourra déterminer cette fonction dans toute autre période.

Par exemple, si la seconde période est donnée, on trouvera $\Gamma\frac{1}{3}$ qui appartient à la première période, et $\Gamma(\frac{7}{2})$ qui appartient à la quatrième, par les valeurs suivantes, déduites de l'équation (1),

$$\Gamma\tfrac{1}{3}=3\Gamma(\tfrac{4}{3}),\quad \Gamma(\tfrac{7}{2})=\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}).$$

59. La fonction Γa est la plus simple lorsque $a=1$; alors on a $\Gamma(a)=$

$\int dx = x = 1$. Donc, lorsque a est un nombre entier, on a généralement

$$\Gamma a = 1.2.3.4\ldots\ldots(a-1); \qquad (2)$$

c'est-à-dire que la fonction Γa est égale au produit de tous les nombres entiers moindres que a.

Cette notion, fort claire lorsque a est un entier, ne présente plus aucun sens lorsque a est fractionnaire; mais l'analyse y supplée en donnant pour valeur de la fonction, l'intégrale $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; intégrale qu'il sera toujours possible d'évaluer avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

60. La fonction Γa est très remarquable par l'utilité dont elle est dans la théorie des intégrales définies. Nous pensons qu'il est nécessaire de lui imposer un nom particulier, et nous proposons de prendre pour ce nom celui de la lettre grecque Γ. Nous appellerons donc en général *gamma* du nombre a, le produit de tous les nombres inférieurs à a, savoir, $1.2.3\ldots.(a-1)$.

Lorsque a ne sera pas un nombre entier, le gamma du nombre a sera en général une transcendante. Mais nous verrons que ces transcendantes ont beaucoup de propriétés, et qu'elles peuvent être évaluées dans tous les cas avec presqu'autant de facilité que les arcs de cercle et les logarithmes. Réciproquement le nombre a pourra être regardé comme la *racine* de la fonction Γa, et nous la désignerons de cette manière.

61. Revenons maintenant à l'intégrale définie $\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1}$, que nous avons représentée par $[p, q]$. Cette intégrale est facile à déterminer lorsque l'un des deux nombres p et q est entier. Supposons que ce soit q, et faisons $U = x^p(1-x)^{q-1}$, nous aurons par la différentiation,

$$dU = (p+q-1)\,x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} - (q-1)\,x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2}.$$

Intégrant de part et d'autre depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et observant que dans ces deux limites U est nul, puisqu'on suppose à la fois $p>0$ et $q>1$, on aura

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} = \frac{q-1}{p+q-1}\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2};$$

on aurait de la même manière

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2} = \frac{q-2}{p+q-2}\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-3},$$

et ainsi successivement, jusqu'à ce qu'on parvienne à l'intégrale $\int x^{p-1}dx$ qui, dans les limites données, se réduit à $\frac{1}{p}$. Donc q étant un nombre entier, on a généralement

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} = \frac{q-1.q-2....1}{p+q-1.p+q-2...\,p+1}\cdot\frac{1}{p}.$$

Mais dans la même hypothèse on a, par l'équation (1),

$$\Gamma q = 1.2.3.....q-1,$$

$$\Gamma(q+p) = (q+p-1)(q+p-2)....p\Gamma p;$$

donc la valeur de l'intégrale trouvée peut se mettre sous cette forme

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma p \Gamma q}{\Gamma(p+q)}.$$

On aurait trouvé le même résultat en supposant p entier et q un nombre quelconque, ce qui d'ailleurs se voit immédiatement en mettant $1-x$ à la place de x.

62. L'équation précédente ne contenant plus de facteurs en nombre indéfini, acquiert une plus grande généralité, et ne suppose plus que l'un des deux nombres p et q est entier; car d'ailleurs chaque membre doit se réduire à une même fonction de p et q, laquelle est

$$\frac{1}{p} - \frac{q-1}{1}\,\frac{1}{p+1} + \frac{q-1.q-2}{1.2}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{q-1.q-2.q-3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{p+3} + \text{etc.}$$

Nous aurons donc, quels que soient p et q, l'équation

$$[p,\ q] = \frac{\Gamma p \Gamma q}{\Gamma(p+q)},$$

qui sert à exprimer généralement la fonction $[p,\ q]$ au moyen des fonctions Γ.

63. L'équation (3) simplifie considérablement la théorie des fonctions $[p,\ q]$ puisqu'elle fait voir que ces fonctions, qui dépendent en général de deux variables, peuvent se déterminer par la fonction Γ qui n'en contient qu'une. Cette même équation, en établissant une relation entre les fonctions $[p,\ q]$ et les fonctions Γ, va donner les moyens de découvrir les propriétés des unes et des autres. Et d'abord on voit que dans la fonction $[p,\ q]$, les quantités p et q peuvent être échangées entre elles, puisqu'il en résulte toujours la même valeur de $[p,\ q]$. On a donc la formule

$$[p,\ q] = [q,\ p]. \qquad (4)$$

On a ensuite, d'après l'équation (3),

$$[p,\ q] = \frac{\Gamma p \Gamma q}{\Gamma(p+q)},$$
$$[p+q,\ r] = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma r}{\Gamma(p+q+r)},$$

et celles-ci étant multipliées entre elles donnent

$$[p,\ q]\ [p+q,\ r] = \frac{\Gamma p \Gamma q \Gamma r}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Si l'on observe maintenant que dans le second membre de cette équation deux des lettres p, q, r, peuvent être échangées entre elles à volonté, on en conclura cette nouvelle formule :

$$[p,\ q]\ [p+q,\ r] = [p,\ r]\ [p+r,\ q] = [q,\ r]\ [q+r,\ p], \tag{5}$$

laquelle contient une propriété fondamentale des fonctions $[p,\ q]$.

Ces propriétés, au reste, s'accordent avec celles que nous avons démontrées dans les Chapitres I et II, relativement à la fonction désignée par $\left(\frac{p}{q}\right)$; mais elles ont dans notre nouvelle notation une plus grande généralité, puisqu'elles ne sont pas restreintes à la supposition que p et q soient des nombres entiers ou seulement rationnels.

64. L'intégrale $[p,\ q]$ peut être déterminée exactement lorsque $p+q=1$; en effet, considérons la formule

$$[a,\ 1-a] = \int x^{a-1}dx\,(1-x)^{-a};$$

si l'on fait $1-x=\frac{x}{z}$, ou $x=\frac{z}{1+z}$, l'intégrale aura pour transformée $\int\frac{z^{a-1}dz}{1+z}$, laquelle devra être prise entre les limites $z=0$, $z=\infty$. Or, Euler a prouvé que cette dernière intégrale $=\frac{\pi}{\sin a\pi}$; ainsi on aura généralement

$$[a,\ 1-a] = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Mais par l'équation (3) on a aussi

$$[a,\ 1-a] = \frac{\Gamma a \Gamma(1-a)}{\Gamma 1} = \Gamma a \Gamma(1-a).$$

Donc entre les fonctions Γa, $\Gamma(1-a)$, on a cette équation très remarquable

$$\Gamma a \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}: \tag{6}$$

c'est la seconde propriété générale des fonctions Γ. Si on fait $a = \frac{1}{2}$, il en résulte $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$.

65. On voit par cette équation que les fonctions Γa, $\Gamma(1-a)$, placées symétriquement dans la première période, peuvent se déduire l'une de l'autre, puisque leur produit est toujours une quantité connue. Et parce que les racines a, $1-a$ sont complémens l'une de l'autre, nous regarderons la fonction $\Gamma(1-a)$ comme étant le *complément* de Γa, et réciproquement.

On a déjà remarqué que pour déterminer la fonction Γa dans toute son étendue, il suffit de connaître cette fonction dans la première période, depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$, ou dans une autre période quelconque, comprise entre deux entiers consécutifs m, $m+1$. En vertu de l'équation (6), il suffira de connaître la fonction Γa dans la moitié d'une période, par exemple depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$, ou depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = 1$.

Dans la seconde période, les fonctions $\Gamma(1+a)$, $\Gamma(2-a)$, également éloignées des extrémités de la période, seront pareillement regardées comme complémens l'une de l'autre; et puisque d'après l'équation (1) on a $\Gamma(1+a) = a\Gamma a$ et $\Gamma(2-a) = (1-a)\Gamma(1-a)$, il s'ensuit que les deux fonctions $\Gamma(1+a)$, $\Gamma(2-a)$ pourront se déduire l'une de l'autre par l'équation

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(2-a) = \frac{a(1-a)\pi}{\sin a\pi}.$$

On trouverait de même, dans la troisième période, que les fonctions $\Gamma(2+a)$ et $\Gamma(3-a)$ se servent mutuellement de complément, et se déterminent l'une par l'autre.

66. Ces formules entre les fonctions complémentaires prendront une forme plus élégante en les comptant du milieu de chaque période; alors on aura pour les périodes successives les équations

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-a\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}-a\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{2}+a\right) = \left(\tfrac{1}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}-a\right)\Gamma\left(\tfrac{5}{2}+a\right) = \left(\tfrac{1}{4}-a^2\right)\left(\tfrac{9}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

etc.

Si l'on fait $a = 0$ dans ces diverses équations, on aura les valeurs des fonctions qui se rapportent au milieu des périodes, savoir :

$$\Gamma \tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi},\ \Gamma \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma \tfrac{7}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\sqrt{\pi}, \text{ etc.}$$

Ces fonctions, et celles où a est un entier, sont les seules qu'on puisse déterminer exactement, sans employer de transcendantes plus composées que les arcs de cercle et les logarithmes.

67. Si l'on considère les fonctions successives $\Gamma\,\frac{1}{n}$, $\Gamma\,\frac{2}{n}$, $\Gamma\,\frac{3}{n} \ldots \Gamma\,\frac{n-1}{n}$, dans lesquelles n est un nombre entier, il suffira de connaître les $\frac{n-1}{2}$ premiers termes de cette suite, si n est impair, et les $\frac{n}{2}-1$ premiers seulement si n est pair. Les autres se détermineront par l'équation (6), à laquelle on joindra, dans le second cas, l'équation $\Gamma\,\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$.

A l'égard des intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui, dans la notation d'Euler, répondent à une même valeur de n, elles s'expriment par les fonctions Γ, de la manière suivante :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{(p+q-n)\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}-1\right)}, \tag{8}$$

la première devant être employée si l'on a $p+q < n$, et la seconde si l'on a $p+q > n$.

Au moyen de ces deux formules et de l'équation (6), toutes les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans lesquelles les nombres p et q sont pris à volonté dans la série 1, 2, 3...n, pourront s'exprimer par les premiers termes de la suite $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)$, etc., savoir, par $\frac{n-1}{2}$ termes si n est impair, et par $\frac{n}{2}-1$ si n est pair.

68. Comme on a $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, on pourra toujours supposer que p n'est pas $> q$; alors les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, pourront être disposées dans un ordre triangulaire, comme il suit :

$$\left(\frac{1}{1}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3}\right),\left(\frac{3}{3}\right),$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{1}{n}\right),\left(\frac{2}{n}\right),\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right).$$

Le nombre de toutes ces fonctions est donc $\frac{n}{2}(1+n)$. Il faut déduire de ce nombre, 1°. les n fonctions de la forme $\left(\frac{p}{n}\right)$, dont la valeur exacte est $\frac{1}{p}$; 2°. les fonctions de la forme $\frac{p}{n-p}$, dont la valeur est $\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}$; le nombre de celles-ci est $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$, selon que n est impair ou pair. Il restera donc, dans la série des intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$, un nombre de transcendantes égal à $\frac{1}{2}(n-1)^2$, si n est impair, et à $\frac{n}{2}(n-2)$ si n est pair.

Dans le premier cas, un nombre $\frac{1}{2}(n-1)^2$ de transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ peuvent s'exprimer par les $\frac{n-1}{2}$ premiers termes de la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}$, etc.; dans le second, un nombre $\frac{n}{2}(n-2)$ de transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ peuvent s'exprimer par les $\frac{n}{2}-1$ premiers termes de la même suite.

De là on voit qu'il peut être établi un grand nombre de comparaisons entre les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, et qu'elles peuvent toutes être exprimées par un petit nombre d'entre elles; nombre qui sera $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$, selon que n est impair ou pair. Mais ce nombre, dans le cas où n n'est pas premier, pourra être réduit ultérieurement par les autres propriétés de la fonction Γ, que nous démontrerons ci-après.

69. Considérons maintenant le cas où les deux nombres p et q sont égaux dans la fonction $[p, q]$; alors on aura

$$[a, a] = \int x^{a-1}dx\,(1-x)^{a-1}.$$

Soit $x=\frac{1}{2}(1+y)$, la transformée sera $2^{1-2a}\int dy\,(1-y^2)^{a-1}$; et comme cette nouvelle intégrale doit être prise depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$, il revient au même de la prendre depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et de doubler le résultat. On aura ainsi

$$[a, a] = 2^{2-2a} \int dy\, (1-y^2)^{a-1}.$$

Mettant x à la place de y^2, ce qui ne change pas les limites, il viendra $[a, a] = 2^{1-2a} \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx\, (1-x)^{a-1}$, ou

$$[a, a] = 2^{1-2a} [\tfrac{1}{2}, a],$$

formule qui s'accorde avec l'équation (r) du chap. II.

Mais, d'après l'équation (3) ci-dessus, on a

$$[a, a] = \frac{\Gamma a\, \Gamma a}{\Gamma(2a)}, \quad [\tfrac{1}{2}, a] = \frac{\Gamma \frac{1}{2}\, \Gamma a}{\Gamma(\frac{1}{2}+a)};$$

donc en substituant ces valeurs, l'équation précédente donne

$$\Gamma a \Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = 2^{1-2a} \Gamma \tfrac{1}{2} \Gamma(2a) = 2^{1-2a} \pi^{\frac{1}{2}}.\Gamma(2a): \qquad (9)$$

c'est la troisième propriété générale des fonctions Γ.

70. Il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut parvenir à ce résultat par une autre voie.

Considérons pour cet effet la fonction $\psi(n)$, dont la valeur est

$$\psi(n) = \frac{2n+2.2n+4.2n+6\ldots 4n}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots 2n-1};$$

si l'on met $n+1$ à la place de n, on aura

$$\psi(n+1) = \frac{2n+4.2n+6.2n+8\ldots 4n+4}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots\ldots 2n+1};$$

de là résulte

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \frac{4n+2.4n+4}{2n+2.2n+1} = 4.$$

Donc en général $\psi(n) = \text{A}.4^n$, A étant une constante qu'il faut déterminer dans un cas particulier. Or en faisant $n=1$, on a $\psi(n)=4$; donc $\text{A}=1$; donc n étant un nombre entier quelconque, on aura

$$\frac{2n+2.2n+4.2n+6\ldots 4n}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots 2n-1} = 4^n.$$

Mais en vertu de l'équation (1), on a

$$(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)}.$$

Faisant successivement $m=n$ et $m=-\frac{1}{2}$, cette formule donne

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\frac{2n-1}{2} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}}.$$

Divisant la première équation par la seconde, il vient

$$\frac{2n+2.2n+4\ldots 4n}{1\ .\ 3\ldots\ldots 2n-1} = \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

Lorsque n est un nombre entier, le premier membre se réduit à 2^{2n}; ainsi dans ce même cas on aura

$$\frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})} = 2^{2n}.$$

Cette équation ayant lieu lorsque n est un nombre entier à volonté; elle aura également lieu pour toute valeur de n, puisque Γa est une fonction continue de n. Si l'on fait ensuite $n = a - \frac{1}{2}$, on retombera exactement sur l'équation (9).

71. Si l'on combine l'équation (9) avec la première des équations de l'art 52, on aura l'équation (ν) de l'art 66, dont nous avons montré l'usage pour déterminer la fonction Γa dans toute l'étendue de la racine a, pourvu qu'on connaisse la valeur de cette fonction depuis $a = \frac{3}{4}$ jusqu'à $a = 1$. On pourrait prendre également pour intervalle connu celui de $a = 0$ à $a = \frac{1}{4}$, ou celui de $a = 1$ à $a = \frac{5}{4}$, comme on le verra ci-après.

72. Pour revenir maintenant aux réductions dont nous avons parlé dans l'article 68, il faut voir quel usage nous pourrons faire de l'équation (9).

Si n est impair, il n'y a pas lieu d'appliquer cette équation, parce qu'il en naîtrait de nouvelles transcendantes dans lesquelles les quantités a auraient des valeurs fractionnaires dont le dénominateur serait $2n$, et qui ne seraient plus comprises dans la suite des trancendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}$, etc.

Mais si n est pair, l'application de l'équation (9) aux valeurs successives $a = \frac{1}{n}$, $a = \frac{2}{n}$, etc., permettra de réduire le nombre des transcendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, etc., à $\frac{n-2}{4}$ ou $\frac{n}{4}$, selon que n sera de la forme $4i+2$ ou $4i$.

73. Toute la théorie des intégrales Eulériennes, tant de l'espèce $\left(\frac{p}{q}\right)$ que de l'espèce Γa, est comprise dans le petit nombre de formules que nous venons d'exposer. On peut déduire, sans exception, toutes les formules qu'Euler a données dans ses différens Mémoires sur ces intégrales, et toutes

celles que nous leur avons ajoutées, d'après l'équation (d') qui n'était pas connue de cet illustre auteur.

L'application de ces formules au cas de $n=12$ a été donnée avec détail dans l'art. 18. On y a fait voir que, dans la méthode d'Euler, cinq transcendantes A, A_2, A_3, A_4, A_5, sont nécessaires pour déterminer toutes les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$; elles suffisent aussi pour déterminer toutes les fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}\ldots\Gamma\frac{11}{12}$, ainsi qu'il résulte des formules des art. 50 et 51.

Au moyen de l'équation (d'), ces cinq transcendantes ont été réduites à trois seulement, savoir, A_1, A_2, A_3, ce qui s'accorde avec le résultat général de l'art. précédent, qui donne $\frac{n}{4}$ pour le nombre de transcendantes nécessaire lorsque n est un multiple de 4.

Enfin, au moyen de diverses intégrations dont le résultat a été donné, art. 24, on est parvenu à déterminer exactement le rapport de A_1 à A_3, ce qui réduit les trois transcendantes aux deux seules A_1, A_2. On peut donc réduire à deux seulement les fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}\ldots\Gamma\frac{11}{12}$, de manière que ces deux fonctions étant connues, toutes les autres peuvent en être déduites.

Cette dernière réduction, qu'on n'avait obtenue que par des intégrations très compliquées, méritait une attention particulière; elle donnait lieu de croire que la théorie des fonctions Γ devait contenir d'autres formules propres à opérer leur réduction. Ces formules ont en effet été découvertes par des recherches ultérieures, dont nous donnerons le résultat après nous être occupés des développemens en série qui servent à calculer les valeurs approchées des fonctions Γa.

CHAPITRE IX.

Formules pour calculer la valeur aussi approchée qu'on voudra de la fonction $Z=\log\Gamma x$.

74. Si on appelle P la somme $\log 1+\log 2+\log 3\ldots+\log x$, Euler a fait voir dans son calcul différentiel, page 465, que cette somme peut

s'exprimer par la suite :

$$P = x\,\mathcal{L}x + \tfrac{1}{2}\,\mathcal{L}(2\pi x) - x + \frac{A'}{1.2x} - \frac{B'}{3.4.x^3} + \frac{C'}{5.6x^5} - \text{etc.},$$

A′, B′, C′, etc., étant les nombres Bernoulliens. Soit donc e le nombre dont le logarithme est 1, et R un nombre tel qu'on ait

$$\log R = \frac{A'}{1.2x} - \frac{B'}{3.4x^3} + \frac{C'}{5.6.x^5} - \text{etc.},$$

on aura l'équation

$$1.2.3\ldots\ldots x = \left(\frac{x}{e}\right)^x (2\pi x)^{\frac{1}{2}}\,R. \qquad (10)$$

Le premier membre est la valeur de $\Gamma(1+x)$ lorsque x est un nombre entier; mais comme le second membre est une fonction continue de x, on aura en général quelque soit x,

$$\Gamma(1+x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x (2\pi x)^{\frac{1}{2}}\,R, \qquad (11)$$

telle est la formule par laquelle on pourra dans tous les cas déterminer la valeur approchée de $\Gamma(1+x)$, et par conséquent, celle de $\Gamma x = \frac{1}{x}\Gamma(1+x)$, pourvu que x soit > 1.

75. La quantité R peut se développer suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; car on a $R = 1 + \log R + \frac{1}{2}\log^2 R + \frac{1}{2.3}\log^3 R + \text{etc.}$; substituant donc la valeur de log R, ainsi que celles des coefficiens A′, B′, C′, etc., qui sont $A = \frac{1}{6}$, $B' = \frac{1}{30}$, $C' = \frac{1}{42}$, $D' = \frac{1}{30}$, etc., on aura

$$R = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{2(12x)^2} - \frac{139}{30(12x)^3} - \frac{571}{120(12x)^4} - \text{etc.}$$

Dans cette suite, si on appelle M la partie qui contient les puissances paires de x, et N celle qui contient les puissances impaires, on aura $M^2 - N^2 = 1$, de sorte qu'on pourra prendre indifféremment $R = M + N$, ou $R = \frac{1}{M-N}$. En effet, comme toutes les puissances de x sont impaires dans log R, le changement du signe de x donnera $\log(M+N) = -\log(M-N)$, ou $\log(M^2 - N^2) = 0$; donc $M^2 - N^2 = 1$.

76. Il est à remarquer que la suite $\frac{A'}{1.2x} - \frac{B'}{3.4x^3} + \frac{C'}{5.6x^5} - \text{etc.}$, même en supposant x assez grand, n'est convergente que dans un certain nombre des premiers termes; car on sait que les nombres Bernoulliens dont les expressions sont fort irrégulières, croissent continuellement passé le troi-

sième terme, de manière que si $T^{(n)}$ et $T^{(n+1)}$ sont deux termes consécutifs des rangs n et $n+1$, le rapport $\frac{T^{(n+1)}}{T^{(n)}}$ a pour limite $\frac{n^2}{\pi^2}$. La suite qui exprime log R sera donc convergente pendant un assez grand nombre des premiers termes, si x est de plusieurs unités; mais elle finira par être divergente, et donnerait une valeur de log R d'autant plus fautive qu'on la continuerait plus loin au-delà du terme où elle cesse d'être convergente.

De là on voit que pour une valeur donnée de x, il y a un terme qu'on ne doit pas passer dans le calcul de la suite $\frac{A'}{1.2x}-\frac{B'}{3.4x^3}+$ etc., le terme auquel il faudra s'arrêter est celui qui serait suivi d'un terme plus grand; alors l'approximation ne peut aller plus loin, mais elle sera tout aussi étendue qu'on voudra, en prenant x suffisamment grand.

Il en serait de même de la série $R=1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{2(12x)^2}-$ etc.; mais celle-ci n'est pas d'un usage aussi facile que la série $\frac{A'}{1.2x}+\frac{B'}{3.4x^3}+$ etc., dont la loi est manifeste et ne dépend que des nombres Bernoulliens.

77. On peut fixer *a priori* le nombre des termes après lequel cette dernière suite cesse d'être convergente; car en considérant les deux termes consécutifs

$$\pm\frac{T^{(n)}}{2n.\overline{2n-1}.x^{2n-1}}\mp\frac{T^{(n+1)}}{\overline{2n+2}.\overline{2n+1}.x^{2n+1}},$$

et les supposant égaux, on aura

$$\frac{T^{(n+1)}}{T^{(n)}}=\frac{\overline{2n+2}.\overline{2n+1}}{2n.\overline{2n-1}}x^2;$$

mais plus n est grand, plus le premier membre approche de la limite $\frac{\overline{2n+2}.\overline{2n+1}}{4\pi^2}$ (*Eul. Calc. diff.*, pag. 429); donc on aura, à très peu près, $n=\pi x$. Ainsi, en faisant $x=5$, on a $n=15$ ou 16, c'est-à-dire que la série cesse d'être convergente vers le 15ième terme; si on faisait $x=10$, la série cesserait d'être convergente vers le 31ième terme, et ainsi de suite.

78. On peut en même temps avoir la mesure du degré d'approximation que l'on peut obtenir avec une valeur donnée de x. En effet, si on appelle Ω le $n$ième terme de la suite égale à log R, on aura

$$\Omega=\frac{T^{(n)}}{2n.\overline{2n-1}.x^{2n-1}},$$

et comme on a, à très peu près,

$$T^{(n)} = \frac{1.2.3\ldots.2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}},$$

on pourra faire

$$\Omega = \frac{1.2.3\ldots.2n-2}{\pi(2\pi x)^{2n-1}}.$$

Cette valeur, au moyen de la formule (10), devient

$$\Omega = \left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-\frac{3}{2}} \cdot \frac{(2\pi e)^{\frac{1}{2}}}{\pi(2\pi x)^{2n-1}},$$

et en mettant n au lieu de πx, on en déduit aisément

$$\log \Omega = -2n - \tfrac{1}{2}\log(\pi n).$$

Soit, par exemple, $x = 5$ et $n = 16$, on aura $\log \Omega \doteq -33.96$. A ce logarithme hyperbolique répond le logarithme vulgaire -14.75, de sorte qu'on a $\Omega = 10^{-14.75}$; c'est-à-dire, qu'au moyen des 16 premiers termes de la suite $\frac{A'}{1.2x} - \frac{B'}{3.4x^3} +$ etc., on aura la valeur de log R approchée jusqu'à 15 décimales environ. Si on faisait $x = 10$, on pourrait avoir 29 ou 30 décimales exactes et ainsi de suite

79. Cette théorie est facile à vérifier, puisque, toutes les fois que x est un entier, la valeur de $\Gamma(1+x)$ est exactement $1.2.3\ldots.x$. Soit par exemple $x = 3$, il résulte des formules précédentes que la série égale à log R cessera d'être convergente après un nombre de termes $n = 9$ ou 10, et que le nombre de décimales exact, obtenues par ces neuf ou dix termes, sera de 8 ou 9.

En effet, la vraie valeur de log R se déduit de l'équation $6 = \left(\frac{3}{e}\right)^3 (6\pi)^{\frac{1}{2}} R$, laquelle donne

$$\log R = 0.02767\ 79256\ 86.$$

Cette même valeur déduite de la suite $\log R = \frac{A'}{1.2x} - \frac{B'}{3.4x^3} + \frac{C'}{5.6x^5} -$ etc., se trouve en calculant successivement les différens termes, comme il suit :

1er terme........	+	0.02777 77777 78
2e..............	—	0.00010 28806 58
		0.02767 48971 20
3e..............	+	32660 53
		0.02767 81631 73
4e..............	—	2721 71
		0.02767 78910 02
5e..............	+	427 65
		0.02767 79337 67
6e..............	—	108 24
		0.02767 79229 43
7e..............	+	40 21
		0.02767 79269 64
8e..............	—	20 59
		0.02767 79249 05
9e..............	+	13 91
		0.02767 79262 96
10e..............	—	11 98
		0.02767 79250 98
11e..............	+	12 81
		0.02767 79263 79.

On voit que, conformément à la formule, la série cesse d'être convergente passé le 10e terme, et que la valeur de log R qui en est déduite, doit être comprise entre 0.02767 7926296 et 0.02767 79250 98; ce qui donne par un milieu

$$\log R = 0.02767\ 79256\ 97,$$

valeur exacte, presque jusqu'à la onzième décimale. Mais, en continuant la suite plus loin, on s'éloignerait de plus en plus du vrai résultat.

Cet exemple met dans tout son jour la manière de tirer tout le parti possible, pour les approximations, des suites *demi-convergentes*, c'est-à-dire des suites qui sont convergentes dans les premiers termes, et qui deviennent ensuite divergentes.

80. Cherchons maintenant une formule qui donne le développement de

log Γx, lorsqu'on suppose x plus petit que l'unité. Soit pour cet effet

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{x},$$
$$N = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{etc.},$$

cette dernière suite étant prolongée à l'infini.

Nous regarderons la quantité M comme une fonction continue de x, puisque sa valeur peut se développer ainsi (*Calc. diff.*, page 443):

$$M = \log x + C + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.}; \qquad (12)$$

cette formule donnera immédiatement la valeur approchée de M lorsque x sera plus grand que l'unité, mais on en peut déduire aussi cette valeur lorsque x sera plus petit que l'unité. Car $M(x)$ et $M(x+1)$ désignant des fonctions semblables de x et de $x+1$, on a évidemment

$$M(x) = M(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

et l'application répétée de cette formule fera dépendre $M(x)$, successivement de $M(x+1)$, de $M(x+2)$, etc., c'est-à-dire en général d'une formule $M(x')$, où la variable x' surpassera x de plusieurs unités, ce qui permettra de déterminer facilement $M(x')$ par la série précédente.

81. Cela posé, si x devient $x+\omega$, ω étant plus petit que l'unité, les fonctions $M(x)$ et $N(x)$, deviendront $M(x+\omega)$ et $N(x+\omega)$; or, je dis que la somme $M(x)+N(x) = M(x+\omega)+N(x+\omega)$, et que les deux sommes sont égales à une même constante C'.

En effet, si la suite qui a pour somme $N(x)$, au lieu d'être prolongée à l'infini, était continuée seulement jusqu'au terme $\frac{1}{x+m}$, m étant un nombre entier très grand, la somme $M(x)+N(x)$ et la somme $M(x+\omega)+N(x+\omega)$ ne pourraient différer entre elles que d'une quantité moindre que $\frac{1}{x+m+1}$, puisque cette différence est celle qui a lieu lorsque $\omega = 1$. Or, m étant très grand, la différence $\frac{1}{x+m+1}$ est censée nulle; à plus forte raison le sera-t-elle, lorsque la suite $N(x)$ sera prolongée à l'infini. On aura donc

$$M + N = C_1;$$

mais puisque la valeur de N est

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}+\text{etc.}$$

Si on développe chacune de ces fonctions dans l'hypothèse que x est plus petit que l'unité, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{N} = &\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\text{etc.}, \\ &- x\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right) \\ &+ x^2\left(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.}\right) \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

La première partie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc., n'est autre chose que la constante C_1; car la fonction $M(x)$ est zéro lorsque $x=0$; donc on aura

$$M = S_2x - S_3x^2 + S_4x^3 - S_5x^4 + \text{etc.}, \tag{13}$$

S_n représentant en général la somme des puissances réciproques, de degré n, des nombres naturels.

82. Mais, d'après l'équation (1) dont le premier membre $= x\Gamma x$, on a, en supposant $x > 1$,

$$\frac{d\log\Gamma x}{dx} = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.}, \tag{14}$$

et dans la même hypothèse on a, suivant l'équation (12),

$$M = \log x + C + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.},$$

donc

$$\frac{d\log\Gamma x}{dx} = -\frac{1}{x} - C + M, \tag{15}$$

équation qui doit avoir lieu quel que soit x, puisque M peut être regardée comme une fonction continue de x.

Substituant donc au lieu de M le développement de cette fonction donnée par l'équation (3) dans l'hypothèse de $x < 1$, on aura

$$\frac{d\log\Gamma x}{dx} = -\frac{1}{x} - C + S_2x - S_3x^2 + S_4x^3 - \text{etc.}, \tag{16}$$

ce qui donne en intégrant

$$\log\Gamma x = -\log x - Cx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \text{etc.} \tag{17}$$

On n'ajoute pas de constante, parce que $x\Gamma x$ ou $\Gamma(1+x)$ se réduit à l'unité, lorsque $x=0$.

Puisque $\Gamma(1+x)=x\Gamma x$, on déduira de la formule (17)

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \text{etc.}, \quad (18)$$

et en changeant dans celle-ci le signe de x, on aura

$$\log \Gamma(1-x) = Cx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 + \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 + \text{etc.} \quad (19)$$

83. Observons maintenant qu'en vertu des deux équations $\Gamma(1+x)=x\Gamma x$, $\Gamma x\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$, on a

$$\Gamma(1+x)\ \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres et substituant les valeurs données par les équations (18) et (19), on aura

$$\log\left(\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right) = S_2x^2 + \tfrac{1}{2}S_4x^4 + \tfrac{1}{3}S_6x^6 + \text{etc.}$$

C'est la formule connue qui, par sa différentielle, sert à déterminer les valeurs

$$S_2 = \tfrac{1}{6}\pi^2,\ S_4 = \tfrac{1}{90}\pi^4,\ S_6 = \tfrac{1}{945}\pi^6, \text{ etc.}$$

On peut faire usage de cette formule pour rendre encore plus convergentes les suites contenues dans les équations (18) et (19), en les mettant sous cette forme :

$$\left.\begin{aligned} \log \Gamma(1+x) &= \tfrac{1}{2}\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - Cx - \tfrac{1}{3}S_3x^3 - \tfrac{1}{5}S_5x^5 - \text{etc.} \\ \log \Gamma(1-x) &= \tfrac{1}{2}\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} + Cx + \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{5}S_5x^5 + \text{etc.} \end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

Ainsi on a des séries régulières et toujours convergentes pour calculer la valeur d'une fonction quelconque Γa; elles supposent seulement qu'on connaît les valeurs des transcendantes S_2, S_3, S_4, etc., qui représentent les sommes des puissances réciproques, de même degré, des nombres naturels. Ces valeurs sont données jusqu'à la seizième puissance et avec seize décimales, dans le Calcul différentiel d'Euler, page 456 ; mais l'examen que nous avons fait de cette Table, nous y a fait découvrir quelques erreurs assez graves, et nous avons été obligé de la calculer de nouveau ; nous avons cru devoir en même temps la prolonger jusqu'à la 35^e^ puissance, terme passé lequel chaque fraction qui suit l'unité devient la moitié de la précédente. Voici cette nouvelle table corrigée.

$n.$	$S_n.$	$n.$	$S_n.$
2	1.64493 40668 482264	19	1.00000 19082 127166
3	1.20205 69031 595943	20	1.00000 09539 620339
4	1.08232 32337 111382	21	1.00000 04769 329868
5	1.03692 77551 433700	22	1.00000 02384 505027
6	1.01734 30619 844491	23	1.00000 01192 199260
7	1.00834 92773 819227	24	1.00000 00596 081891
8	1.00407 73561 979443	25	1.00000 00298 035035
9	1.00200 83928 260822	26	1.00000 00149 015548
10	1.00099 45751 278180	27	1.00000 00074 507118
11	1.00049 41886 041194	28	1.00000 00037 253340
12	1.00024 60865 533080	29	1.00000 00018 626597
13	1.00012 27133 475785	30	1.00000 00009 313274
14	1.00006 12481 350587	31	1.00000 00004 656629
15	1.00003 05882 363070	32	1.00000 00002 328312
16	1.00001 52822 594086	33	1.00000 00001 164155
17	1.00000 76371 976379	34	1.00000 00000 582077
18	1.00000 38172 932650	35	1.00000 00000 291038

84. Au moyen de cette table on aura, pour calculer log $\Gamma(1+x)$, l'une ou l'autre des formules :

$$\left.\begin{array}{l} l\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{1}{2}S_2x^2 - \frac{1}{3}S_3x^3 + \frac{1}{4}S_4x^4 - \text{etc.}, \\ l\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right) - Cx - \frac{1}{3}S_3x^3 - \frac{1}{5}S_5x^5 - \text{etc.} \end{array}\right\}. \qquad (22)$$

Lorsqu'il s'agit de calculer log Γa pour une valeur donnée de a, on peut toujours réduire la question au cas où l'on a $a = 1 + x$, x étant $< \frac{1}{2}$, ou même $< \frac{1}{4}$. Les suites précédentes seront donc convergentes, et auront l'avantage de l'être dans toute leur étendue; de sorte que le degré d'approximation auquel on peut parvenir par ces suites, n'est limité que par celui qui a lieu dans les valeurs des transcendantes S_2, S_3, S_4, etc.

La seconde formule est préférable à la première, comme contenant une suite plus convergente. Cependant lorsque x sera très petit, il vaudra mieux faire usage de la première, parce que la valeur de log sin πx, donnée par les tables, pourrait n'être pas suffisamment exacte. Or le moyen de suppléer aux tables serait de calculer log sin πx par la formule

$$l \sin \pi x = l(\pi x) - S_2 x^2 - \tfrac{1}{2} S_4 x^4 - \tfrac{1}{3} S_6 x^6 - \text{etc.},$$

ce qui revient à faire usage de la première des formules ci-dessus ; mais lorsque x est assez grand pour que les tables donnent sans difficulté la valeur de log sin πx, il y aura un avantage marqué à se servir de la seconde formule.

85. On pourra simplifier encore assez notablement cette formule, en lui donnant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \log \Gamma(1+x) = {} & \tfrac{1}{2} \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \\ & + (1-C)x - (S_3 - 1)\frac{x^3}{3} - (S_5 - 1)\frac{x^5}{5} - \text{etc.} \end{aligned} \tag{23}$$

Enfin, pour convertir ces logarithmes en logarithmes vulgaires, il faudra multiplier les termes algébriques par le module m; soit donc

$$m(1 - C) = B, \quad \frac{m}{3}(S_3 - 1) = B_3, \quad \frac{m}{5}(S_5 - 1) = B_5, \text{ etc.},$$

et la formule adaptée aux logarithmes vulgaires deviendra

$$\begin{aligned} l\,\Gamma(1+x) = {} & \tfrac{1}{2}\, l \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \tfrac{1}{2}\, l \frac{1+x}{1-x} \\ & + Bx - B_3 x^3 - B_5 x^5 - B_7 x^7 - \text{etc.} \end{aligned} \tag{24}$$

Cette formule pourra servir à calculer log Γa jusqu'à 14 décimales, si l'on a des tables telles que la *Trigonometria Britannica,* qui donnent ce nombre de décimales pour $l \sin \pi x$; quant aux logarithmes de x et de $\frac{1+x}{1-x}$, il sera toujours facile de les avoir avec ce degré d'exactitude, ou un plus grand encore, par la table connue qui donne les logarithmes des 11 ou 1200 premiers nombres avec 20 décimales, et le supplément que nous y avons ajouté, Table V ci-dessus.

Pour obtenir le nombre de décimales dont il s'agit, il sera bon de calculer le terme Bx par la simple multiplication, afin d'éviter l'emploi des logarithmes à 14 décimales, pour lesquelles on n'a point de tables complètes, ou auxquelles on ne supplée que par des calculs plus longs que la multiplication. D'ailleurs, si l'on applique la formule à la construction d'une table, la multiplication dont il s'agit peut être entièrement évitée, puisque chaque produit $B(x + \omega)$ se forme du produit précédent Bx, auquel on ajoute la constante $B\omega$.

Quant aux autres termes $B_3 x^3$, $B_5 x^5$, etc., ils se calculeront par les tables ordinaires à 10 décimales, au moyen des logarithmes des coefficiens qu'on trouvera ci-après, art. 89.

Il ne faut pas perdre de vue qu'on peut toujours supposer $x < \frac{1}{2}$ ou même $x < \frac{1}{4}$. Dans le cas de $x = \frac{1}{2}$, le terme $B_{15}x^{15}$ ne vaut pas trois unités décimales du onzième ordre; dans le cas de $x = \frac{1}{4}$, il n'en vaut pas une du quinzième. Au surplus, quand on est parvenu aux derniers termes de la formule, ces termes forment avec les suivans une progression à très peu près géométrique; de sorte qu'il est facile de tenir compte des termes qui restent à calculer.

86. La valeur de la constante C a été calculée par Euler (Calcul différentiel, page 144), au moyen de la suite harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, dont la somme $M(x)$ est donnée par la formule

$$M(x) = C + lx + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.}, \qquad (25)$$

A', B', C', etc., étant la suite des nombres Bernoulliens. Appliquant cette formule au cas de $x = 10$, on a, par la sommation effective,

$$M = 2.92896\ 82539\ 68253\ 96825, \text{ etc.},$$

et par la sommation approchée,

$$M = C + 2.35175\ 25890\ 66721\ 1076;$$

de là on tire

$$C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 8606,$$

valeur qui s'accorde, dans les 15 premières décimales, avec le résultat donné par Euler.

La valeur de C peut se calculer aussi par l'équation (23), en faisant soit $x = 1$, soit $x = \frac{1}{2}$; il en résulte ces deux expressions :

$$1 - C = \tfrac{1}{2}\, l2 + \tfrac{1}{3}(S_3 - 1) + \tfrac{1}{5}(S_5 - 1) + \tfrac{1}{7}(S_7 - 1) + \text{etc.},$$
$$1 - C = l\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3}(S_3 - 1)\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}(S_5 - 1)\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{7}(S_7 - 1)\tfrac{1}{64} + \text{etc.};$$

substituant les valeurs des quantités S_3, S_5, S_7, etc., données par la table du n°. 83, on trouve

par la première expression $C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 85$,
et par la deuxième $C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 861$,

ce qui s'accorde aussi bien qu'il est possible avec la valeur déjà trouvée, et on voit que celle-ci est exacte jusque dans la dix-huitième décimale. Il suit de là que les valeurs des transcendantes S_3, S_5, S_7, etc., contenues dans la table citée, sont exactes, et qu'on peut les employer avec confiance dans le calcul des quantités Γ.

87. Pour faire voir, par un exemple, l'usage de la formule (24), proposons-nous de déterminer le *minimum* de la fonction Γa. Nous savons que ce *minimum* a lieu à peu près lorsque $a = 1.4616$; nous allons donc chercher la valeur de $\log \Gamma(1+x)$, en faisant $x = 0.4616$. Ce cas est l'un des moins favorables pour la convergence des suites; mais il pourra servir de type pour les calculs semblables où l'approximation s'obtiendra avec plus de facilité.

π...	0.49714 98726 9413
x...	9.66426 58001 4768
πx...	0.16141 56728 4181
$\sin \pi x$...	9.99683 20907 2586
Diff....	0.16458 35821 1595
a...	0.43372 34831 2856
Diff....	9.73086 00989 8739
$\frac{1}{2}$...	9.86543 00494 9369
Bx...	0.08475 57163 7949
A...	9.95018 57658 7318
(1)...	0.00287 69621 5818
(2).........	6 72196 4509
(3)...........	23131 0721
(4)............	922 1098
(5)..............	39 5556
(6)..............	1 7709
(7)..................	815
Pour les termes suivans.......	39
Somme...	0.00294 65912 6265
A...	9.95018 57658 7318
$l\Gamma(1+x)=$	9.94723 91746 1053

$1+x$...	0.16482 85343 4448	
$1-x$...	9.73110 50512 1592	
Diff....	0.43372 34831 2856	a
B_3...	8.46613 67490 38	
x^3...	8.99279 74004 43	
(1)...	7.45893 41494 81	
B_5...	7.50616 72144	
x^5...	8.32132 90007	
(2)...	5.82749 62151	
B_7...	6.71433 5161	
x^7...	7.64986 0601	
(3)...	4.36419 5762	
B_9...	5.98639 046	
x^9...	6.97839 220	
(4)...	2.96478 266	
B_{11}...	5.29028 44	
x^{11}...	6.30692 38	
(5)...	1.59720 82	
B_{13}...	4.61273 3	
x^{13}...	5.63545 5	
(6)...	0.24818 8	
B_{15}...	3.94724	
x^{15}...	4.96399	
(7)...	8.91123.	

88. Pour avoir le point précis du *minimum*, il faut, pour la valeur donnée $x = 0.4616$, calculer les coeffi ciens différentiels $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{ddZ}{dx^2}$, $\frac{d^3Z}{dx^3}$, Z étant mis pour $l\Gamma(1+x)$.

Il conviendra, pour cet objet, de revenir à la première des équations (22). Cette équation, légérement modifiée et adaptée aux logarithmes vulgaires, donnera, en faisant toujours $B_n = \frac{m}{n}(S_n - 1)$, les formules suivantes :

$$Z = -l(1+x) + Bx + B_2x^2 - B_3x^3 + B_4x^4 - B_5x^5 + \text{etc.},$$
$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{m}{1+x} + B + 2B_2x - 3B_3x^2 + 4B_4x^3 - 5B_5x^4 + \text{etc.},$$
$$\frac{ddZ}{dx^2} = \frac{m}{(1+x)^2} + 2B_2 - 6B_3x + 12B_4x^2 - 20B_5x^3 + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^3Z}{dx^3} = -\frac{m}{(1+x)^3} - 3B_3 + 12B_4x - 30B_5x^2 + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^4Z}{dx^4} = \frac{m}{(1+x)^4} + 4B_4 - 20B_5x + \text{etc.},$$
etc.

Au moyen de ces formules, on trouve, pour le cas dont il s'agit,

$$\frac{dZ}{dx} = -\ 0.00001\ 35093\ 33,$$
$$\frac{ddZ}{dx^2} = \quad 0.42026\ 7079,$$
$$\frac{d^3Z}{dx^3} = -\ 0.38460\ 1.$$

Désignant ces trois coefficiens différentiels par $-f, g, -h$, respectivement, on aura

$$l\Gamma(1+x+\omega) = Z - f\omega + \tfrac{1}{2}g\omega^2 - \tfrac{1}{2.3}\ \omega^3.$$

Au point du *minimum*, la différentielle de cette quantité prise par rapport à ω doit être nulle, ce qui donne pour déterminer ω l'équation $f - g\omega + \frac{1}{2}h\omega^2 = 0$. Et comme f est très petit par rapport à g et h, on en tire $\omega = \frac{f}{g}\left(1 + \frac{fh}{2g^2}\right)$, et le *minimum* cherché $= Z - \frac{1}{2}g\omega^2 + \frac{1}{3}h\omega^3$.

Substituant les valeurs trouvées de f, g, h, on aura $\omega = 0.00003\ 21451\ 105$, et la correction qu'il faut appliquer à $Z = -\ 0.00000\ 00002\ 1713$. On peut donc fixer comme il suit le *minimum* de la fonction Γa,

$$a = 1.46163\ 21451\ 105$$
$$\log \Gamma a = 9.94723\ 91743\ 9340.$$

89. Pour faciliter l'usage des formules précédentes, on joint ici une table des valeurs des coefficiens B_n et de leurs logarithmes, calculés jusqu'au quinzième terme, ce qui est plus que suffisant pour les applications où l'on n'a pas besoin de plus de 12 décimales exactes dans la valeur de $\log \Gamma(1+x)$.

n.	B_n.	$\log B_n$.
1	0.18361 29037 6840	9.26390 31988 6135
2	0.14004 56532 118	9.14626 96335 7783
3	0.02925 07326 917	8.46613 67490 379
4	0.00893 81315 34	7.95124 67415
5	0.00320 75040 58	7.50616 72144
6	0.00125 53326 86	7.09875 88372
7	0.00051 80064 42	6.71433 51608
8	0.00022 13466 62	6.34507 29774
9	0.00009 69148 80	5.98639 04633
10	0.00004 31938 49	5.63542 19056
11	0.00001 95112 17	5.29028 43534
12	0.00000 89061 69	4.94969 09488
13	0.00000 40995 17	4.61273 27627
14	0.00000 18999 80	4.27874 91451
15	0.00000 08856 20	3.94724 74888

CHAPITRE X.

Recherches ultérieures sur les propriétés des Fonctions Γ.

90. Considérons la fonction $\varphi(x)$ exprimée par la suite infinie

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3+x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{4+x} + \text{etc.},$$

dans laquelle nous supposons $x < 1$; si on développe cette quantité suiv les puissances de x, et qu'on désigne, comme ci-dessus, par S_n la som des puissances réciproques du degré n, des nombres naturels, on aura

$$\varphi(x) = S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - S_5 x^4 + \text{etc.}$$

Mais par l'équation (18), on a

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \tfrac{1}{2} S_2 x^2 - \tfrac{1}{3} S_3 x^3 + \tfrac{1}{4} S_4 x^4 - \text{etc.};$$

différenciant celle-ci et comparant le résultat à la valeur de $\varphi(x)$, on en t

$$\varphi(x) = C + \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}; \qquad (\text{:}$$

d'où l'on voit que la suite désignée par $\varphi(x)$ peut être sommée immédia ment, au moyen du coefficient différentiel de la fonction $\log \Gamma(1+x$ puisque d'ailleurs C est une constante connue (art. 86).

Observons que la fonction $\varphi(x)$ peut être mise sous la forme

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+x}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4+x}\right) + \text{etc.},$$

alors on voit qu'elle est la différence de deux suites qui ont l'une et l'aut une somme infinie, mais qui étant ainsi retranchées terme à terme, l'une l'autre, laissent pour reste une quantité finie. Cette quantité est d'ailleurs même qui a été désignée par $C' - N$, (art. 81), et elle représente par co séquent aussi la somme de la suite harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots\cdots + \frac{1}{x}.$$

91. Puisqu'on a généralement

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+x}\right) + \text{etc.} = C + \frac{d l \Gamma(1+x)}{dx},$$

on trouvera, par des différentiations successives, les sommes de différen séries, savoir :

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(3+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \text{etc.} = \frac{dd l \Gamma(1+x)}{dx^2}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3+x)^3} + \frac{1}{(4+x)^3} + \text{etc.} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d^3 l \Gamma(1+x)}{dx^3}$$

$$\frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \frac{1}{(3+x)^4} + \frac{1}{(4+x)^4} + \text{etc.} = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{d^4 l \Gamma(1+x)}{dx^4}$$

$$\frac{1}{(1+x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3+x)^5} + \frac{1}{(4+x)^5} + \text{etc.} = -\frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{d^5 l \Gamma(1+x)}{dx^5}$$

etc.

Et en général, si l'on désigne par $\psi_n(1+x)$ la somme de la suite infinie

$$\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(2+x)^n}+\frac{1}{(3+x)^n}+\frac{1}{(4+x)^n}+\text{etc.},$$

on aura

$$\psi_n(1+x)=\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n},$$

de sorte que les sommes de toutes ces suites se déterminent par les coefficiens différentiels successifs de la fonction $l\Gamma(1+x)$; il faut seulement excepter le premier terme $\psi_1(1+x)$, d'où l'on a déduit tous les autres, et qui ne se détermine par $\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}$, qu'en ajoutant la constante infinie... $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc.

92. Représentons par $(a,\,n)^m$ la somme de la suite infinie

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{(a+n)^m}+\frac{1}{(a+2n)^m}+\frac{1}{(a+3n)^m}+\text{etc.};$$

si l'on fait $a=nx$, cette suite devient

$$\frac{1}{n^m}\left(\frac{1}{x^m}+\frac{1}{(1+x)^m}+\frac{1}{(2+x)^m}+\text{etc.}\right).$$

Ainsi en faisant $x=\frac{a}{n}$, l'expression générale de la transcendante $(a,\,n)^m$ sera

$$(a,\,n)^m=\frac{1}{n^m}\cdot\psi_m(x)=\frac{(-1)^m}{1.2.3\ldots m-1}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\frac{d^m l\Gamma x}{dx^m}.$$

On peut encore remarquer qu'en faisant

$$\varphi_n(x)\;=\;1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\cdots+\frac{1}{x^n},$$

on aura en général $\varphi_n(x)+\psi_n(1+x)=\text{const.}=S_n$; donc

$$\varphi_n(x)=S_n-\psi_n(1+x)=S_n+\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n}.$$

C'est simplifier la théorie de ces diverses transcendantes, que de faire voir qu'elles dépendent d'une même fonction $l\Gamma(1+x)$ et de ses coefficiens différentiels successifs.

93. Considérons maintenant d'une manière particulière l'équation

$$\frac{ddl\Gamma(1+x)}{dx^2}=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\frac{1}{(3+x)^2}+\text{etc.},$$

que nous mettrons sous la forme

$$\frac{dd\,l\Gamma x}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(3+x)^2} + \text{etc.} \tag{27}$$

Cette formule est le principe d'où nous allons déduire de nouveaux théorèmes, qui serviront à perfectionner et même à compléter entièrement la théorie des fonctions Γ.

Soit pour abréger, $f(x)$ la fonction qui forme le second membre de l'équation (27); si l'on met $2x$ à la place de x, on aura

$$f(2x) = \tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(\frac{3}{2}+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \text{etc.}\right]:$$

dans la suite renfermée en parenthèses, les termes de rang impair ont pour somme $f(x)$, et les termes de rang pair ont pour somme $f(\frac{1}{2}+x)$. Ainsi on a

$$f(2x) = \tfrac{1}{4}f(x) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{2}+x):$$

or l'équation (12) donne $f(x) = \frac{ddl\Gamma x}{dx^2}$, $f(\frac{1}{2}+x) = \frac{ddl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx^2}$, $f(2x) = \frac{ddl\Gamma(2x)}{4dx^2}$; substituant ces valeurs, il vient

$$\frac{ddl\Gamma(2x)}{dx^2} = \frac{ddl\Gamma x}{dx^2} + \frac{ddl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx^2};$$

multipliant par dx et intégrant, on a

$$\frac{dl\Gamma(2x)}{dx} = \frac{dl\Gamma x}{dx} + \frac{dl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx} + \alpha.$$

Multipliant encore par dx et intégrant, il vient

$$\log\Gamma(2x) = \log\Gamma x + \log\Gamma(\tfrac{1}{2}+x) + \alpha x + 6,$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{2}+x) = Ae^{-\alpha x}\,\Gamma(2x).$$

Il reste à déterminer les deux constantes A, α, introduites par l'intégration. Pour cela, soit x infiniment petit, on aura $\Gamma x = \frac{1}{x}$ et $\Gamma(2x) = \frac{1}{2x}$; donc $A = 2\Gamma\frac{1}{2}$. Soit ensuite $x = \frac{1}{2}$, on aura $Ae^{-\frac{1}{2}\alpha} = \Gamma\frac{1}{2}$, donc $e^{\frac{1}{2}\alpha} = 2$; donc l'équation générale est

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{2}+x) = \Gamma(2x).2^{1-2x}\,\Gamma\tfrac{1}{2}. \tag{28}$$

Nous retombons ainsi sur l'équation (9) déjà démontrée de deux autres manières; mais la même méthode va nous faire découvrir de nouvelles propriétés.

94. En appelant toujours $f(x)$ le second membre de l'équation (27), si

l'on met $3x$ à la place de x, on aura

$$f(3x)=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(\frac{1}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{2}{3}+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(\frac{4}{3}+x)^2}+\text{etc.}\right].$$

La suite contenue dans le second membre se décompose en trois autres, savoir,

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\text{etc.}=f(x),$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{4}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{7}{3}+x)^2}+\text{etc.}=f(\tfrac{1}{3}+x),$$

$$\frac{1}{(\frac{2}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{5}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{8}{3}+x)^2}+\text{etc.}=f(\tfrac{2}{3}+x);$$

donc on a

$$f(3x)=\tfrac{1}{9}\left[f(x)+f(\tfrac{1}{3}+x)+f(\tfrac{2}{3}+x)\right].$$

Remettant au lieu de $f(x)$ sa valeur $\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}$, et semblablement pour les autres termes, il vient

$$\frac{ddl\Gamma(3x)}{dx^2}=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{1}{3}+x)}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{2}{3}+x)}{dx^2}.$$

Intégrant cette équation deux fois consécutives, on obtient pour résultat

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{3}+x)\Gamma(\tfrac{2}{3}+x)=\Gamma(3x).Ae^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les deux constantes A et α, soit, 1°. x infiniment petit, on aura $A=3\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=2\pi\sqrt{3}$; soit, 2°. $x=\frac{1}{3}$, on aura... $Ae^{-\frac{1}{3}\alpha}=\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}=\frac{1}{3}A$, et par conséquent $e^{\alpha}=3^3$. Donc on a l'équation

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{3}+x)\Gamma(\tfrac{2}{3}+x)=2\pi.3^{\frac{1}{2}-3x}\Gamma(3x): \tag{29}$$

c'est la quatrième propriété générale des fonctions Γ.

95. Si l'on considère semblablement la fonction $f(5x)$, et qu'on décompose la suite qu'elle représente en cinq autres, provenant des termes comptés de cinq en cinq, à commencer par le 1er, le 2e, le 3e, le 4e et le 5e, on obtiendra l'équation

$$f(5x)=\tfrac{1}{25}\left[fx+f(\tfrac{1}{5}+x)+f(\tfrac{2}{5}+x)+f(\tfrac{3}{5}+x)+f(\tfrac{4}{5}+x)\right],$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$\frac{ddl\Gamma(5x)}{dx^2}=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{1}{5}+x)}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{2}{5}+x)}{dx^2}$$
$$+\frac{ddl\Gamma(\frac{3}{5}+x)}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{4}{5}+x)}{dx^2},$$

dont l'intégrale est

$$\Gamma x \Gamma(\tfrac{1}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{2}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{3}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{4}{5}+x) = \Gamma(5x)\,.\,Ae^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les constantes A et α, on fera successivement x infiniment petit et $x = \frac{1}{5}$, ce qui donnera

$$A = 5\Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5},$$

$$Ae^{-\frac{\alpha}{5}} = \Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}A;$$

donc $e^{\alpha} = 5^5$: ensuite on a par l'équation (3),

$$\Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{5}\pi}, \quad \Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5} = \frac{\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi},$$

ce qui donne $A = \dfrac{5\pi^2}{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}} = 4\pi^2\sqrt{5}$. Donc enfin la fonction Γ satisfait encore à l'équation.

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{2}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{3}{5}+x)\,\Gamma(\tfrac{4}{5}+x) = \Gamma(5x)\,.\,(2\pi)^2\,.\,5^{\frac{1}{2}-5x}: \quad (30)$$

c'est la cinquième propriété générale des fonctions Γ.

96. Il est facile de voir qu'on peut généraliser ces résultats et les comprendre dans une même formule. En effet, n étant un entier quelconque, la valeur de $f(nx)$ pourra se décomposer ainsi,

$$f(nx) = \frac{1}{n^2}\left[fx + f\left(\frac{1}{n}+x\right) + f\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots + f\left(\frac{n-1}{n}+x\right)\right];$$

il en résulte l'équation différentielle

$$\frac{ddl\Gamma(nx)}{dx} = \frac{ddl\Gamma x}{dx^2} + \frac{ddl\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)}{dx^2}\ldots\ldots + \frac{ddl\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{dx^2},$$

dont l'intégrale finie est

$$\Gamma x\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right) = \Gamma(nx)\,.\,Ae^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les deux constantes A et α, faisons successivement x infiniment petit et $x = \frac{1}{n}$, nous aurons ces deux équations

$$A = n\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\ldots\Gamma\frac{n-1}{n},$$

$$Ae^{-\frac{\alpha}{n}} = \Gamma\frac{1}{n}\cdot\Gamma\frac{2}{n}\cdot\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n} = \frac{A}{n};$$

la dernière donne immédiatement $e^a = n^a$. Pour avoir la valeur de A, il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair.

Soit, 1°. $n=2m$, les fonctions $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}\ldots\Gamma\frac{n-2}{n}$, $\Gamma\frac{n-1}{n}$ auront un terme moyen $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$, et les termes également éloignés des extrêmes étant complémens l'un de l'autre, leur produit sera donné par l'équation (3); et on aura pour le produit total de ces fonctions,

$$\pi^{\frac{1}{2}}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}.\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}}.\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{m-1}{n}\pi}=\frac{\pi^{m-\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{m-1}{n}\pi};$$

Mais en faisant z infiniment petit dans la formule qui termine l'art. 240, *Introd. in An. inf.*, on trouve

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{n}\pi=2^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{n};$$

ce qui donne, dans le premier cas,

$$\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$A=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}.$$

Soit, 2°. $n=2m+1$, il n'y aura point de terme moyen dans la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}$; mais les termes également éloignés des extrêmes étant toujours complémens l'un de l'autre, le produit de toutes ces fonctions sera

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi^m}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

D'une autre part, la formule citée d'Euler donne, lorsque n est impair,

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m\pi}{n}=2^{\frac{1-n}{2}}\,n^{\frac{1}{2}};$$

donc on a encore dans ce cas,

$$\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent,

$$A=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, quel que soit le nombre entier n, on aura généralement la formul

$$\Gamma x \Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)=\Gamma(nx).(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nx}\ldots$$

97. Cette formule très remarquable comprend comme cas particuliers formules (28), (29) et (30); elle en donnera tant d'autres qu'on voudra prenant pour n des valeurs en nombres entiers au-dessus de 5.

Il est bon néanmoins d'observer que les formules qui résultent de l'é tion (31), en prenant pour n un nombre composé, ne sont que des co quences de celles qui ont lieu en ne prenant pour n que des nombres miers, et qu'ainsi il suffit de considérer ces dernières, en donnant à n les leurs successives 2, 3, 5, 7, 11, etc. On obtiendra encore de cette man une infinité d'équations auxquelles les fonctions Γ doivent satisfaire, et donnent les moyens de multiplier à l'infini les comparaisons et les réducti dont ce genre de transcendantes est susceptible.

98. Nous observerons encore que dans les usages de la formule (31) et toutes celles qui en dérivent, on peut se borner à faire $x<\frac{1}{n}$; car si l'on $\frac{1}{n}+x$ à la place de x, la formule qui naît de cette substitution ne diff pas de la formule (31); de sorte qu'on n'obtiendra entre les foncti Γ que les mêmes relations qui peuvent être obtenues en suppos $x<\frac{1}{n}$.

99. Nous pouvons même aller plus loin, et démontrer qu'il suffira faire $x<\frac{1}{2n}$, parce que l'équation qui viendrait en supposant $x=\frac{1}{2n}+$ ne différera pas essentiellement de celle que donne la suppositi $x=\frac{1}{2n}-\omega$.

En effet, si l'on fait successivement ces deux substitutions dans l'équ tion (31), on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2n}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2n}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{5}{2n}+\omega\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}+\omega\right)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\omega\right)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{n\omega}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2n}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2n}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{5}{2n}-\omega\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}-\omega\right)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\omega\right)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-n\omega}$$

multipliant ces deux équations entre elles, et observant que chaque fon tion Γ dans une équation, trouve son complément dans l'autre, on au pour le produit total cette équation ,

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\pi\omega\right)}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{2n}+\pi\omega\right)}\cdots\cdots\frac{\pi}{\left(\sin\frac{2n-1}{2n}\pi+\pi\omega\right)}=\frac{\pi(2\pi)^{n-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\omega\pi\right)},$$

laquelle en faisant $\frac{\pi}{2n}+\omega\pi=z$, peut être mise sous cette forme,

$$\sin nz=2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\ldots\sin\left(\frac{n-1}{n}\pi+z\right):$$

c'est l'équation déjà citée de l'art. 240, *Introd. in An. inf.*

De là on voit que les deux équations obtenues en faisant $x=\frac{1}{2n}+\omega$, $x=\frac{1}{2n}-\omega$, ne donnent qu'un seul et même résultat, et qu'ainsi dans l'application de l'équation (31), il suffira de faire $x<\frac{1}{2n}$.

On peut remarquer encore qu'en faisant $\omega=0$, on a la formule

$$\Gamma\frac{1}{2n}\,\Gamma\frac{3}{2n}\,\Gamma\frac{5}{2n}\cdots\cdots\Gamma\frac{2n-1}{2n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\tfrac{1}{2},$$

laquelle se déduirait aisément de la formule générale

$$\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\cdots\cdots\Gamma\frac{n-1}{n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}.$$

100. Il ne sera pas inutile de rassembler ici sous un même point de vue, toutes les équations qui contiennent les propriétés générales des fonctions Γ. Voici ces formules, accompagnées des lettres qui serviront dans la suite à les désigner.

(A) $\Gamma x=1.2.3\ldots(x-1)$,

(B) $\Gamma(1+x)=x\Gamma x$,

(C) $\Gamma x\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$,

(D) $\Gamma x\Gamma(\frac{1}{2}+x)=\Gamma(2x).(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2x}$,

(E) $\Gamma x\Gamma(\frac{1}{3}+x)\Gamma(\frac{2}{3}+x)=\Gamma(3x).(2\pi)^{1}\,3^{\frac{1}{2}-3x}$,

(F) $\Gamma x\Gamma(\frac{1}{5}+x)\Gamma(\frac{2}{5}+x)\Gamma(\frac{3}{5}+x)\Gamma(\frac{4}{5}+x)=\Gamma(5x).(2\pi)^{2}\,5^{\frac{1}{2}-5x}$,

$\vdots$

(N) $\Gamma x\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)=\Gamma(nx).(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}$.

Ces équations offrent une infinité de manières de comparer entre elles les fonctions Γ, et d'opérer toutes les réductions que leur nature comporte. On peut démontrer, par exemple, qu'il suffit de connaître la fonction Γ dans une petite partie de la première période, pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la période. On peut aussi considérer parmi les fonctions Γx, celles qui se rapportent aux diverses valeurs rationnelles de x qui ont un même dénominateur, et se proposer de réduire toutes ces transcendantes au moindre nombre possible. De là naissent différens problèmes curieux qui jetteront un nouveau jour sur la nature des fonctions Γ, et sur lesquels nous allons donner quelques recherches.

CHAPITRE XI.

Où l'on prouve que les fonctions Γ *peuvent être déterminées dans toute l'étendue d'une période, pourvu qu'elles soient connues dans une petite partie de cette période.*

101. Nous nous proposerons d'abord de faire voir qu'au moyen de l'équation (D), il suffit de connaître la fonction Γx depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{4}$; pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la première période, depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à $x = 1$.

Comme il s'agit ici non d'effectuer la solution, mais d'en démontrer la possibilité, nous ferons usage de quelques signes propres à abréger les calculs. Pour cet effet, désignons log Γx par (x), les équations (C) et (D) pourront s'écrire ainsi,

$$(x) + (1 - x) = l\frac{\pi x}{\sin \pi x},$$
$$(x) + (\tfrac{1}{2} + x) - (2x) = \tfrac{1}{2}\, l(2\pi) + (\tfrac{1}{2} - 2x)\, l2.$$

Les seconds membres de ces équations étant des quantités connues lorsque x est donné, nous les représenterons par la lettre d, initiale du mot *donnée*, qui désignera également toute quantité composée de termes connus. Nos deux équations peuvent donc se représenter par la notation suivante,

(C) $$(x) + (1 - x) = d,$$
(D) $$(x) + (\tfrac{1}{2} - x) - (2x) = d.$$

Cela posé, si dans l'équation (D) on fait $x = \frac{1}{4} + \alpha$, on aura

$$(\tfrac{1}{4}+\alpha) + (\tfrac{3}{4}+\alpha) - (\tfrac{1}{2}+2\alpha) = d.$$

Mais par l'équation (C) on a $(\frac{3}{4}+\alpha) = -(\frac{1}{4}-\alpha) + d$, et par l'équation (D), $(\frac{1}{2}+2\alpha) = (4\alpha) - (2\alpha) + d$; donc

$$(\tfrac{1}{4}+\alpha) = (\tfrac{1}{4}-\alpha) + (4\alpha) - (2\alpha) + d.$$

Tant qu'on aura $\alpha < \frac{1}{12}$, cette équation déterminera la fonction (x) ou $(\frac{1}{4}+\alpha)$ par d'autres fonctions où x est moindre. Ainsi en donnant à α toutes les valeurs depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{12}$, on connaîtra la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$.

102. Par exemple, soit $x = \frac{7}{24}$, ou $\alpha = \frac{1}{24}$, on aura

$$(\tfrac{7}{24}) = (\tfrac{5}{24}) + (\tfrac{1}{6}) - (\tfrac{1}{12}) + d;$$

ainsi la valeur de $(\frac{7}{24})$ est composée de quantités connues.

Soit encore $x = \frac{19}{60}$ ou $\alpha = \frac{4}{15}$, on aura

$$(\tfrac{19}{60}) = (\tfrac{11}{60}) + (\tfrac{4}{15}) - (\tfrac{2}{15}) + d.$$

Dans le second membre, la fonction $(\frac{4}{15})$ n'est pas donnée immédiatement, puisque $(\frac{4}{15})$ est $> \frac{1}{4}$; mais on aura sa valeur par la même formule, en faisant $\alpha = \frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$; ce qui donne

$$(\tfrac{4}{15}) = (\tfrac{14}{60}) + (\tfrac{4}{60}) - (\tfrac{2}{60}) + d;$$

d'où l'on voit que $(\frac{19}{60})$ deviendra entièrement connu.

103. Lorsqu'on fait $x = \frac{1}{3}$ ou $\alpha = \frac{1}{12}$, la formule précédente ne détermine pas la fonction $(\frac{1}{3})$; mais alors les équations (C) et (D) donnent immédiatement

$$(\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{3}) = d, \qquad (\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{2}{3}) - (\tfrac{1}{3}) = d;$$

d'où l'on tire la valeur cherchée

$$(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}) + d.$$

Connaissant la fonction (x) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$, il reste à la déterminer depuis $x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. Or, par la combinaison des équations (C) et (D), on a la formule

$$(\tfrac{1}{2}-\alpha) = (\alpha) - (2\alpha) + d.$$

Si l'on donne à α toutes les valeurs depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{6}$, le second membre sera connu; ainsi on aura la valeur de la fonction (x) ou $(\frac{1}{2}-\alpha)$, depuis $x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$.

On peut donc déterminer la fonction Γx pour toute valeur de la racine x, pourvu qu'on connaisse cette fonction depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{4}$.

Ce problème revient à celui que nous avons résolu dans l'art. 53 ; mais la méthode précédente fait voir plus clairement la possibilité de la solution.

104. Il ne serait pas difficile d'ailleurs d'obtenir les solutions effectives, en réalisant les quantités désignées par d; on trouverait alors les trois équations

$$\left(\tfrac{1}{4}+\alpha\right)=\left(\tfrac{1}{4}-\alpha\right)-(2\alpha)+(4\alpha)+\left(\tfrac{1}{2}+2\alpha\right)l2+l\sin\left(\tfrac{1}{4}-\alpha\right)\pi,$$
$$2\left(\tfrac{1}{3}\right)=\left(\tfrac{1}{6}\right)+\tfrac{1}{2}\,l\pi-\tfrac{2}{3}\,l2-l\sin\tfrac{1}{3}\pi,$$
$$\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)=(\alpha)-(2\alpha)+\tfrac{1}{2}\,l\pi-(1-2\alpha)\,l2-l\cos\alpha\pi.$$

La première servira à déterminer la fonction (x) depuis $x=\frac{1}{4}$ jusqu'à $x=\frac{1}{3}$; la seconde déterminera la fonction $\frac{1}{3}$; et la troisième servira à déterminer la fonction (x), depuis $x=\frac{1}{3}$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$. Enfin, d'après ces données, l'équation (C) servira à déterminer la fonction (x), depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$.

105. Puisque l'emploi des équations (C) et (D) donne les moyens de réduire à $\frac{1}{4}$ la partie de la première période où la fonction Γx doit être connue, afin de déterminer cette fonction dans la période entière, on peut conjecturer de là que si à ces équations on joint l'équation (E), il sera possible de réduire ultérieurement à $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)$ ou $\frac{1}{6}$, la partie de la période qui sert à déterminer tout le reste. C'est ce que nous allons vérifier par une analyse semblable à la précédente.

Supposons que la fonction (x) est connue depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{6}$; d'après l'équation (E) on aura

$$\left(\tfrac{1}{6}+\alpha\right)+\left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)+\left(\tfrac{5}{6}+\alpha\right)-\left(\tfrac{1}{2}+3\alpha\right)=d.$$

Mais l'équation (D) donne $\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)=(2\alpha)-(\alpha)+d$, $\left(\frac{1}{2}+3\alpha\right)=(6\alpha)-(3\alpha)+d$, et l'équation (C) donne $\left(\frac{5}{6}+\alpha\right)=-\left(\frac{1}{6}-\alpha\right)+d$; on a donc la formule

$$\left(\tfrac{1}{6}+\alpha\right)=\left(\tfrac{1}{6}-\alpha\right)+(\alpha)-(2\alpha)-(3\alpha)+(6\alpha)+d.$$

Tant que 6α sera plus petit que $\frac{1}{6}+\alpha$, ou tant qu'on prendra $\alpha<\frac{1}{30}$, cette équation donnera la valeur de (x) ou $\left(\frac{1}{6}+\alpha\right)$ par des fonctions dont la racine est moindre. Ainsi on connaîtra la valeur de la fonction (x) depuis $x=\frac{1}{6}$ jusqu'à $x=\frac{1}{5}$.

La formule précédente ne détermine pas la valeur de la fonction $\left(\frac{1}{5}\right)$; mais par une autre formule que nous donnerons ci-après (art. 116), on a

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)=\left(\tfrac{1}{30}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)+d.$$

106. Il reste à déterminer la fonction (x) depuis $x=\frac{1}{5}$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$.

Pour cela, soit $\alpha = \frac{1}{30} + z$, l'équation précédente deviendra

$$\left(\tfrac{1}{5}+6z\right)=\left(\tfrac{1}{5}+z\right)+\left(\tfrac{1}{10}+3z\right)+\left(\tfrac{1}{15}+2z\right)-\left(\tfrac{1}{30}+z\right)-\left(\tfrac{2}{15}-z\right)+d.$$

Pour faire usage de cette formule, il faut supposer connue la fonction $\left(\frac{1}{5}+z\right)$ depuis $z=0$ jusqu'à $z=\omega$, ω étant une quantité aussi petite qu'on voudra. Alors donnant à z toutes les valeurs depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{20}$, on connaîtra la fonction (x) ou $\left(\frac{1}{5}+6z\right)$, depuis $x=\frac{1}{5}$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$.

On peut aussi ne faire usage de la formule précédente que depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{45}$, ce qui fera connaître la fonction (x) depuis $x=\frac{1}{5}$ jusqu'à $x=\frac{1}{3}$. On déterminera ensuite cette fonction depuis $x=\frac{1}{3}$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$, par la formule

$$\left(\tfrac{1}{2}-x\right)=(x)-(2x)+d.$$

Cette solution est fort simple, puisqu'elle est fondée sur une seule formule mise sous deux formes différentes; mais elle suppose qu'outre la partie de la période connue depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{6}$, on connaît encore la partie comprise depuis $x=\frac{1}{5}$ jusqu'à $x=\frac{1}{5}+\omega$, ω étant une quantité qui, à la vérité, peut être aussi petite qu'on voudra, mais qui ne peut être tout-à-fait anéantie. Voici un autre moyen de résoudre le même problème, en supposant connues deux parties de la période non contiguës, mais telles que leur somme se réduit précisément à $\frac{1}{6}$.

107. Supposons la fonction (x) connue dans deux parties de la première période, savoir, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{18}$, et depuis $x=\frac{5}{18}$ jusqu'à $x=\frac{7}{18}$: ces deux parties réunies font une somme égale à $\frac{1}{6}$; et pour déterminer la fonction (x) dans tout le reste de la période, il faudra exécuter les opérations suivantes:

1°. Par les formules (E) et (C), on a

$$(3\alpha)=(\alpha)+\left(\tfrac{1}{3}+\alpha\right)-\left(\tfrac{1}{3}-\alpha\right)+d:$$

le second membre est connu depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{1}{18}$, ainsi on connaîtra la fonction (x) depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{6}$.

2°. D'après les équations (C) et (D), on a

$$\left(\frac{3+\alpha}{18}\right)=\left(\frac{6-\alpha}{18}\right)+\left(\frac{6+2\alpha}{18}\right)+d:$$

le second membre est connu depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{1}{2}$; donc on connaîtra la fonction (x) depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{7}{36}$.

3°. Mettant $\alpha-1$ à la place de α dans l'équation précédente, on en tire

$$\left(\frac{4+2\alpha}{18}\right)=\left(\frac{2+\alpha}{18}\right)-\left(\frac{7-\alpha}{18}\right)+d:$$

le second membre de celle-ci est connu depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{2}$; donc on connaîtra la fonction (x) depuis $x = \frac{4}{18}$ jusqu'à $x = \frac{5}{18}$.

Par ces trois premières opérations, la fonction (x) devient connue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{7}{36}$, et depuis $x = \frac{4}{18}$ jusqu'à $x = \frac{7}{18}$. Il faut maintenant remplir la lacune que laissent ces deux espaces, depuis $x = \frac{7}{36}$ jusqu'à $x = \frac{8}{36}$, ou depuis $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{180}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{4}{180}$.

4°. D'après l'équation (D), on a

$$\left(\tfrac{1}{5} + z\right) + \left(\tfrac{7}{10} + z\right) - \left(\tfrac{2}{5} + 2z\right) = d :$$

les termes $\left(\frac{7}{10} + z\right)$, $\left(\frac{2}{5} + 2z\right)$ peuvent être remplacés par leurs complémens $-\left(\frac{3}{10} - z\right)$, $-\left(\frac{3}{5} - 2z\right)$; ensuite par l'équation (D), le terme $\left(\frac{3}{5} - 2z\right)$ peut être remplacé par $\left(\frac{1}{5} - 4z\right) - \left(\frac{1}{10} - 2z\right)$. On aura donc

$$\left(\tfrac{1}{5} + z\right) + \left(\tfrac{1}{5} - 4z\right) = \left(\tfrac{3}{10} - z\right) + \left(\tfrac{1}{10} - 2z\right) + d.$$

Dans cette équation, le second membre sera toujours connu, pourvu que z positif ou négatif ne surpasse pas $\frac{1}{20}$.

Cela posé, donnons à z toutes les valeurs depuis $z = \frac{1}{720}$ jusqu'à $z = \frac{4}{180}$; la fonction $\left(\frac{1}{5} - 4z\right)$ est connue dans cet intervalle; ainsi on connaîtra la fonction (x) représentée par $\left(\frac{1}{5} + z\right)$, depuis $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{4}{180}$. Donc l'intervalle où la fonction (x) reste inconnue ne s'étend plus que depuis $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{180}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$.

Donnons maintenant à z des valeurs négatives, depuis $z = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{720}$ jusqu'à $z = -\frac{4}{720}$; la fonction $\left(\frac{1}{5} - 4z\right)$ sera connue dans cet intervalle, ainsi on connaîtra la fonction $\left(\frac{1}{5} + z\right)$ depuis $z = -\frac{1}{2880}$ jusqu'à $z = -\frac{1}{180}$; de sorte que l'intervalle où la fonction (x) reste inconnue se trouve de nouveau resserré entre $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{2880}$ et $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$.

On continuera de procéder de la même manière, en attribuant à z des valeurs alternativement positives et négatives. Si l'intervalle inconnu s'étend d'abord depuis $x = \frac{1}{5} - \omega$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + 4\omega$, une première opération resserrera cet intervalle entre les limites $x = \frac{1}{5} - \omega$, $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\omega$; une seconde opération le resserrera encore entre les limites $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{16}\omega$ et $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\omega$, et ainsi de suite. D'où l'on voit que l'intervalle inconnu finira par s'anéantir dans la limite $x = \frac{1}{5}$; et en ce point on aura, toujours d'après la même formule,

$$\left(\tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{7}{10}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{10}\right) + d.$$

5°. La valeur de la fonction (x) étant connue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{7}{18}$, pour la trouver depuis $x = \frac{7}{18}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$, on fera usage de la formule

$$\left(\tfrac{1}{2} - x\right) = (x) - (2x) + d.$$

108. On voit donc qu'il est possible de déterminer la valeur de la fonction Γx, dans toute l'étendue de la première période, et de là pour toute valeur de x, pourvu qu'on connaisse cette fonction dans une partie assez petite de cette période.

La partie qu'il faut connaître est $\frac{1}{2}$, quand on ne fait usage que de l'équation (C); elle se réduit à $\frac{1}{4}$, lorsqu'on fait usage des deux équations (C) et (D), et elle se réduit de nouveau à $\frac{1}{6}$, lorsqu'on fait usage des trois équations (C), (D), (E). Elle se réduirait ultérieurement en faisant usage de l'équation (F) et des suivantes; mais la proportion de cette réduction et la distribution des parties qui conduisent à la plus grande réduction, pourraient faire l'objet d'un genre de recherches analytiques qu'il ne nous paraît pas nécessaire de continuer plus loin. Nous nous contenterons de remarquer que les fonctions Γ se rapprochent, par ces propriétés, des fonctions circulaires, logarithmiques et même elliptiques, qu'il suffit de connaître dans un intervalle aussi petit qu'on voudra, pour pouvoir les déterminer dans toute leur étendue.

CHAPITRE XII.

Formules pour réduire au moindre nombre possible les transcendantes contenues dans la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}$, *n étant un nombre entier donné.*

109. Si n est un nombre premier, on ne pourra faire usage que de l'équation des complémens (C), et les transcendantes dont il s'agit ne pourront être réduites à un nombre moindre que $\frac{1}{2}(n-1)$. Mais si n est un nombre composé, chaque facteur premier de n donnera lieu à l'application de celle des équations (D), (E), (F), etc., qui est relative à ce facteur, et il en

résultera des réductions d'autant plus multipliées, que n aura plus de facteurs simples.

Si n est divisible par 2, on pourra appliquer l'équation (D), dans laquelle on fera successivement $x=\frac{1}{n}$, $x=\frac{2}{n}$, $x=\frac{3}{n}$, etc., jusqu'à $x=\frac{1}{4}$ ce qui donnera autant d'équations de condition entre les fonctions $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{2n}$. On se borne à chercher des relations entre ces fonctions, parce que les suivantes, jusqu'à $\Gamma\frac{n-1}{n}$, se déduisent de celles-ci par l'équation (C), excepté $\Gamma\frac{1}{2}$, dont la valeur est connue.

Si n est divisible par 3, on fera l'application de l'équation (E), en donnant à x les valeurs successives $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}\ldots$ jusqu'à $\frac{1}{6}$ exclusivement, ce qui donnera de nouvelles équations de condition.

On fera un semblable usage de l'équation (E), si n est divisible par 5; de l'équation (F), si n est divisible par 7, et ainsi de suite.

On aura de cette manière toutes les équations de condition qui serviront à réduire au moindre nombre possible les transcendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}$, et qui feront connaître en même temps celles de ces fonctions qui sont nécessaires pour exprimer toutes les autres.

110. Considérons pour premier exemple le cas de $n=12$, et désignons, pour abréger, $\log\,\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$ par Zk; la question est de réduire au moindre nombre possible les transcendantes $Z1$, $Z2$, $Z3$, $Z4$, $Z5$; et pour cela nous aurons à faire l'application des équations (D) et (E), puisque n a pour facteurs premiers 2 et 3.

Les valeurs à substituer dans l'équation (D) se réduisent à deux seulement, $x=\frac{1}{12}$, $x=\frac{2}{12}$, parce qu'on doit supposer $x<\frac{1}{4}$; il en résulte les deux équations de condition

$$Z1+Z7-Z2=\tfrac{1}{2}l\pi+\tfrac{5}{6}l2,$$
$$Z2+Z8-Z4=\tfrac{1}{2}l\pi+\tfrac{4}{6}l2.$$

Au lieu de $Z7$ et $Z8$, il faut introduire les complémens $Z5$ et $Z4$, ce qui se fera par l'équation (C), qui donne, en faisant $\frac{1}{12}\pi=\omega$,

$$Z5+Z7=l\frac{\pi}{\sin 5\omega}=l\pi+2l2+l\sin\omega,$$

$$Z4+Z8=l\frac{\pi}{\sin 4\omega}=l\pi+\ l2-\tfrac{1}{2}l3.$$

Cette substitution donnera

$$Z5 = Z1 - Z2 + \tfrac{1}{2}\, l\pi + \tfrac{7}{6}\, l\,2 + l \sin\omega,$$
$$Z4 = \tfrac{1}{2} Z2 + \tfrac{1}{4}\, l\pi + \tfrac{1}{6}\, l\,2 - \tfrac{1}{4}\, l3.$$

L'équation (D) ayant fourni deux équations de condition, on voit que les cinq transcendantes dont il s'agit se réduisent à trois, qui sont $Z1$, $Z2$, $Z3$; et cette solution est dans le fond la même que celle de l'art. 18, où l'on n'a fait usage que des équations qui, pour les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$, répondent aux deux équations (C) et (D) relatives aux fonctions Γ. Mais l'application de l'équation (E), due au facteur premier 3, fournira encore une nouvelle réduction.

Puisqu'on doit prendre $x < \frac{1}{6}$, on n'aura à substituer dans l'équation (E) que la seule valeur $x = \frac{1}{12}$, ce qui donnera l'équation de condition

$$Z1 + Z5 + Z9 - Z3 = l(2\pi) + \tfrac{1}{4} l3;$$

mais par l'équation (C) on a $Z3 + Z9 = l\,\frac{\pi}{\sin 3\omega} = l\pi + \frac{1}{2} l2$; donc

$$Z1 + Z5 - 2Z3 = \tfrac{1}{2} l2 + \tfrac{1}{4} l3.$$

Substituant dans celle-ci la valeur de $Z5$ exprimée par $Z1$ et $Z2$, il viendra

$$Z3 = Z1 - \tfrac{1}{2} Z2 + \tfrac{1}{4}\, l\pi + \tfrac{1}{3}\, l2 - \tfrac{1}{8}\, l3 + \tfrac{1}{2}\, l \sin\omega;$$

d'où l'on voit que les deux transcendantes $Z1$, $Z2$ suffisent pour déterminer toutes les autres: c'est le dernier terme des réductions qui peuvent avoir lieu entre les diverses transcendantes désignées par $\Gamma\,\frac{k}{12}$.

111. Nous avions déjà atteint ce terme dans l'art. 24; mais nous n'y étions parvenu qu'à l'aide de diverses intégrations fort compliquées. En vertu de ces intégrations, on a déterminé le rapport des deux quantités M_1, M_3, comme il suit:

$$\frac{M_1}{M_3} = 2^{\frac{4}{3}}\, 3^{\frac{1}{4}} \cos\omega = \frac{2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}}}{\sin\omega}.$$

Or, par la formule du n° 47, on a

$$M_1 = \left(\tfrac{1}{1}\right) = \frac{\Gamma\frac{1}{12}\,\Gamma\frac{1}{12}}{12\,\Gamma\frac{2}{12}},$$
$$M_3 = \left(\tfrac{3}{3}\right) = \frac{\Gamma\frac{3}{12}\,\Gamma\frac{3}{12}}{12\,\Gamma\frac{1}{2}};$$

donc

$$\frac{M_1}{M_3} = \left(\frac{\Gamma\frac{1}{12}}{\Gamma\frac{3}{12}}\right) \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{2}{12}},$$

égalant les deux valeurs de $\frac{M_1}{M_3}$, on pourra déterminer $\Gamma\frac{3}{12}$ par le moyen des deux transcendantes $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}$, et on obtiendra ainsi, dans la notation précédente,

$$Z3 = Z1 - \tfrac{1}{2}Z2 + \tfrac{1}{4}l\pi + \tfrac{1}{3}l2 - \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\omega,$$

valeur qui s'accorde entièrement avec celle qu'on a déduite de l'équation (E).

Ainsi le résultat qui avait été trouvé presque fortuitement par des intégrations très difficiles, est donné immédiatement par l'équation (E). En général, il paraît que les seules réductions qui peuvent avoir lieu entre les fonctions Γ, sont celles que donnent les équations (C), (D), (E) et les suivantes, lorsque l'application peut en être faite, à raison des nombres premiers qui sont diviseurs de n. Ces équations ont d'ailleurs l'avantage de conduire aux réductions par la voie la plus simple et la plus courte, comme on vient d'en voir un exemple; elles paraissent donc ne rien laisser à désirer sur la théorie des fonctions Γ.

112. Dans l'exemple dont nous venons de développer la solution, le calcul nous a conduits à prendre Z1 et Z2 pour les termes avec lesquels on devait exprimer tous les autres. Mais Z1 et Z2 étant relatifs aux fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}$, il peut paraître plus simple de prendre pour termes de comparaison les fonctions $\Gamma\frac{1}{3}$ et $\Gamma\frac{1}{4}$. Dans cette hypothèse, il faudra exprimer Z1, Z2 et Z5 par le moyen de Z3 et Z4. C'est ce qu'on peut faire facilement, au moyen des formules précédentes, et voici le résultat du calcul dans lequel nous comprenons toutes les valeurs de $\log\Gamma\frac{k}{12}$, excepté $\log\Gamma\frac{1}{2}$.

$$l\Gamma\tfrac{1}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{4} + l\Gamma\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{3}{8}l3 - \tfrac{1}{2}l\sin\tfrac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{2}{12} = 2l\Gamma\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{3}l2 + \tfrac{1}{2}l3,$$
$$l\Gamma\tfrac{5}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{4} - l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}l\pi + l2 - \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\tfrac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{7}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{3} - l\Gamma\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}l\pi + l2 + \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\tfrac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{8}{12} = -l\Gamma\tfrac{1}{3} + l\pi + l2 - \tfrac{1}{2}l3,$$
$$l\Gamma\tfrac{9}{12} = -l\Gamma\tfrac{1}{4} + l\pi + \tfrac{1}{2}l2,$$
$$l\Gamma\tfrac{10}{12} = -2l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2}l\pi + \tfrac{4}{3}l2 - \tfrac{1}{2}l3,$$
$$l\Gamma\tfrac{11}{12} = -l\Gamma\tfrac{1}{4} - l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2}l\pi + \tfrac{1}{2}l2 - \tfrac{3}{8}l3 - \tfrac{1}{2}l\sin\tfrac{\pi}{12}.$$

113. On a trouvé dans l'art. 20, $\left(\frac{1}{1}\right) = F^1(\sin 45^\circ) = B$; or par la formule ($\varepsilon$) du n° 47, la transcendante $\left(\frac{1}{1}\right)$ qui suppose $n = 4$, est équivalente à $\frac{\Gamma^2 \frac{1}{4}}{4\,\Gamma \frac{1}{2}}$. Donc $\Gamma^2 \frac{1}{4} = 4B\sqrt{\pi}$.

De même, au moyen de la transcendante $\left(\frac{1}{1}\right)$ dont la valeur est donnée dans l'art. 19 pour le cas de $n = 3$, on trouvera $\Gamma^3 \frac{1}{3} = 2^{\frac{7}{3}}\, 3^{-\frac{1}{4}}\, C\pi$; C désignant comme dans l'art. 24 la fonction $F^1(\sin 15^\circ)$.

Mais par la théorie des fonctions elliptiques, on trouve les logarithmes vulgaires de B et C, comme il suit :

$$\log B = 0.26812\ 72224\ 1192,$$
$$\log C = 0.20361\ 53657\ 1262.$$

De là résultent les valeurs des transcendantes $\log \Gamma \frac{k}{12}$ et $\log \Gamma\left(1 + \frac{k}{12}\right)$, comme on les voit dans le tableau suivant, qui pourra être fort utile dans diverses recherches d'analyse.

a.	$\log \Gamma a$.	$\log \Gamma(1+a)$.
$\frac{1}{12}$	1.06067 62454 1387	9.98149 49993 6625
$\frac{2}{12}$	0.74556 78577 5330	9.96741 66073 6966
$\frac{3}{12}$	0.55938 10750 4347	9.95732 10837 1551
$\frac{4}{12}$	0.42796 27493 1426	9.95084 14945 9460
$\frac{5}{12}$	0.32788 12161 8498	9.94766 99744 7338
$\frac{6}{12}$	0.24857 49363 4707	9.94754 49406 8309
$\frac{7}{12}$	0.18432 48784 0648	9.95024 16723 7311
$\frac{8}{12}$	0.13165 64916 8402	9.95556 52326 2834
$\frac{9}{12}$	0.08828 37954 8265	9.96334 50588 7435
$\frac{10}{12}$	0.05261 20106 0482	9.97343 07645 5719
$\frac{11}{12}$	0.02347 73967 1089	9.98568 88358 2149

114. On a trouvé encore (n° 22) pour le cas de $n = 8$, la fonction $\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{1}{4}} F^1\left(\text{tang}\ \frac{\pi}{8}\right) = 2^{\frac{1}{4}} D$, en faisant $F^1\left(\text{tang}\ \frac{\pi}{8}\right) = D$; mais la fonction $\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\Gamma^2 \frac{1}{8}}{8\Gamma \frac{1}{4}}$; donc $(\Gamma \frac{1}{8})^2 = 8 . 2^{\frac{1}{4}} D \Gamma \frac{1}{4}$. Nous connaissons déjà $\Gamma \frac{1}{4}$, et nous avons trouvé (664)

$$\log D = 0.21631\ 59377\ 2807,$$

de là résulte

$$\log \Gamma\tfrac{1}{8} = 0.87702\ 22493\ 3974.$$

Cette valeur fait connaître celle de $\Gamma\frac{3}{8}$ par l'équation $\Gamma\frac{3}{8} = \Gamma\frac{1}{8}.\frac{\sqrt{(2\pi)}}{8D}$, puis celles des complémens $\Gamma\frac{7}{8}$ et $\Gamma\frac{5}{8}$, par les équations $\Gamma\frac{1}{8}\,\Gamma\frac{7}{8} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{8}\pi}$, $\Gamma\frac{3}{8}\,\Gamma\frac{5}{8} = \frac{\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi}$. Enfin l'application de la formule $\Gamma(1+a) = a\Gamma a$, fera connaître les valeurs de $\Gamma(1+\frac{1}{8})$, $\Gamma(1+\frac{3}{8})$, $\Gamma(1+\frac{5}{8})$, $\Gamma(1+\frac{7}{8})$, et du tout on formera le tableau additionnel qui suit :

a.	$\log \Gamma a$.	$\log \Gamma(1+a)$.
$\frac{1}{8}$	0.87702 22493 3974	9.97393 22623 4780
$\frac{3}{8}$	0.37482 82679 7441	9.94885 95357 0213
$\frac{5}{8}$	0.15670 62587 9878	9.95258 62761 4286
$\frac{7}{8}$	0.03728 79627 7131	9.97929 60157 9362

115. Après avoir développé fort au long le cas de $n=12$, et celui de $n=8$, nous prendrons encore pour exemple quelques autres valeurs de n; mais ne voulant point entrer dans le détail des solutions effectives, nous nous contenterons d'en démontrer la possibilité, et à cet effet nous ferons usage des mêmes signes d'abréviation que ci-dessus.

Soit d'abord $n=24$, et soit désignée par (x) la quantité $\log \Gamma\left(\frac{x}{24}\right)$: on connaît déjà, par le cas de $n=12$, les réductions qui ont lieu entre les termes de rang pair (2), (4), (6), (8), (10), puisqu'en général l'expression $(2k)$ désigne $l\Gamma\left(\frac{2k}{24}\right)$, qui est la même chose que $l\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$. Ainsi en appliquant les résultats trouvés dans le cas de $n=12$, on aura entre les cinq transcendantes dont il s'agit, ces trois équations :

$$\begin{aligned}(6) &= (2) - \tfrac{1}{2}(4) + d,\\ (8) &= \tfrac{1}{2}(4) + d,\\ (10) &= (2) - (4) + d.\end{aligned}$$

Pour obtenir d'autres réductions, on fera d'abord dans l'équation (D) les substitutions $x=\frac{1}{24}$, $x=\frac{3}{24}$, $x=\frac{5}{24}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
(1) + (13) - (2) &= d,\\
(3) + (15) - (6) &= d,\\
(5) + (17) - (10) &= d.
\end{aligned}$$

Mettant dans ces équations, au lieu des termes (13), (15), (17), leurs complémens —(11), —(9), —(7), on en tirera

$$\begin{aligned}
(11) &= (1) - (2) + d,\\
(9) &= (3) - (6) + d,\\
(7) &= (5) - (10) + d.
\end{aligned}$$

Ces équations font voir que sur les six transcendantes (1), (3), (5), (7), (9), (11), il suffit d'en connaître trois.

Mais de plus, l'équation (E) fournira de nouvelles réductions, en y substituant les valeurs $x = \frac{1}{24}$, $x = \frac{3}{24}$, toutes deux plus petites que $\frac{1}{6}$; cette substitution donne deux équations qui, au moyen des termes complémentaires, deviennent

$$\begin{aligned}
(1) + (9) - (7) - (3) &= d,\\
(3) + (11) - (5) - (9) &= d.
\end{aligned}$$

Celles-ci, en vertu des relations déjà trouvées, se réduisent à une seule, qui donne

$$(5) = (1) - (2) + (6) + d.$$

Cela posé, on voit que les deux transcendantes (1) et (3) de numéro impair, et les deux (2), (4) de numéro pair, suffisent pour déterminer toutes les autres, puisqu'on a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
(5) &= (1) - \tfrac{1}{2}(4) + d,\\
(7) &= (1) - (2) + \tfrac{1}{2}(4) + d,\\
(9) &= (3) - (2) + \tfrac{1}{2}(4) + d,\\
(11) &= (1) - (2) + d.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas de $n = 24$, les quatre transcendantes $\Gamma\frac{1}{24}$, $\Gamma\frac{2}{24}$, $\Gamma\frac{3}{24}$, $\Gamma\frac{4}{24}$ suffisent pour déterminer toutes celles qui sont comprises dans la même série, jusqu'à $\Gamma\frac{23}{24}$.

116. Considérons enfin le cas de $n = 60$, et proposons-nous de trouver combien il faut de termes de la suite $\Gamma\frac{1}{60}, \Gamma\frac{2}{60} \ldots \Gamma\frac{59}{60}$, pour déterminer tous les autres, et quels sont ces termes.

Désignant toujours $\log\Gamma\frac{k}{60}$ par (k), on pourra d'abord considérer les termes où k est un multiple de 5, et appliquer à ces termes les formules trouvées pour le cas de $n = 12$, ce qui donnera

$$
\begin{aligned}
(15) &= (5) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(20) &= \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(25) &= (5) - (10) + d.
\end{aligned}
$$

Ainsi les deux termes (5) et (10) suffisent pour déterminer toutes les transc dantes (k), dans lesquelles k est un multiple de 5.

Si l'on considère séparément les termes où k est pair, on aura, par l'a plication des équations (D) et (C), les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (4) - (8) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= (8) - (16) + d,\\
(18) &= (12) - (24) + d,\\
(16) &= (14) - (28) + d.
\end{aligned}
$$

On trouvera ensuite, au moyen des équations (E) et (C),

$$
\begin{aligned}
(2) + (22) - (18) - (6) &= d,\\
(4) + (24) - (16) - (12) &= d,\\
(6) + (26) - (14) - (18) &= d,\\
(8) + (28) - (12) - (24) &= d.
\end{aligned}
$$

Ces quatre équations, combinées avec les six qui précèdent, offrent de coïncidences, et ne déterminent que huit quantités, savoir :

$$
\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (2) - (6) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= 2(12) - (2) + d,\\
(18) &= 2(12) - (6) + d,\\
(16) &= (4) + (6) - 2(12) + d,\\
(14) &= (2) + (6) - 2(12) + d,\\
(8) &= (6) + (4) - (2) + d;
\end{aligned}
$$

d'où l'on voit que les quatre quantités (2), (4), (6), (12) suffisent pour d terminer tous les termes (k), dans lesquels k est pair et non divisible par 5.

Enfin l'application des équations (F) et (C) donne

$$
\begin{aligned}
(2) + (14) + (26) - (22) - (10) - (10) &= d,\\
(4) + (16) + (28) - (20) - (8) - (20) &= d,
\end{aligned}
$$

et ces deux-ci se réduisent à une seule, savoir :

$$(12) = (2) - \tfrac{1}{2}(10) + d;$$

d'où il suit que tous les termes (k) où k est pair, pourront s'exprimer au moyen des quantités (2), (4), (6), (10).

117. Venons maintenant aux quantités où k est impair. On aura, par l'application des équations (D) et (C), ces six conditions :

$$\begin{aligned}
(29) &= (1) - (2) + d,\\
(27) &= (3) - (6) + d,\\
(23) &= (7) - (14) + d,\\
(21) &= (9) - (18) + d,\\
(19) &= (11) - (22) + d,\\
(17) &= (13) - (26) + d.
\end{aligned}$$

Ensuite les équations (E) et (C) en fourniront quatre, savoir :

$$\begin{aligned}
(1) + (21) - (19) - (3) &= d,\\
(3) + (23) - (17) - (9) &= d,\\
(7) + (27) - (13) - (21) &= d,\\
(9) + (29) - (11) - (27) &= d.
\end{aligned}$$

Mais ces quatre conditions se réduisent aux deux suivantes :

$$\begin{aligned}
(11) &= (1) + (9) - (2) - (3) + (6) + d,\\
(13) &= (3) + (7) - (9) + 2(2) - 2(6) - (10) + d.
\end{aligned}$$

Enfin l'équation (F) donnera deux conditions qui, en vertu des relations déjà trouvées, se réduisent à une seule, savoir :

$$(9) = (3) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d.$$

De là on voit qu'avec les quatre données impaires (1), (3), (5), (7), jointes aux quatre données paires (2), (4), (6), (10), on pourra achever de déterminer toutes les transcendantes désignées par (k). On aura en effet, pour les termes impairs, ces expressions :

$$\begin{aligned}
(9) &= (3) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(11) &= (1) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(13) &= (7) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(15) &= (5) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(17) &= (7) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(19) &= (1) - (2) + \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(21) &= (3) - (2) + \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(23) &= (7) + (2) - (6) - (10) + d,\\
(25) &= (5) - (10) + d,\\
(27) &= (3) - (6) + d,\\
(29) &= (1) - (2) + d.
\end{aligned}$$

Quant aux termes où k est pair, nous avons donné ci-dessus leur expressi où il ne reste plus à substituer que la valeur $(12) = (2) - \frac{1}{2}(10) + d$.

118. Remarquons que le nombre des transcendantes nécessaires pour terminer toutes les autres, étant nommé N, on aura

$$\begin{aligned} &\text{pour } n = 12, \quad N = 2 = \tfrac{12}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right), \\ &\text{pour } n = 24, \quad N = 4 = \tfrac{24}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right), \\ &\text{pour } n = 60, \quad N = 8 = \tfrac{60}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1-\tfrac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Dans cette formation du nombre N, le facteur $\frac{1}{2}$ est dû à l'équation (C) facteur $(1-\frac{1}{2})$ à l'équation (D), le facteur $(1-\frac{1}{3})$ à l'équation (E), et le f teur $(1-\frac{1}{5})$ à l'équation (F).

En général, si α, β, γ, etc., sont les nombres premiers inégaux qui di sent N, on aura

$$N = \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right), \text{ etc.},$$

nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à n et moindı que $\frac{1}{2}n$.

Cette loi a été vérifiée dans plusieurs autres exemples, et il y a li de croire qu'elle est vraie en général; d'où il suit qu'étant donné ı nombre quelconque n, on peut trouver immédiatement combien il fa de termes de la suite $\Gamma\frac{1}{n}, \Gamma\frac{2}{n}, \Gamma\frac{3}{n} \ldots \Gamma\frac{n-1}{n}$, pour déterminer tous l autres.

Ainsi si l'on voulait construire avec le moins de données possible, uı table des fonctions Γa pour toutes les valeurs de a, de millième en milliėm depuis $a = 0.001$ jusqu'à $a = 1.000$, on pourrait le faire en supposaı connu un nombre de termes de cette suite $= 500 . \frac{1}{2} . \frac{4}{5} = 200$. Si au li de donner aux valeurs successives de a, le dénominateur commun 100 on leur donnait le dénominateur 1050, qui a pour facteurs premiers 3, 5, 7, le nombre des termes nécessaires serait $\frac{1050}{2} . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{4}{5} . \frac{6}{7} = 12$ Ainsi il ne faudrait que 120 termes pour en déterminer algébriquemeı 1050, et la Table ne serait guère moins facile à interpoler que dans l'aut cas.

119. On sait de cette manière combien il faut de transcendantes poı déterminer toutes les autres; mais il n'est pas aussi facile de prévoir quell sont, pour chaque valeur de n, ces transcendantes. Dans le cas de $n=6$ on aurait pu penser que ces quantités, dont le nombre est fixé à huit, poı vaient être les huit premiers termes de la suite $\Gamma\frac{1}{60}, \Gamma\frac{2}{60}, \Gamma\frac{3}{60}$, etc

mais le calcul a fait voir que la fonction $\Gamma\,\frac{8}{60}$ doit être exclue comme étant déterminée par les précédentes, au moyen de l'équation $(8)=(6)+(4)-(2)+d$. Cette circonstance a forcé de prendre pour huitième terme la fonction $\Gamma\,\frac{10}{60}$. Au reste, le problème qu'on a résolu par les huit fonctions mentionnées, pourrait l'être de beaucoup d'autres manières, c'est-à-dire qu'une ou plusieurs de ces fonctions pourraient être remplacées par d'autres en nombre égal; ce qui ferait toujours huit transcendantes par lesquelles on déterminerait toutes les autres.

120. Nous remarquerons encore que les équations que nous avons trouvées pour les cas de $n=12$, $n=24$, $n=60$, et toutes celles qu'on trouverait de même pour d'autres valeurs de n, sont autant de théorèmes qui établissent des réductions plus ou moins remarquables entre les fonctions Γ.

Par exemple, l'équation $(12)=(2)-\frac{1}{2}(10)+d$, obtenue dans le cas de $n=60$, est l'expression abrégée de ce théorème

$$\Gamma\,\tfrac{1}{5}=\Gamma\,\tfrac{1}{30}\,.\,(\Gamma\,\tfrac{1}{6})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{P},$$

P étant une fonction donnée de π et de quantités algébriques. Il est même facile de voir, *à priori*, de quelle manière π doit entrer dans cette fonction.

En effet, si dans les équations (C), (D), (E), etc., on fait $\Gamma x=\pi^{1-x}\,\Phi(x)$, Φ étant une nouvelle fonction, on trouvera que π disparaît entièrement de ces équations, de sorte que la quantité $\pi^{x-1}\,\Gamma x$ devra être indépendante de π dans tous les résultats qu'on tirera de ces équations.

Dans l'exemple précédent on a $\frac{4}{5}-\frac{29}{30}+\frac{1}{2}.\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$; donc

$$\Gamma\,\tfrac{1}{5}=\Gamma\,\tfrac{1}{30}\,(\Gamma\,\tfrac{1}{6})^{-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Q},$$

Q étant une fonction purement algébrique qui ne doit plus contenir π. Pour trouver cette fonction algébrique, il faudrait développer tout au long les équations qui ont conduit à l'expression abrégée $(12)=(2)-\frac{1}{2}(10)+d$, comme nous l'avons fait dans le cas de $n=12$.

CHAPITRE XIII.

Propriétés générales des Coefficiens différentiels de la fonc *log* Γx.

121. D'APRÈS le théorème de l'art. 29, si l'on fait

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1}=\mathrm{V}\,,\quad \int\frac{x^{p-1}\,dx\,(1-x^{q})}{1-x}=\mathrm{T}\,,$$

on aura

$$\frac{d\mathrm{V}}{dp}=-\,\mathrm{VT},\quad\text{ou}\quad \frac{d\log \mathrm{V}}{dp}=-\,\mathrm{T}.$$

Mais par l'équation (3) on a $\mathrm{V}=\frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}$, ou $\log \mathrm{V}=l\Gamma p+l\Gamma q-l\Gamma(p+$ donc

$$\frac{dl\Gamma\,(p+q)}{d(p+q)}-\frac{dl\Gamma p}{dp}=\mathrm{T}=\int\frac{x^{p-1}dx\,(1-x^{q})}{1-x}.$$

Mettant r au lieu de $p+q$, on aura l'équation

$$\frac{d\log\Gamma r}{dr}-\frac{d\log\Gamma p}{dp}=\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^{p}-x^{r}}{1-x}\,, \qquad ($$

à laquelle on peut donner aussi la forme

$$\frac{d\log\Gamma(1+r)}{dr}-\frac{d\log\Gamma(1+p)}{dp}=\int\frac{(x^{p}-x^{r})\,dx}{1-x}:$$

l'intégrale du second membre est prise à l'ordinaire entre les limites $x=$ $x=1$.

122. Soit $p=0$ et $r=a$, le coefficient différentiel $\frac{dl\Gamma(1+p)}{dp}$ se r duira $-$C d'après la formule (18); ainsi on aura

$$\frac{dl\Gamma\,(1+a)}{da}=-\,\mathrm{C}+\int\frac{(1-x^{a})\,dx}{1-x}: \qquad (3$$

c'est l'expression du premier coefficient différentiel de la fonction $\log\Gamma(1+$ Ce coefficient pourra se déterminer exactement lorsque a sera un nomb rationnel, puisque sa valeur est composée de la constante connue $-$ C d'une intégrale définie qui ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes.

Soit alors $a=\frac{m}{n}$, et soit $x=y^n$, on aura

$$\int\frac{(1-x^a)dx}{1-x}=\int\frac{ny^{n-1}dy\,(1-y^m)}{1-y^n}=\frac{n}{m}y^m-n\int\frac{dy}{y}\cdot\frac{y^m-y^n}{1-y^n}.$$

Cette dernière intégrale étant désignée par B_m, on aura

$$\int\frac{(1-x^a)\,dx}{1-x}=\frac{n}{m}-nB_m;$$

par conséquent pour toute valeur rationnelle $a=\frac{m}{n}$, le coefficient différentiel $\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}$ aura pour expression

$$\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}=-C+\frac{1}{a}-nB_m,$$

ce qui donne aussi

$$\frac{dl\Gamma a}{da}=-C-nB_m.$$

Quant à la valeur de B_m, on trouve par les formules connues que son expression générale est, en faisant $\omega=\frac{\pi}{n}$:

$$B_m=\frac{1}{2}\omega\cot m\omega+\frac{1}{n}\log n-\frac{2}{n}\cos 2m\omega\log(2\sin\omega)-\frac{2}{n}\cos 4m\omega\log(2\sin 2\omega)-\text{etc.},$$

le dernier terme devant être $-\frac{2}{n}\cos(n-1)m\omega\log\left(2\sin\frac{n-1}{2}\omega\right)$, si n est impair, et $-\frac{1}{n}\cos m\pi\log 2$, si n est pair; mais il faut observer que cette valeur suppose $m<n$. Dans le cas contraire, il faudrait séparer de la différentielle $\frac{dy}{y}\cdot\frac{y^m-y^n}{1-y^n}$, la partie entière qu'elle contient, et l'intégrer dans les limites $y=0$, $y=1$. Le reste de cette différentielle représenté par $\frac{dy}{y}\cdot\frac{y^\mu-y^n}{1-y^n}$, aurait pour intégrale la quantité B_μ.

La même opération peut être faite d'une autre manière, en diminuant successivement la valeur de a jusqu'à ce qu'elle devienne plus petite que l'unité. On a pour cet effet les formules $\Gamma(1+a)=a\Gamma a$, $\Gamma(2+a)=(1+a)a\Gamma a$, etc., d'où l'on tire

$$\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}=\frac{1}{a}+\frac{dl\Gamma a}{da},$$

$$\frac{dl\Gamma(2+a)}{da}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{a}+\frac{dl\Gamma a}{da},$$

etc.

123. Si on désigne par $\varphi(a)$ la somme de la suite harmonique..... $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{a}$, on aura par l'art. 82,

$$\varphi(a)=\mathrm{C}+\frac{1}{a}+\frac{d\log a}{da}=\mathrm{C}+\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da}.$$

La fonction $\varphi(a)$ sera donc aussi exprimée par l'intégrale définie

$$\varphi(a)=\int\frac{(1-x^a)\,dx}{1-x}. \tag{34}$$

Cette expression se vérifie immédiatement lorsque a est un nombre entier. En effet, dans ce cas on aura

$$\frac{1-x^a}{1-x}\,dx=(1+x+x^2\ldots\ldots+x^{a-1})\,dx,$$

et l'intégrale de ce polynome, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, donne la suite $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{a}$ désignée par $\varphi(a)$.

Ce résultat étendu à toutes les valeurs de a, en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(a)$, aurait suffi pour donner l'expression de $\varphi(a)$ en intégrale définie, et de là celle du coefficient différentiel $\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}$, qu'on aurait trouvée ainsi sans le secours du théorème de l'art. 29.

124. Il résulte de la formule précédente que, toutes les fois que le nombre a sera rationnel, la somme $\varphi(a)$ de la série harmonique pourra être exprimée par le moyen des arcs de cercle et des logarithmes, ce qui est un théorème assez remarquable.

Pour avoir la valeur effective de $\varphi(a)$ dans le cas dont il s'agit, on observera d'abord que par la nature de cette fonction, on a

$$\varphi(a)=\frac{1}{a}+\varphi(a-1);$$

d'où il suit que la détermination de la fonction $\varphi(a)$ se réduira toujours à celle d'une pareille fonction dans laquelle a sera plus petit que l'unité.

Soit alors, $a=\frac{m}{n}$, m étant $<n$, et on aura, comme ci-dessus,

$$\varphi(a)=\frac{1}{a}-n\mathrm{B}_m.$$

Les cas les plus simples peuvent être calculés directement par le moyen de l'intégrale définie. Ainsi on trouve

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 - 2\int\frac{dy}{1+y} = 2 - 2\,l2,$$
$$\varphi\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3 - 3\int\frac{(1-y^2)\,dy}{1-y^3} = 3 - \tfrac{3}{2}\,l3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$
$$\varphi\left(\tfrac{1}{4}\right) = 4 - 4\int\frac{(1-y^3)\,dy}{1-y^4} = 4 - 3\,l2 - \tfrac{1}{2}\,\pi.$$

Lorsque a est infiniment petit, on aura

$$\varphi(a) = \int\frac{(1-x^a)\,dx}{1-x} = a\int\frac{dx\,l\frac{1}{x}}{1-x} = a\,\frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur se déduirait aussi de la formule

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{dd\log\Gamma(1+a)}{da^2},$$

dont le second membre se réduit à S_2 ou $\frac{\pi^2}{6}$ lorsque $a = 0$ (art. 18).

La fonction $\varphi(a)$ décroît donc continuellement depuis $a = 1$ jusqu'à $a = 0$; elle est égale à 1 dans la première limite, et à zéro dans la seconde.

Nous remarquerons qu'Euler a donné la valeur de $\varphi(\frac{1}{2})$ dans son Calcul différentiel, page 814, mais d'après une suite infinie qu'il ne somme que dans ce cas particulier.

125. Si l'on différencie logarithmiquement les équations (C), (D), (E), etc., on aura diverses relations entre les coefficiens différentiels de même ordre de la fonction $\Gamma(x)$. Et d'abord l'équation (C) donne

$$\frac{dl\,\Gamma a}{da} - \frac{dl\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)} = -\pi\cot a\pi. \tag{35}$$

Ainsi le coefficient différentiel $\frac{dl\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)}$ peut se déduire du coefficient différentiel $\frac{dl\,\Gamma a}{da}$, que nous regardons comme son complément.

Cette équation fait connaître la différence de deux coefficiens qui sont complémens l'un de l'autre, et elle a l'avantage de donner cette différence pour toute valeur de a rationnelle ou irrationnelle.

L'équation (32) donnerait pour la même différence, cette valeur

$$\frac{dl\,\Gamma a}{da} - \frac{dl\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)} = \int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^{1-a}-x^a}{1-x};$$

donc on a

$$\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^a-x^{1-a}}{1-x} = \pi\cot a\pi, \tag{36}$$

formule qui a lieu pour toute valeur de a, et qu'il est aisé de vérifier lorsque a est rationnel. Cette formule s'accorde entièrement avec celle du n° 35.

126. Différenciant de même l'équation (D), et changeant x en a, on aura

$$\frac{dl\Gamma a}{da}+\frac{dl\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{d(\frac{1}{2}+a)}-\frac{2dl\Gamma(2a)}{d(2a)}=-2l2.$$

Le premier membre se compose de deux différences qui se déterminent par l'équation (32), et dont les valeurs sont

$$\frac{dl\Gamma a}{da}-\frac{dl\Gamma(2a)}{d(2a)}=\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^{2a}-x^a}{1-x},$$
$$\frac{dl\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{d(\frac{1}{2}+a)}-\frac{dl\Gamma(2a)}{d(2a)}=\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^{2a}-x^{\frac{1}{2}+a}}{1-x}.$$

Donc en faisant les substitutions, on aura la formule

$$\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^a+x^{\frac{1}{2}+a}-2x^{2a}}{1-x}=2l2.$$

De l'équation (E) on déduirait semblablement la formule

$$\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{x^a+x^{\frac{1}{3}+a}+x^{\frac{2}{3}+a}-3x^{3a}}{1-x}=3l3,$$

et ainsi des autres.

Ces formules peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\int x^{a-1}dx.\frac{1+x-2x^a}{1-x^2}=l2,$$
$$\int x^{a-1}dx.\frac{1+x+x^2-3x^{2a}}{1-x^3}=l3,$$
$$\int x^{a-1}dx.\frac{1+x+x^2+x^3-4x^{3a}}{1-x^4}=l4,$$

et l'on peut remarquer qu'elles sont toutes contenues dans la formule générale

$$\int\left(\frac{x^{a-1}dx}{1-x}-\frac{nx^{na-1}dx}{1-x^n}\right)=ln. \tag{37}$$

127. Ce résultat est facile à vérifier lorsque a est un nombre entier. En effet, appelons $F(a)$ le premier membre de l'équation précédente; si à la place de a on met $a+1$, on aura

$$F(a+1)=\int\left(\frac{x^a dx}{1-x}-\frac{nx^{na+n-1}dx}{1-x^n}\right).$$

Mais on a $\int\frac{x^a dx}{1-x}=-\frac{x^a}{a}+\int\frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ et $\int\frac{nx^{na+n-1}dx}{1-x^n}=-\frac{x^{na}}{a}+\int\frac{nx^{na-1}dx}{1-x^n}$.

Faisant $x=1$ dans les parties hors du signe, et retranchant une intégrale de l'autre, on aura $F(a+1)=F(a)$, et par conséquent $F(a)=F(1)$. Mais lorsque $a=1$, on a

$$F(1)=\int\left(\frac{dx}{1-x}-\frac{nx^{n-1}dx}{1-x^n}\right)=l\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

faisant ensuite $x=1$, on aura $F(1)=ln$; donc $F(a)=ln$. La formule générale est donc démontrée lorsque a est un nombre entier.

128. Supposons maintenant $a=\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers, si l'on fait $x=y^q$, on aura

$$F(a)=\int\left(\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}-\frac{nqy^{np-1}dy}{1-y^{nq}}\right),$$

intégrale qui devra toujours être prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$.

Si l'on faisait $y^n=z$, la valeur de $F(a)$ pourrait se mettre sous la forme

$$F(a)=\int\left(\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}-\frac{qz^{p-1}dz}{1-z^q}\right),$$

c'est-à-dire que F serait la différence de deux intégrales de même forme et prises entre les mêmes limites; d'où il semble qu'on devrait conclure que F est nulle. Mais il faut observer que les intégrales dont il s'agit sont toutes deux infinies, et que leur différence, qui peut être finie, dépend de la relation qui existe entre z et y, et ne peut être trouvée que lorsqu'on aura écarté les infinis de part et d'autre.

Pour cela, je remarque que p et q étant toujours supposés des nombres entiers, on a, par les règles de la décomposition des fractions rationnelles,

$$\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}=\frac{dy}{1-y}+\frac{Mdy}{N},$$

N étant un dénominateur qui ne s'évanouit pas lorsque $y=1$. On aura donc l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}=-l(1-y)+f(y),$$

$f(y)$ étant une fonction de y exprimée en arcs de cercle et logarithmes, laquelle est nulle lorsque $y=0$, et ne devient pas infinie lorsque $y=1$. On aura semblablement

$$\int\frac{qz^{p-1}dz}{1-z^q}=-l(1-z)+f(z),$$

$f(z)$ étant la même fonction de z que $f(y)$ est de y. De là résulte l'intégrale indéfinie

$$F = l\left(\frac{1-z}{1-y}\right) + f(y) - f(z);$$

ou, en mettant y^n à la place de z,

$$F = l\left(\frac{1-y^n}{1-y}\right) + f(y) - f(y^n).$$

Maintenant si l'on fait $y = 1$, comme on peut préalablement mettre $\frac{1-y^n}{1-y}$ sous la forme $1 + y + y^2 \ldots + y^{n-1}$, on aura la valeur cherchée

$$F(a) = ln,$$

de sorte que la formule générale est démontrée *à priori* pour toute valeur rationnelle de a.

129. Considérons encore l'intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$T = \int\left(\frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} + \frac{x^{m-1}\,dx}{\log x}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1; \end{array}\right.$$

si on la met sous cette forme composée de trois parties

$$T = \int\left(\frac{x^{a-1}-1}{1-x}\right)dx + \int(1-x^{m-1})\frac{dx}{l\frac{1}{x}} + \int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right),$$

la première partie en vertu de l'équation (33)... $= -C - Z'a$, la seconde $= \log m$; il reste donc à trouver la troisième partie

$$V = \int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right),$$

et on aura $T = -C - Z'a + \log m + V$.

Lorsque n est très grand, on a $Z'(1+n) = \log n$, et par conséquent $\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = C + \log n$. Mais la formule (37) donne en général

$$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{nx^{n-1}\,dx}{1-x^n}\right) = \log n;$$

donc

$$\int\left(\frac{nx^{n-1}\,dx}{1-x^n} - \frac{x^n\,dx}{1-x}\right) = C.$$

Mettant $x^{\frac{1}{n}}$ au lieu de x, les limites de l'intégrale seront les mêmes, et on aura

$$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n}}\,dx}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right) = C;$$

Mais n étant infiniment grand, on a $x^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}\log\frac{1}{x}$, donc

$$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{\mathcal{L}\frac{1}{x}}\right) = \mathrm{C},$$

c'est la valeur de l'intégrale V, telle qu'elle a été donnée par Euler (*Nova Acta Petrop.*, tome IV).

Si on la substitue dans la valeur de T, on aura

$$\int\left(\frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} - \frac{x^{m-1}\,dx}{l\frac{1}{x}}\right) = \log m - Z'a.$$

130. Pour revenir à la fonction $\frac{d\,l\Gamma a}{da}$, que nous pouvons représenter par $Z'(a)$, on voit que les équations (C), (D), (E), etc., ne font connaître aucune propriété particulière de cette fonction, et qu'elles conduisent seulement à des formules relatives aux intégrales définies. Il ne reste par conséquent à considérer d'autre propriété de cette fonction, que celle qui est contenue dans l'équation (32), et qui consiste en ce que, toutes les fois que a sera rationnel, la fonction $Z'(a)$ pourra toujours s'exprimer par la constante $-\mathrm{C}$ jointe à une quantité qu'on peut toujours évaluer par arcs de cercle et par logarithmes.

Nous avons traité fort au long des réductions qui peuvent avoir lieu entre les fonctions $\log \Gamma a$ ou $Z(a)$, lorsqu'on donne à la racine a les valeurs successives $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$. Un semblable problème n'a point lieu relativement aux fonctions $Z'(a)$, puisqu'elles sont toutes déterminables, ainsi qu'on vient de le dire. Passons donc aux coefficiens différentiels du second ordre $\frac{dd\,l\Gamma a}{da^2}$, que nous désignerons semblablement par $Z''(a)$.

131. L'équation (32) étant différenciée par rapport à p, donne, en mettant a au lieu de p,

$$\frac{dd\,l\Gamma a}{da^2} = \int \frac{x^{a-1}dx\; l\frac{1}{x}}{1-x}.$$

Développant la différentielle du second membre en série, et intégrant les différens termes d'après la formule de l'art. 31, on aura

$$\frac{dd\,l\Gamma a}{da^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \text{etc.}$$

Cette formule et celle qu'on pourrait en déduire par la différentiation, sont les mêmes qui ont été données dans l'art. 13; et comme on ne connaît aucun autre moyen d'obtenir l'intégrale $\int \frac{x^{a-1}\,dx\,l\frac{1}{x}}{1-x}$, il ne résultera de l'équation (32) aucune propriété des fonctions $Z''(a)$.

132. L'équation (35) étant différenciée, donne

$$Z''(a) + Z''(1-a) = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}, \tag{38}$$

d'où l'on voit que la fonction $Z''(1-a)$ se détermine par la fonction $Z''(a)$, qui en est le complément.

Lorsque $a = \frac{1}{2}$, la formule précédente donne $Z''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\pi^2$. Lorsque $a = 1$, on a $Z''(1) = \frac{1}{6}\pi^2$; en effet, la valeur générale de $Z''(a)$ étant

$$Z''(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(2+a)^2} + \text{etc.},$$

cette quantité, dans le cas dont il s'agit, se réduit à S_2 ou $\frac{\pi^2}{6}$. C'est aussi ce qu'on déduirait des formules

$$\begin{aligned} Z'(1+a) &= -C + S_2 a - S_3 a^2 + S_4 a^3 - \text{etc.},\\ Z''(1+a) &= S_2 - 2S_3 a + 3S_4 a^2 - \text{etc.}, \end{aligned}$$

en faisant $a = 0$.

Pour avoir d'autres propriétés de la fonction $Z''(a)$, on prendra la différentielle seconde logarithmique de l'équation (D), ce qui donnera

$$Z''(a) + Z''(\tfrac{1}{2}+a) - 4Z''(2a) = 0; \tag{39}$$

de même la différentielle seconde des équations (E) et (F) donnerait

$$\left.\begin{aligned} &Z''(a) + Z''(\tfrac{1}{3}+a) + Z''(\tfrac{2}{3}+a) - 9Z''(3a) = 0,\\ &Z''(a) + Z''(\tfrac{1}{5}+a) + Z''(\tfrac{2}{5}+a) + Z''(\tfrac{3}{5}+a) + Z''(\tfrac{4}{5}+a) - 25Z''(5a) = 0: \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

ce sont les mêmes équations qui ont servi à démontrer les équations (D), (E), (F), etc.

Il résulte de ces équations, qu'on peut faire sur les fonctions Z'' les mêmes réductions qui ont lieu pour les fonctions Γ, c'est-à-dire que si l'on considère les fonctions successives $Z''\left(\frac{1}{n}\right)$, $Z''\left(\frac{2}{n}\right) \ldots\ldots Z''\left(\frac{n-1}{n}\right)$, ces fonctions se détermineront par le moyen d'un certain nombre d'entre elles, et ce nombre sera en général le même que celui des nombres premiers à n et plus petits que $\frac{1}{2}n$. Ainsi, dans le cas de $n = 12$, deux des transcendantes

$Z''(\frac{1}{12})$, $Z''(\frac{2}{12})\ldots.Z''(\frac{11}{12})$, suffiront pour déterminer toutes les autres: ces deux transcendantes se trouveront d'ailleurs par la même méthode qui a été employée à l'égard des fonctions Γ.

133. En effet, si l'on désigne, pour abréger, la fonction $Z''\left(\frac{k}{12}\right)$ par (k), l'équation (38) donnera, en faisant $\frac{\pi}{12}=\omega$,

$$\begin{aligned}
(1)+(11)&=\frac{\pi^2}{\sin^2\omega}=4\pi^2(2+\sqrt{3}),\\
(2)+(10)&=4\pi^2,\\
(3)+(9)&=2\pi^2,\\
(4)+(8)&=\tfrac{4}{3}\pi^2,\\
(5)+(7)&=\frac{\pi^2}{\sin^2 5\omega}=4\pi^2(2-\sqrt{3}),\\
(6)&=\tfrac{1}{2}\pi^2;
\end{aligned}$$

on aura ensuite, par l'équation (39), les deux conditions

$$\begin{aligned}
(1)+(7)-4(2)&=0,\\
(2)+(8)-4(4)&=0,
\end{aligned}$$

et par l'équation (40), cette autre condition,

$$(1)+(5)+(9)-9(3)=0.$$

Ces neuf équations permettront de déterminer toutes les transcendantes dont il s'agit, par le moyen de deux d'entre elles. Par exemple, si l'on prend pour données $Z''(\frac{1}{12})$ et $Z''(\frac{2}{12})$, que nous désignons par (1) et (2), les autres transcendantes se détermineront ainsi:

$$\begin{aligned}
(3)&=\tfrac{1}{5}(1)-\tfrac{2}{5}(2)+\pi^2(1-\tfrac{2}{5}\sqrt{3}),\\
(4)&=\tfrac{1}{5}(2)+\tfrac{4}{15}\pi^2,\\
(5)&=(1)-4(2)+4\pi^2(2-\sqrt{3}),\\
(6)&=\tfrac{1}{2}\pi^2,\\
(7)&=4(2)-(1),\\
(8)&=-\tfrac{1}{5}(2)+\tfrac{16}{15}\pi^2,\\
(9)&=\tfrac{2}{5}(2)-\tfrac{1}{5}(1)+\pi^2(1+\tfrac{2}{5}\sqrt{3}),\\
(10)&=-(2)+4\pi^2,\\
(11)&=-(1)+4\pi^2(2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Il ne reste, pour la détermination absolue de ces quantités, qu'à connaître $Z''(\frac{1}{12})$ et $Z''(\frac{2}{12})$. Pour cela, il faudrait pouvoir sommer les suites que ces quantités représentent, savoir:

$$Z''\left(\frac{1}{12}\right) = 144\left(1 + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{37^2} + \text{etc.}\right),$$
$$Z''\left(\frac{2}{12}\right) = 36\left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}\right).$$

On pourrait aussi déterminer ces quantités par les intégrales définies

$$Z''\left(\frac{1}{12}\right) = 144\int \frac{dx\, l\frac{1}{x}}{1-x^{12}},$$
$$Z''\left(\frac{2}{12}\right) = 36\int \frac{dx\, l\frac{1}{x}}{1-x^{6}}.$$

Mais la difficulté d'exprimer ces intégrales autrement que par les séries précédentes, rend ces expressions peu utiles.

Lorsqu'on voudra obtenir ces valeurs par approximation, on y parviendra aisément par la formule de l'art. 37.

134. Considérons maintenant le troisième coefficient $Z'''(a) = \frac{d^3\, l\Gamma a}{da^3}$; on aura d'abord, par l'équation (C),

$$Z'''(a) - Z'''(1-a) = -\frac{2\pi^3 \cos a\pi}{\sin^3 a\pi}, \qquad (41)$$

ce qui détermine la fonction $Z'''(1-a)$ par son complément $Z'''(a)$.

On a ensuite, par les équations (D), (E), etc.,

$$Z'''(a) + Z'''(\tfrac{1}{2}+a) - 8Z'''(2a) = 0,$$
$$Z'''(a) + Z'''(\tfrac{1}{3}+a) + Z'''(\tfrac{2}{3}+a) - 27Z'''(3a) = 0,$$

et ainsi de suite; ce qui établit les mêmes réductions entre les fonctions $Z'''(a)$ qu'on a obtenues entre les fonctions $Z''(a)$.

Le cas de $a = 1$ donne, par les formules de l'art. 132, $Z'''(1) = -2S_3$; si dans la première des deux équations précédentes on fait $a = \frac{1}{2}$, on aura $Z'''(\frac{1}{2}) = 7Z'''(1) = -14S_3$; enfin, dans le cas de $a = \frac{1}{3}$, on aura les deux équations

$$Z'''(\tfrac{1}{3}) - Z'''(\tfrac{2}{3}) = -\frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}},$$
$$Z'''(\tfrac{1}{3}) + Z'''(\tfrac{2}{3}) - 26Z'''(1) = 0,$$

ce qui détermine les deux transcendantes $Z'''(\frac{1}{3})$ et $Z'''(\frac{2}{3})$, par le moyen de $Z'''(1)$ ou de S_3.

Toutes ces solutions reviennent à celles que nous avons déjà données ou indiquées dans les art. 36 à 40 ; mais on voit plus clairement dans cette nouvelle méthode la série des opérations, et on connaît le nombre de transcendantes nécessaires à chaque solution, nombre qui a été fixé par la règle de l'art. 118.

CHAPITRE XIV.

Divers exemples d'interpolation.

135. **Euler**, dans le chapitre XVII de son Calcul différentiel, a résolu divers problèmes d'interpolation par des suites infinies dont il ne donne la somme que pour le cas de $n = \frac{1}{2}$. Nous allons faire voir que ces interpolations peuvent être effectuées d'une manière plus simple et plus générale au moyen des fonctions Γ.

Exemple I. Supposons qu'il s'agisse d'interpoler la suite dont le $n^{ième}$ terme est $N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}$; la question est de savoir ce que deviendra N, lorsqu'on donnera à n une valeur fractionnaire quelconque.

Nous avons désigné (art. 123) ce terme général par $\varphi(n)$, et nous avons fait voir que $\varphi(n)$ est donné par la formule

$$\varphi(n) = \int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x},$$

cette intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On pourra donc déterminer $\varphi(n)$ par les arcs de cercle et les logarithmes, toutes les fois que n sera un nombre rationnel. Dans les autres cas, on déterminera $\varphi(n)$ par la suite

$$\varphi(n) = C + ln + \frac{1}{2n} - \frac{A'}{2n^2} + \frac{B'}{4n^4} - \frac{C'}{6n^6} + \text{etc.},$$

où A′, B′, C′, etc., désignent les nombres Bernoulliens. On pourra toujours faire en sorte que cette suite converge rapidement dans les premiers termes; car on a $\varphi(n) = \varphi(n+1) - \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\varphi(n)$ peut être déterminé par

$\varphi(n+k)$, k étant un entier qui pourra être pris assez grand pour que la série qui détermine $\varphi(n+k)$ ait les conditions requises.

156. *Exemple II.* Soit proposé d'interpoler la suite dont le terme général ou le $n^{ième}$ terme est

$$N=\frac{a+c}{a+b}+\frac{a+2c}{a+2b}+\frac{a+3c}{a+3b}\ldots\ldots+\frac{a+nc}{a+nb}.$$

Puisqu'on a $\frac{a+nc}{a+nb}=\frac{c}{b}+\frac{ab-ac}{bb\left(\frac{a}{b}+n\right)}$, on voit que ce cas se ramène au précédent, et que l'expression de N pour toute valeur de n, sera

$$N=\frac{c}{b}n+\frac{ab-ca}{bb}\left[\varphi\left(\frac{a}{b}+n\right)-\varphi\left(\frac{a}{b}\right)\right].$$

Ainsi on pourra déterminer N par les arcs de cercle et les logarithmes, toutes les fois que $\frac{a}{b}+n$ aura une valeur rationnelle.

157. *Exemple III.* Pour interpoler la suite dont le terme général $N=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}\ldots\ldots+\frac{1}{n^r}$, on pourra se servir de la formule

$$N=S_r+\frac{(-1)^{r-1}}{1.2.3\ldots.r-1}\cdot\frac{d^r l\Gamma(1+x)}{dx^r},$$

et appliquer les réductions propres à la fonction $\frac{d^r l\Gamma(1+x)}{dx^r}$, dans laquelle on fera $x=n$.

Dans les cas où cette fonction ne pourrait s'exprimer exactement en vertu de ces propriétés, il faudra, pour trouver la valeur de N, avoir recours à la série qui vient des différentiations répétées de la formule

$$\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}=-C+S_2x-S_3x^2+S_4x^3-\text{etc.}$$

Mais comme cette formule suppose $x<1$, il faudra préalablement ramener le cas proposé à celui où n est <1 ; ce qui n'a aucune difficulté, puisque N étant une fonction de n qu'on peut désigner par $f(n)$, on aura

$$f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n^r}.$$

158. *Exemple IV.* Soit proposé d'interpoler la suite dont le terme général $N=\frac{a+c}{a+b}\cdot\frac{a+2c}{a+2b}\cdot\frac{a+3c}{a+3b}\ldots\ldots\frac{a+nc}{a+nb}$.

Lorsque n est un nombre entier, on a

$$(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)=\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)}.$$

Donc le terme général N a pour expression

$$N=\left(\frac{c}{b}\right)^n\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{c}+1\right)},$$

valeur qui pourra être employée quel que soit n.

Si l'on propose, par exemple, la suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1.3}{2.4}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6}$, etc., son terme général sera

$$N=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma(n+1)}.$$

Ainsi pour l'indice $n=\frac{1}{2}$, on aura $N=\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{3}{2}}=\frac{2}{\pi}$, pour l'indice $n=\frac{1}{3}$, on aura $N=\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{4}{3}}=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}}$, valeur qui pourra se réduire ultérieurement par la relation connue entre $\Gamma\frac{1}{3}$ et $\Gamma\frac{5}{6}$.

Soit encore la suite $\frac{1}{3}$, $\frac{1.4}{3.6}$, $\frac{1.4.7}{3.6.9}$, etc., l'expression de son terme général sera

$$N=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma(n+1)}.$$

Ainsi pour l'indice $n=\frac{1}{2}$, on aura $N=\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}}$, pour l'indice $n=\frac{2}{3}$, on aura $N=\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{5}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{2}{3}}=\frac{3\sin\frac{1}{3}\pi}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

139. Il est bon d'observer que la question d'interpoler une suite donnée est susceptible d'une infinité de solutions, quand on l'envisage analytiquement et sans application à un objet déterminé. En effet, soit N le terme général de la suite donnée, terme dont la valeur est connue lorsque n est un entier, et soit $\Phi(n)$ la fonction continue égale à N, dans laquelle on peut mettre pour n un nombre quelconque entier ou fractionnaire; si au lieu de N on prend $\frac{N\sin(2n\pi+\alpha)}{\sin\alpha}$, α étant un angle quelconque, pourvu qu'il ne soit pas zéro, il est visible que la suite résultant de ce terme général ne différera pas de la suite donnée. On pourrait donc, au lieu de $\Phi(n)$, prendre $\Phi(n).\frac{\sin(2n\pi+\alpha)}{\sin\alpha}$, valeur qui différerait de $\Phi(n)$ lorsque n n'est pas entier. On pourrait même prendre plus généralement, au lieu de $\Phi(n)$, l'ex-

pression

$$\Phi(n).\frac{A + B\sin(2n\pi + \alpha) + C\sin(2n\pi + 6) + \text{etc.}}{A + B\sin\alpha + C\sin 6 + \text{etc.}},$$

et une infinité d'autres qui se réduisent à $\Phi(n)$ lorsque n est entier ; ce qui donnerait une infinité de solutions différentes de celle qui est donnée par la fonction continue $\Phi(n)$.

On pourrait appeler *fonctions ondulées*, les fonctions ainsi affectées d'un facteur qui se réduit à l'unité pour toute valeur entière de n. Ces fonctions serviraient à expliquer quelques paradoxes qui peuvent se rencontrer dans les applications de l'analyse.

CHAPITRE XV.

Des valeurs que prend la fonction Γa, *lorsque la racine* a *est négative.*

140. TANT que a est positif, on peut regarder la fonction Γa comme représentant l'aire, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, de la courbe dont l'ordonnée $y = \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$. Mais cette construction, en quelque sorte géométrique, ne peut donner aucune idée de ce que devient la fonction Γa, lorsqu'on suppose a négatif. Il faut suppléer à cette construction par les formules mêmes qui contiennent les propriétés générales de la fonction Γ, et auxquelles on donnera l'extension nécessaire. On liera ainsi, suivant une même loi, les fonctions $\Gamma(x)$, considérées comme les ordonnées d'une même courbe qui répondent à des abscisses quelconques x positives ou négatives.

Si l'on prend d'abord l'équation (B) et qu'on y change le signe de x, on aura

$$\Gamma(-x) = -\frac{1}{x}\Gamma(1 - x). \qquad (42)$$

Pour voir plus clairement l'usage de cette équation, nous distinguerons différentes périodes dans le sens négatif, comme nous les avons distinguées dans le sens positif. La première sera comprise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -1$, la seconde depuis $x = -1$ jusqu'à $x = -2$, ainsi de suite.

D'après l'équation précédente, on voit que la fonction $\Gamma(-x)$ est négative dans toute l'étendue de la première période, et qu'elle est infinie aux extrémités de cette période.

Si dans la même équation l'on met $1+x$ à la place de x, on aura

$$\Gamma(-1-x) = -\frac{1}{1+x}\Gamma(-x) = \frac{1}{x(1+x)}\Gamma(1-x);$$

d'où il suit que la fonction $\Gamma(-a)$ est positive dans la seconde période, depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$, et que dans ces deux limites, elle est infinie.

Mettant dans cette dernière éqqation $1+x$ au lieu de x, on aura encore

$$\Gamma(-2-x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}\Gamma(-x) = -\frac{\Gamma(1-x)}{x(1+x)(2+x)};$$

d'où il suit que la fonction $\Gamma(-a)$ est négative dans la troisième période, depuis $a=2$ jusqu'à $a=3$, et qu'elle est infinie dans ces deux limites.

En continuant ainsi, on voit que la fonction $\Gamma(-a)$ sera infinie pour toutes les valeurs entières de a, et qu'elle sera alternativement positive et négative dans les périodes successives.

141. La courbe dont les ordonnées représentent $\Gamma(x)$, est donc composée, dans le sens négatif, d'une infinité de branches séparées par des asymptotes perpendiculaires à l'axe des x, et menées successivement aux distances $x=0, -1, -2, -3$, etc. Ces branches qui touchent chacune des asymptotes, sont situées alternativement d'un côté et de l'autre de l'axe, de sorte qu'il y a dans chacune un point où la fonction Γ est un *minimum*.

La fonction Γa étant supposée connue pour toute valeur positive de a, on en déduit aisément par les formules précédentes, l'expression de toute fonction de cette sorte où a est négatif; soit en effet k un entier quelconque, et x un nombre moindre que l'unité, on aura en général

$$\Gamma(-k-x) = \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(1-x)}{x(1+x)(2+x)\ldots\ldots(k+x)}, \tag{3}$$

ou encore

$$\Gamma(-k-x) = \frac{(-1)^{k+1}\Gamma x\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(k+1+x)}.$$

Cette dernière formule se déduirait directement de l'équation (C)

$$\Gamma x\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

dans laquelle mettant $k+1+x$ au lieu de x, on trouve

$$\Gamma(k+1+x)\Gamma(-k-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x \cos(k+1)\pi}=(-1)^{k+1}\Gamma x\Gamma(1-x).$$

Ces formules s'accordent parfaitement avec les résultats que donneraient les autres équations (D), (E), (F), etc., en y changeant le signe de x. Elles offrent conséquemment la théorie complète des fonctions Γa pour toute valeur négative de a.

142. Pour confirmer cette théorie, nous allons démontrer, d'après la valeur générale du coefficient $\frac{d\log\Gamma x}{dx}$, que la fonction Γ n'est susceptible que d'un *minimum* dans le sens positif, mais qu'elle en admet une infinité dans le sens négatif.

En effet, si l'on fait $\log \Gamma x = Z$, on aura (art. 91)

$$\frac{dZ}{dx}=-C+\frac{x-1}{x}+\frac{x-1}{2(1+x)}+\frac{x-1}{3(2+x)}+\frac{x-1}{4(3+x)}+\text{etc.}$$

Lorsqu'on fait $x=1$ ou $x<1$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ est négative; lorsqu'on fait $x=2$, on a

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\text{etc.}-C=1-C,$$

valeur positive. Donc entre $x=1$ et $x=2$, il y a une valeur de x qui rend nulle $\frac{dZ}{dx}$, et alors Z est un *minimum*.

Si l'on fait $x>2$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ sera positive et augmentera jusqu'à l'infini. Ainsi il n'y a aucun autre *minimum* dans le sens positif.

Dans le sens négatif, au contraire, il y a un *minimum* dans chaque période, ou en général entre $x=-k$ et $x=-k-1$, k étant un entier quelconque. Prouvons, par exemple, qu'il existe un *minimum* entre $x=-2$ et $x=-3$. Lorsqu'on fait $x=-2-\omega$, ω étant infiniment petit, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ contient différens termes dont la somme est finie, et un terme $\frac{1}{\omega}$ qui est un infini positif. Lorsqu'ensuite l'on fait $x=-3+\omega$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ contiendra de même des termes dont la somme est finie, et un terme $-\frac{1}{\omega}$ qui est un infini négatif. Donc entre ces deux extrêmes, il y a une valeur de $\frac{dZ}{dx}$ nulle, donc il y a un *minimum* entre $x=-2$ et $x=-3$, conformément à la théorie précédente.

CHAPITRE XVI.

Construction et usage de la Table des logarithmes des fonctions Γ.

143. Nous nous sommes proposé de calculer jusqu'à 12 décimales, une Table des Logarithmes de la fonction $\Gamma(1+x)$, en donnant à x toutes les valeurs de millième en millième, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Voici comment ces calculs ont été faits.

Comme les séries qui servent à calculer les différences successives de la fonction $\log \Gamma x$, sont moins simples et moins convergentes que celle qui donne immédiatement la valeur de cette fonction, nous n'avons point fait usage des différences, et nous avons calculé directement chaque terme par la formule (24), et pour les cas où x est très petit, par la formule

$$\log \Gamma(1+x) = -l(1+x) + Bx + B_2x^2 - B_3x^3 + B_4x^4 - \text{etc.}$$

On a calculé ainsi les valeurs de $\log \Gamma(1+x)$, depuis $x=0.001$ jusqu'à $x=0.250$; ces valeurs ont servi dans chaque cas à déterminer leurs complémens au moyen de la formule

$$\Gamma(2-x) = \frac{x(1-x)}{\Gamma(1+x)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{44}$$

On a donc obtenu à la fois les valeurs de $\log \Gamma a$, depuis $a=1.000$ jusqu'à $a=1.250$, et depuis $a=1.750$ jusqu'à $a=2.000$.

Au moyen de ces valeurs qui composent déjà la moitié de la période, on a trouvé les valeurs de $\log \Gamma a$ depuis $a=1.375$ jusqu'à $a=1.625$ ce qui forme un troisième quart de la période, par les formules

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}-x\right) &= \frac{4^x\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+2x)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\cos \pi x}, \\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}+x\right) &= \frac{\Gamma(1+2x)}{4^x\Gamma(1+x)} \cdot \pi\left(\tfrac{1}{2}+x\right), \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

dans lesquelles on a donné à x les valeurs successives depuis $x = 0.001$ jusqu'à $x = 0.125$.

La seconde des équations (45) jointe à l'équation (44), donne les formules

$$\begin{aligned} \Gamma(1+x) &= \frac{\Gamma(1+2x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+x)}{4^x}, \\ \Gamma(2-x) &= \frac{x(1-x)}{\Gamma(1+x)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi x}, \end{aligned} \tag{46}$$

au moyen desquelles on a déterminé log Γa depuis $a = 1.250$ jusqu'à $a = 1.312$, et depuis $a = 1.688$ jusqu'à $a = 1.750$.

Pour achever de calculer le reste de la période, on a passé des formules (46) aux formules (45), et ainsi alternativement, jusqu'à ce qu'on eût les valeurs de log Γa, qui s'approchent le plus des limites des deux suites qui sont $1\frac{1}{3}$ d'un côté, et $1\frac{2}{3}$ de l'autre.

144. A chaque logarithme de la Table, on a joint ses différences première, seconde et troisième. Ces différences marchent avec la régularité nécessaire pour garantir l'exactitude des calculs ; elles serviront à faire reconnaître et à corriger les fautes, s'il s'en était glissé dans l'impression ; de sorte qu'avec tous ces secours, on peut regarder les transcendantes Γ comme étant connues avec un degré de précision plus que suffisant pour toutes les applications qu'elles peuvent recevoir. Il faut maintenant entrer dans quelques détails sur les interpolations auxquelles donnera lieu l'usage de cette table.

Soit, pour abréger, $A = \log \Gamma a$, et soient δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ les différences successives de A, telles que la Table les donne, en supposant que les valeurs de a croissent continuellement d'une quantité $\omega = 0.001$. Pour avoir le terme X qui représente $\log \Gamma(a + \omega x)$, on aura la formule

$$X = A + x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x-2}{3}\left(\delta^3 A,\right.\right.\right. \tag{47}$$

dont le calcul se fera de la manière suivante :

Étant donnée la valeur de x qui sera toujours plus petite que l'unité, on calculera le terme $\frac{2-x}{3}\delta^3 A$ jusqu'à la douzième décimale seulement, et on formera, en observant les signes, la quantité $\delta^2 A - \left(\frac{2-x}{3}\right)\delta^3 A$, qu'on pourra appeler, comme ci-dessus (page 36), *la différence seconde corrigée*, et qu'on désignera par $\delta^2 Ax$. On calculera de même jusqu'à la douzième décimale seulement, le terme $\frac{1-x}{2}\,\delta^2 Ax$, et on formera la quantité $\delta A - \left(\frac{1-x}{2}\right)\delta^2 Ax$, qu'on appellera *la différence première corrigée*, et qu'on désignera par δAx. Cela posé, il ne restera plus qu'à former la quantité $A + x\delta Ax$ qui sera le logarithme cherché X.

145. Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de $\log \Gamma(1\frac{1}{12})$; on fera $a = 1.083$, $x = \frac{1}{3}$, et on prendra dans la Table les nombres qui répondent à la racine 1.083. Ces nombres sont, en donnant aux différences les signes convenables,

A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
9.981 559 875 655	— 194 416 822	635 664	— 838.

On tire de là successivement,

$$
\begin{aligned}
\delta^2 Ax &= \delta^2 A - \tfrac{5}{9}\,\delta^3 A = && 636\ 130,\\
\delta Ax &= \delta A - \tfrac{1}{3}\,\delta^2 Ax = - && 194\ 628\ 865,\\
X &= A + \tfrac{1}{3}\,\delta Ax = && 9.981\ 494\ 999\ 367,
\end{aligned}
$$

valeur qui s'accorde avec celle que l'on trouve dans le Tableau de l'article 43.

146. Réciproquement, s'il s'agit de trouver la racine qui répond à un logarithme donné X, on prendra dans la Table le logarithme prochainement moindre A, et la racine correspondante étant a, la différence $0.001 = \omega$, on supposera que $a + \omega x$ soit la racine qui répond au logarithme donné $X = A + y$; et pour déterminer x, il faudra résoudre l'équation

$$y = x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x-2}{3}\left(\delta^3 A,\right.\right.\right.$$

ce que l'on fera aisément par les deux opérations suivantes :

1°. On négligera dans y, δA, $\delta^2 A$, les quatre derniers chiffres, comme si la table n'était calculée qu'à huit décimales, l'équation à résoudre deviendra $y = x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\,\delta^2 A\right)$, et on en tire

$$x = \frac{y}{\delta A + \frac{x-1}{2}\,\delta^2 A}.$$

On pourra négliger d'abord le terme $\frac{x-1}{2}\,\delta^2 A$, ce qui donnera une première valeur approchée de x; tenant compte ensuite de ce terme, on aura une seconde valeur de x, calculée jusqu'à la septième décimale.

2°. Soit x' cette valeur, et α la correction qu'il faut lui appliquer, en sorte qu'on ait $x = x' + \alpha$, on calculera y' par la valeur

$$y' = x'\left(\delta A + \frac{x'-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x'-2}{3}\delta^3 A\right.\right.,$$

et il restera à déterminer α d'après l'équation

$$\alpha = \frac{y - y'}{\delta A + (x' - \frac{1}{2})\,\delta^2 A},$$

valeur dans laquelle on devra ne pas conserver plus de chiffres significatifs qu'il n'y en a au numérateur.

Connaissant α, on aura la racine cherchée $= a + \omega\,(x' + \alpha)$.

147. Soit, par exemple, le logarithme proposé $X = 9.950\ 241\ 672\ 373$; le logarithme prochainement moindre, pris dans la table, a pour racine $a = 1.583$, et les nombres correspondans sont

A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
9.950 225 531 586	48 548 340	377 764	— 315

de là on tire $y = X - A = 16\ 140\ 787$, et la première valeur de x, désignée par x', sera donnée par l'équation

$$x' = \frac{1614}{4855 - \left(\frac{1-x'}{2}\right)38};$$

d'où l'on tire $x' = 0.333$. Au moyen de cette valeur, on aura successivement

$$\begin{aligned} y' &= 16\ 124\ 625, \\ y - y' &= 16\ 162, \\ \delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A &= 48\ 485\ 264, \\ \alpha = \frac{16\ 162}{48\ 485\ 264} &= 0.000\ 333'\ 34. \end{aligned}$$

La racine cherchée est donc $1.583\ 333\ 333\ 34$, ce qui s'accorde avec la valeur de $\log \Gamma(1\,\tfrac{7}{12})$ portée dans le tableau de l'article 113.

148. Puisque la fonction Γa augmente à l'infini de part et d'autre du point où elle est un *minimum*, il s'ensuit que pour toute valeur donnée de Γa, plus grande que le *minimum*, il y aura toujours deux valeurs réelles de la racine a. Dans l'exemple précédent, on voit par la table que la seconde valeur est comprise entre 1.344 et 1.345. Les nombres qui correspondent à la racine $a = 1.344$, sont

A	δA	δ^2A	δ^3A
9.950 256 821 818	— 52 058 495	470 189	— 475.

D'après ces données, on aura $y = X - A = -15\ 149\ 445$,

$$x' = \frac{1515}{5206 + \frac{1-x'}{2}.47} = 0.290.$$

Au moyen de cette valeur de x', le calcul s'achève ainsi :

$$y' = -15\ 145\ 397,$$
$$y - y' = -\ 4\ 048,$$
$$\delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A = -52\ 157\ 235,$$
$$\alpha = \frac{4048}{52\ 157\ 235} = 0.000\ 077\ 61:$$

donc la racine cherchée $a + \omega(x' + \alpha) = 1.344\ 290\ 077\ 61$.

149. Étant donnée une valeur de a non comprise entre 1 et 2, il n'y a aucune difficulté à trouver log Γa; il faut pour cela réduire la valeur donnée à celles qui sont comprises dans la table, ce qui se fera au moyen de l'équation $\Gamma(1 + x) = x\,\Gamma x$. Ainsi si l'on demande la valeur de log $\Gamma(3.318)$, on la déterminera par l'équation $\log\Gamma(3.3148) = \log(2.3148) + l\Gamma(2.3148)$ $= l(2.3148) + l(1.3148) + l\Gamma(1.3148)$. De même on aurait $l\Gamma(0.3148)$ $= l\Gamma(1.3148) - l(0.3148)$; ainsi tout se réduit à trouver $l\Gamma(1.3148)$, ce qui se fera aisément par la formule de l'art. 144.

150. Mais il s'agit de trouver la racine a qui correspond à une valeur de log Γa non comprise dans les limites de la table, voici la méthode qu'il faudra suivre.

Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de c qui donne $\Gamma c = \pi$, ou log $\Gamma c = 0.497\ 149\ 872\ 694$. Il y a deux de ces valeurs, l'une qui est comprise dans la première période, l'autre qui appartient à la troisième. Bornons-nous à déterminer cette dernière.

On trouve d'abord, par quelques essais, que la valeur cherchée est comprise entre 3.448 et 3.449. Pour trouver la valeur exacte, il est nécessaire d'avoir les valeurs de log Γ qui répondent aux racines successives 3.448, 3.449, 3.450, 3.451. Voici le calcul de ces valeurs:

2.448...0.388 811 413 473 52	2.449...0.388 988 785 124 71
1.448...0.160 768 561 861 13	1.449...0.161 068 385 471 17
$\Gamma(1.448)$..9.947 278 386 843	$\Gamma(1.449)$..9.947 272 834 564
$\Gamma(3.448)$..0.496 858 362 178	$\Gamma(3.449)$..0.497 330 005 160

2.450...0.389 166 084 364 53	2.451...0.389 543 511 252 08
1.450...0.161 368 002 234 97	1.451...0.161 667 412 437 74
Γ(1.450)..9.947 267 707 452	Γ(1.451)..9.947 263 005 114
Γ(3.450)..0.497 801 794 051	Γ(3.451)..0.498 273 728 804.

Désignant comme ci-dessus 3.448 par a, et $\log \Gamma a$ par A, on aura la valeur de A et de ses différences successives comme il suit:

A	δA	δ^2A	δ^3A
0.496 858 362 178	471 642 982	145 909	— 47.

Soit encore $c = a + \omega x$, $\log \Gamma c = X$, $y = X - A$, on aura $y = 291\ 510\ 516$, et la première valeur approchée de x sera donnée par l'équation

$$x' = \frac{291\ 51}{47164 - \left(\frac{1-x'}{2}\right).15} = 0.6181.$$

Soit enfin $x = x' + \alpha$, on aura

$$\begin{aligned} y' &= 291\ 505\ 306, \\ y - y' &= 5\ 210, \\ \delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A &= 471\ 625\ 750, \\ \alpha &= \frac{5210}{471\ 625\ 750} = 0.000\ 011\ 047. \end{aligned}$$

Donc la racine cherchée $c = a + \omega(x' + \alpha) = 3.448\ 618\ 111\ 047$.

La seconde racine de l'équation $\Gamma c = \pi$ serait $c = 0.286\ 3641$, et il serait facile de la trouver avec un plus grand nombre de décimales.

151. On peut encore, par notre Table, trouver les valeurs approchées des coefficiens différentiels $\frac{d \log \Gamma a}{da}$, $\frac{dd \log \Gamma a}{da^2}$, $\frac{d^3 \log \Gamma a}{da^3}$, qui sont des transcendantes particulières dont nous avons fait voir différens usages. Ces coefficiens se calculeront par les formules suivantes, où l'on a fait $\log \Gamma a = A$:

$$\begin{aligned} \omega \frac{dA}{da} &= \delta A - \tfrac{1}{2}\delta^2 A + \tfrac{1}{3}\delta^3 A - \tfrac{1}{4}\delta^4 A + \tfrac{1}{5}\delta^5 A - \text{etc.}, \\ \omega^2 \frac{ddA}{da^2} &= \delta^2 A - \delta^3 A + \tfrac{11}{12}\delta^4 A - \tfrac{5}{6}\delta^5 A + \text{etc.}, \\ \omega^3 \frac{d^3 A}{da^3} &= \delta^3 A - \tfrac{3}{2}\delta^4 A + \tfrac{7}{4}\delta^5 A - \text{etc.}, \\ \omega^4 \frac{d^4 A}{da^4} &= \delta^4 A - 2\delta^5 A + \text{etc.}; \end{aligned}$$

ω est la différence par laquelle on fait croître la racine a pour former les différences successives δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc. On a $\omega = 0.001$ quand on prend dans la Table les termes qui se suivent immédiatement; mais on pourrait également faire $\omega = 0.002$, 0.003, ou plus, afin de rendre sensible la différence quatrième $\delta^4 A$ qui est presque toujours au-dessous d'une unité décimale du douzième ordre, lorsqu'on prend $\omega = 0.001$.

En se bornant à l'hypothèse $\omega = 0.001$ qui est la plus simple, puisque la Table donne, sur une même ligne, les nombres A, δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, on voit que la valeur qui en résultera pour le cofficient $\frac{dA}{da}$, ne sera approchée que jusqu'à la neuvième décimale à peu près; celle de $\frac{d^2A}{da^2}$ ne le sera que jusqu'à la sixième, et celle de $\frac{d^3A}{da^3}$ jusqu'à la troisième. Mais c'est déjà un grand avantage d'avoir les deux premières transcendantes d'une manière si facile et avec un pareil degré d'approximation.

152. Soit, par exemple, $a = 1.500$; les différences données immédiatement dans la table pour cette valeur de a, sont

$$\delta A = 16\ 050\ 324, \quad \delta^2 A = 405\ 620, \quad \delta^3 A = -\ 359;$$

on en tire les coefficiens différentiels

$$\frac{dA}{da} = 0.015\ 847\ 394, \quad \frac{ddA}{da^2} = 0.405\ 979, \quad \frac{d^3A}{da^3} = -0.359.$$

Si, au lieu de faire $\omega = 0.001$, on fait $\omega = 0.002$; c'est-à-dire, si on prend dans la Table les fonctions A qui répondent aux racines successives 1.500, 1.502, 1.504, 1.506, 1.508, on aura les valeurs de δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, $\delta^4 A$, comme il suit,

$$\delta A = 32\ 506\ 268, \quad \delta^2 A = 1\ 621\ 044, \quad \delta^3 A = -\ 2865, \quad \delta^4 A = 10.$$

De là résultent les coefficiens différentiels,

$$\frac{dA}{da} = 0.015\ 847\ 394\ 250, \quad \frac{ddA}{da^2} = 2.405\ 9795, \quad \frac{d^3A}{da^3} = -\ 0.3600.$$

Ces valeurs diffèrent très peu de celles qu'on a obtenues immédiatement par les différences des termes consécutifs.

Soit encore $\omega = 0.005$, on aura à considérer les différences successives des termes de la Table qui répondent aux racines 1.500, 1.505, 1.510, 1.515, 1.520; ces différences sont

$$\delta A = 84\ 304\ 232, \quad \delta^2 A = 10\ 104\ 715, \quad \delta^3 A = -44\ 425, \quad \delta^4 A = 374,$$

et on en déduit les coefficiens différentiels

$$\frac{dA}{da} = 0.015\ 847\ 394\ 53, \quad \frac{ddA}{da^2} = 0.405\ 979\ 32, \quad \frac{d^3A}{da^3} = -0.359\ 89.$$

Ces valeurs diffèrent peu des précédentes et semblent devoir être plus approchées de la vérité, parce qu'on a tenu compte des différences quatrièmes devenues sensibles par une plus grande valeur de ω; cependant la valeur de ω ne doit pas passer une certaine limite, et cette limite qu'il serait difficile de déterminer avec précision, dépend de la loi que suivent les différences successives de la fonction A.

153. Dans l'exemple précédent, il est facile de vérifier la valeur obtenue pour $\frac{dA}{da}$; car en faisant $a = \frac{1}{2}$ dans la formule (35), art. 122, et observant que les logarithmes de la formule doivent être multipliés par le module $m = \frac{1}{M}$ pour les changer en logarithmes vulgaires, on aura

$$M\frac{dA}{da} = -C + \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})\,dx}{1-x}.$$

L'intégrale du second membre, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, est égale à $2 - 2M\,l2$; donc

$$\frac{dA}{da} = (2 - C)\,m - 2\,l2.$$

Mais on a fait ci-dessus $B = m(1-C)$; ainsi on aura $\frac{dA}{da} = m + B - 2\,l2$; ce qui donne, en substituant les valeurs connues,

$$\frac{dA}{da} = 0.015\ 847\ 394\ 343\ 69,$$

valeur qui doit être exacte jusqu'à la quatorzième décimale : elle prouve que les résultats obtenus par la méthode précédente, sont moins exacts dans l'hypothèse $\omega = 0.005$ que dans l'hypothèse $\omega = 0.002$.

154. Les formules précédentes donnent les coefficiens différentiels de la fonction $A = \log \Gamma a$, en supposant que a se trouve immédiatement dans la table; mais s'il faut trouver les coefficiens différentiels de la fonction $X = \log \Gamma(a + \omega x)$, qui est intermédiaire entre les deux fonctions consécutives données par la table $A = \log \Gamma a$, $A + \delta A = \log \Gamma(a + \omega)$, voici comment on résoudra ce problème d'interpolation :

On a généralement

$$X = A + x\delta A + \frac{x\,.\,x-1}{2}\,\delta^2 A + \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2}{2.3}\,\delta^3 A + \text{etc.},$$

et si l'on fait $a + \omega x = \text{a}$, on aura, en supposant que x seul varie, $d\text{a} = \omega dx$, d'où $\omega\frac{dX}{d\text{a}} = \frac{dX}{dx}$. Différenciant donc la valeur de X par rapport à x, et réitérant les différentiations, on aura

$$\omega \frac{dX}{da} = \delta A + \frac{2x-1}{2}\delta^2 A + \frac{3x^2-6x+2}{2.3}\delta^3 A$$
$$+ \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{2.3.4}\delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^2 \frac{ddX}{da^2} = \delta^2 A + (x-1)\delta^3 A + \frac{6x^2-18x+11}{3.4}\delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^3 \frac{d^3X}{da^3} = \delta^3 A + (x-\tfrac{3}{2})\delta^4 A + \text{etc.},$$
etc.

On connaîtra donc les coefficiens différentiels dont il s'agit, par les différences δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ que la table donne immédiatement.

155. Dans le cas de $x=1$, on a $a = a+\omega$, et les formules deviennent

$$\omega \frac{dX}{da} = \delta A + \tfrac{1}{2}\delta^2 A - \tfrac{1}{6}\delta^3 A + \tfrac{1}{12}\delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^2 \frac{ddX}{da^2} = \delta^2 A - \tfrac{1}{12}\delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^3 \frac{d^3X}{da^3} = \delta^3 A - \tfrac{1}{2}\delta^4 A + \text{etc.}$$

Celles-ci offrent des formules un peu plus convergentes que celles de l'article 691, de sorte qu'il y a quelqu'avantage à déterminer les coefficiens différentiels de la fonction $\log\Gamma(a+\omega)$ par le moyen des différences qui répondent à la fonction précédente $\log\Gamma a$.

156. Appliquons les formules précédentes à la fonction $X=\log\Gamma(1+\frac{1}{3})$; alors on fera $a = 1.333$, $x=\frac{1}{3}$, et les différences données immédiatement dans la table seront

$$\delta A = -57\ 262\ 267,\quad \delta^2 A = 475\ 486,\quad \delta^3 A = -483,$$

d'où résultent les valeurs suivantes des coefficiens différentiels,

$$\frac{dX}{da} = -0.057\ 341\ 541\ 5,$$
$$\frac{ddX}{da^2} = \quad 0.475\ 808,$$
$$\frac{d^3X}{da^3} = -0.483.$$

Pour vérifier le premier de ces résultats, on peut avoir recours à la formule (33) qui donne

$$\frac{dX}{da} = -mC + m\int\frac{(1-x^{\frac{1}{3}})\,dx}{1-x}.$$

Effectuant l'intégration indiquée entre les limites $x=0$, $x=1$, il vient

$$\frac{dX}{da} = B + 2m - \tfrac{1}{2}\log 27 - \frac{m\pi}{12},$$

et en substituant les valeurs numériques,

$$\frac{dX}{da} = -0.057\ 341\ 542\ 008\ 65,$$

d'où l'on voit que nos déterminations sont aussi exactes qu'on peut le désirer.

157. Lorsque a est un nombre rationnel $\frac{m}{n}$, on a vu dans l'art. 122 que l'intégrale $Z = \int \frac{(1 - x^a)\,dx}{1 - x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est exprimée par $\frac{1}{a} - nB_m$, B_m étant une quantité dont la valeur est donnée par arcs de cercle et par logarithmes (*ibid.*). Mais si l'on suppose, par exemple, $a = \frac{563}{1000}$, la valeur de B_m dont il s'agit sera tellement compliquée, qu'il deviendra à peu près impossible d'en tirer la valeur numérique de l'intégrale Z, et la difficulté serait encore plus grande si a était une fraction plus composée.

Dans ce cas, l'intégrale dont il s'agit pourra se trouver d'une manière beaucoup plus facile par la formule de l'article 122, qui donne

$$Z = C + M\,\frac{d \log \Gamma a}{da}:$$

or pour la valeur $a = 1.563$, on trouve le coefficient différentiel

$$\frac{d \log \Gamma a}{da} = 0.040\ 734\ 344.$$

Ainsi on aura l'intégrale cherchée $Z = 0.671\ 009\ 958$, laquelle doit être exacte au moins jusqu'à la huitième décimale.

Nous sommes entrés dans d'assez grands détails sur ces diverses méthodes d'interpolation, parce qu'elles sont peu connues, et qu'elles peuvent s'appliquer à toutes les tables dans lesquelles il est nécessaire d'avoir égard aux différences du troisième ordre.

En terminant ici le Traité relatif aux deux sortes d'Intégrales définies que nous avons désignées sous le nom d'*Intégrales Eulériennes*, nous croyons devoir faire observer que les divers perfectionnemens qu'a reçus la théorie de ces intégrales, depuis qu'elle est sortie des mains de son illustre auteur, sont le fruit des recherches que nous avons publiées successivement dans plusieurs écrits, savoir : 1°. dans le Mémoire sur les Transcendantes elliptiques (Paris 1793); 2°. dans les Mémoires de la classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut pour l'année 1809; 3°. enfin, dans les parties II et IV des Exercices de Calcul intégral. D'autres géomètres ont publié le résultat de quelques travaux particuliers sur la même matière; mais ils n'ont fait que reproduire sous une autre forme les résultats trouvés long-temps auparavant par Euler.

TABLE

DES LOGARITHMES DE LA FONCTION Γa,

Calculés à douze décimales, pour toutes les valeurs de la racine a, de millième en millième, depuis 1.000 jusqu'à 2.000.

On y a joint leurs différences première, seconde et troisième.

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.200	9.962 922 503 814	125 253 332	549 775	642
1.201	9.962 797 250 482	124 703 557	549 133	637
1.202	9.962 672 546 925	124 154 424	548 496	637
1.203	9.962 548 392 501	123 605 928	547 859	637
1.204	9.962 424 786 573	123 058 069	547 222	632
1.205	9.962 301 728 504	122 510 847	546 590	635
1.206	9.962 179 217 657	121 964 257	545 955	630
1.207	9.962 057 253 400	121 418 302	545 325	630
1.208	9.961 935 835 098	120 872 977	544 695	630
1.209	9.961 814 962 121	120 328 282	544 065	626
1.210	9.961 694 633 839	119 784 217	543 439	627
1.211	9.961 574 849 622	119 240 778	542 812	625
1.212	9.961 455 608 844	118 697 966	542 187	621
1.213	9.961 336 910 878	118 155 779	541 566	624
1.214	9.961 218 755 099	117 614 213	540 942	620
1.215	9.961 101 140 886	117 073 271	540 322	620
1.216	9.960 984 067 615	116 532 949	539 702	616
1.217	9.960 867 534 666	115 993 247	539 086	618
1.218	9.960 751 541 419	115 454 161	538 468	616
1.219	9.960 636 087 258	114 915 693	537 852	612
1.220	9.960 521 171 565	114 377 841	537 240	613
1.221	9.960 406 793 724	113 840 601	536 627	612
1.222	9.960 292 953 123	113 303 974	536 015	610
1.223	9.960 179 649 149	112 767 959	535 405	609
1.224	9.960 066 881 190	112 232 554	534 796	606
1.225	9.959 954 648 636	111 697 758	534 190	607
1.226	9.959 842 950 878	111 163 568	533 583	605
1.227	9.959 731 787 310	110 629 985	532 978	602
1.228	9.959 621 157 325	110 097 007	532 376	604
1.229	9.959 511 060 318	109 564 631	531 772	600
1.230	9.959 401 495 687	109 032 859	531 172	600
1.231	9.959 292 462 828	108 501 687	530 572	598
1.232	9.959 183 961 141	107 971 115	529 974	597
1.233	9.959 075 990 026	107 441 141	529 377	596
1.234	9.958 968 548 885	106 911 764	528 781	595
1.235	9.958 861 637 121	106 382 983	528 186	592
1.236	9.958 755 254 138	105 854 797	527 594	593
1.237	9.958 649 399 341	105 327 203	527 001	591
1.238	9.958 544 072 138	104 800 202	526 410	589
1.239	9.958 439 271 936	104 273 792	525 821	589
1.240	9.958 334 998 144	103 747 971	525 232	586
1.241	9.958 231 250 173	103 222 739	524 646	586
1.242	9.958 128 027 434	102 698 093	524 060	585
1.243	9.958 025 329 341	102 174 033	523 475	583
1.244	9.957 923 155 308	101 650 558	522 892	582
1.245	9.957 821 504 750	101 127 666	522 310	582
1.246	9.957 720 377 084	100 605 356	521 728	577
1.247	9.957 619 771 728	100 083 628	521 151	581
1.248	9.957 519 688 100	99 562 477	520 570	577
1.249	9.957 420 125 623	99 041 907	519 993	576
1.250	9.957 321 083 716	98 521 914	519 417	575

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.
1.250	9.957 321 083 716	98 521 914	519 [illegible]
1.251	9.957 222 561 802	98 002 497	518 [illegible]
1.252	9.957 124 559 305	97 483 655	518 [illegible]
1.253	9.957 027 075 650	96 965 385	517 [illegible]
1.254	9.956 930 110 265	96 447 687	517 [illegible]
1.255	9.956 833 662 578	95 930 561	516 [illegible]
1.256	9.956 737 732 017	95 414 006	515 [illegible]
1.257	9.956 642 318 011	94 898 021	515 [illegible]
1.258	9.956 547 419 990	94 382 601	514 [illegible]
1.259	9.956 453 037 389	93 867 749	514 [illegible]
1.260	9.956 359 169 640	93 353 463	513 [illegible]
1.261	9.956 265 816 177	92 839 740	513 [illegible]
1.262	9.956 172 976 437	92 326 580	512 [illegible]
1.263	9.956 080 649 857	91 813 981	512 [illegible]
1.264	9.955 988 835 876	91 301 943	511 [illegible]
1.265	9.955 897 533 933	90 790 466	510 [illegible]
1.266	9.955 806 743 467	90 279 546	510 [illegible]
1.267	9.955 716 463 921	89 769 183	509 [illegible]
1.268	9.955 626 694 738	89 259 378	509 [illegible]
1.269	9.955 537 435 360	88 750 126	508 [illegible]
1.270	9.955 448 685 234	88 241 427	508 [illegible]
1.271	9.955 360 443 807	87 733 281	507 [illegible]
1.272	9.955 272 710 526	87 225 689	507 [illegible]
1.273	9.955 185 484 837	86 718 646	506 [illegible]
1.274	9.955 098 766 191	86 212 151	505 [illegible]
1.275	9.955 012 554 040	85 706 204	505 [illegible]
1.276	9.954 926 847 836	85 200 806	504 [illegible]
1.277	9.954 841 647 030	84 695 953	504 [illegible]
1.278	9.954 756 951 077	84 191 645	503 [illegible]
1.279	9.954 672 759 432	83 687 879	503 [illegible]
1.280	9.954 589 071 553	83 184 656	502 [illegible]
1.281	9.954 505 886 897	82 681 976	502 [illegible]
1.282	9.954 423 204 921	82 179 835	501 [illegible]
1.283	9.954 341 025 086	81 678 233	501 [illegible]
1.284	9.954 259 346 853	81 177 169	500 [illegible]
1.285	9.954 178 169 684	80 676 643	499 [illegible]
1.286	9.954 097 493 041	80 176 653	499 [illegible]
1.287	9.954 017 316 388	79 677 198	498 [illegible]
1.288	9.953 937 639 190	79 178 275	498 [illegible]
1.289	9.953 858 460 915	78 679 886	497 [illegible]
1.290	9.953 779 781 029	78 182 029	497 [illegible]
1.291	9.953 701 599 000	77 684 701	496 [illegible]
1.292	9.953 623 914 299	77 187 904	496 [illegible]
1.293	9.953 546 726 395	76 691 635	495 [illegible]
1.294	9.953 470 034 760	76 195 892	495 [illegible]
1.295	9.953 393 838 868	75 700 677	494 [illegible]
1.296	9.953 318 138 191	75 205 987	494 [illegible]
1.297	9.953 242 932 204	74 711 820	493 [illegible]
1.298	9.953 168 220 384	74 218 178	493 [illegible]
1.299	9.953 094 002 206	73 725 056	492 [illegible]
1.300	9.953 020 277 150	73 232 457	492 [illegible]

Log. ra.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. ra.	Diff. I.	II.	III.
.953 020 277 150	73 232 457	492 081	519	1.350	9.949 951 514 191	49 244 477	467 349	472
.952 947 044 693	72 740 376	491 562	519	1.351	9.949 902 269 714	48 777 128	466 877	470
952 874 304 317	72 248 814	491 043	518	1.352	9.949 853 492 586	48 310 251	466 407	466
952 802 055 503	71 757 771	490 525	513	1.353	9.949 805 182 335	47 843 844	465 941	470
952 730 297 732	71 267 246	490 012	517	1.354	9.949 757 338 491	47 377 903	465 471	468
952 659 030 486	70 777 234	489 495	512	1.355	9.949 709 960 588	46 912 432	465 003	464
952 588 253 252	70 287 739	488 983	514	1.356	9.949 663 048 156	46 447 429	464 539	466
952 517 965 513	69 798 756	488 469	511	1.357	9.949 616 600 727	45 982 890	464 073	465
952 448 166 757	69 310 287	487 958	512	1.358	9.949 570 617 837	45 518 817	463 608	464
952 378 856 470	68 822 329	487 446	509	1.359	9.949 525 099 020	45 055 209	463 144	460
952 310 034 141	68 334 883	486 937	508	1.360	9.949 480 043 811	44 592 065	462 684	462
952 241 699 258	67 847 946	486 429	509	1.361	9.949 435 451 746	44 129 381	462 222	462
952 173 851 312	67 361 517	485 920	506	1.362	9.949 391 322 365	43 667 159	461 760	459
952 106 489 795	66 875 597	485 414	504	1.363	9.949 347 655 206	43 205 399	461 301	459
952 039 614 198	66 390 183	484 910	505	1.364	9.949 304 449 807	42 744 098	460 842	458
951 973 224 015	65 905 273	484 405	506	1.365	9.949 261 705 709	42 283 256	460 384	459
951 907 318 742	65 420 868	483 899	502	1.366	9.949 219 422 453	41 822 872	459 925	456
951 841 897 874	64 936 969	483 397	503	1.367	9.949 177 599 581	41 362 947	459 469	455
951 776 960 905	64 453 572	482 894	499	1.368	9.949 136 236 634	40 903 478	459 014	454
951 712 507 333	63 970 678	482 395	498	1.369	9.949 095 333 156	40 444 464	458 560	454
951 648 536 655	63 488 283	481 897	501	1.370	9.949 054 888 692	39 985 904	458 106	454
951 585 048 372	63 006 386	481 396	497	1.371	9.949 014 902 788	39 527 798	457 652	452
951 522 041 986	62 524 990	480 899	497	1.372	9.948 975 374 990	39 070 146	457 200	450
951 459 516 996	62 044 091	480 402	495	1.373	9.948 936 304 844	38 612 946	456 750	451
951 397 472 905	61 563 689	479 907	497	1.374	9.948 897 691 898	38 156 196	456 299	450
951 335 909 216	61 083 782	479 410	493	1.375	9.948 859 535 702	37 699 897	455 849	449
951 274 825 434	60 604 372	478 917	492	1.376	9.948 821 835 805	37 244 048	455 400	447
951 214 221 062	60 125 455	478 425	491	1.377	9.948 784 591 757	36 788 648	454 953	449
951 154 095 607	59 647 030	477 934	494	1.378	9.948 747 803 109	36 333 695	454 504	444
951 094 448 577	59 169 096	477 440	489	1.379	9.948 711 469 414	35 879 191	454 060	445
951 035 279 481	58 691 656	476 951	487	1.380	9.948 675 590 223	35 425 131	453 615	447
950 976 587 825	58 214 705	476 464	490	1.381	9.948 640 165 092	34 971 516	453 168	443
950 918 373 120	57 738 241	475 974	488	1.382	9.948 605 193 576	34 518 348	452 725	442
950 860 634 879	57 262 267	475 486	483	1.383	9.948 570 675 228	34 065 623	452 283	442
950 803 372 612	56 786 781	475 003	488	1.384	9.948 536 609 605	33 613 340	451 841	442
950 746 585 831	56 311 778	474 515	484	1.385	9.948 502 996 265	33 161 499	451 399	440
950 690 274 053	55 837 263	474 031	484	1.386	9.948 469 834 766	32 710 100	450 959	439
950 634 436 790	55 363 232	473 547	483	1.387	9.948 437 124 666	32 259 141	450 520	440
950 579 073 558	54 889 685	473 066	480	1.388	9.948 404 865 525	31 808 621	450 080	438
950 524 183 873	54 416 619	472 586	484	1.389	9.948 373 056 904	31 358 541	449 642	437
950 469 767 254	53 944 033	472 102	480	1.390	9.948 341 698 363	30 908 899	449 205	436
950 415 823 221	53 471 931	471 622	476	1.391	9.948 310 789 464	30 459 694	448 769	436
950 362 351 290	53 000 309	471 146	478	1.392	9.948 280 329 770	30 010 925	448 333	435
950 309 350 981	52 529 163	470 668	479	1.393	9.948 250 318 845	29 562 592	447 898	432
950 256 821 818	52 058 495	470 189	475	1.394	9 948 220 756 253	29 114 694	447 466	435
950 204 763 323	51 588 306	469 714	474	1.395	9.948 191 641 559	28 667 228	447 031	432
950 153 175 017	51 118 592	469 240	475	1.396	9.948 162 974 331	28 220 197	446 599	432
950 102 956 425	50 649 352	468 765	473	1.397	9.948 134 754 134	27 773 598	446 167	430
950 051 407 073	50 180 587	468 292	474	1.398	9.948 106 980 536	27 327 431	445 737	431
950 001 226 486	49 712 295	467 818	469	1.399	9.948 079 653 105	26 881 694	445 306	428
949 951 514 191	49 244 477	467 349	472	1.400	9.948 052 771 411	26 436 388	444 878	429

a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. Γa.	Diff. I.
1.400	9.948 052 771 411	26 436 388	444 878	429	1.450	9.947 267 707 452	4 702 3
1.401	9.948 026 335 023	25 991 510	444 449	426	1.451	9.947 263 005 114	4 277 9
1.402	9.948 000 343 513	25 547 061	444 023	428	1.452	9.947 258 727 158	3 853 9
1.403	9.947 974 796 452	25 103 038	443 595	427	1.453	9.947 254 873 192	3 430 3
1.404	9.947 949 693 414	24 659 443	443 168	425	1.454	9.947 251 442 826	3 007 1
1.405	9.947 925 033 971	24 216 275	442 743	424	1.455	9.947 248 435 670	2 584 3
1.406	9.947 900 817 696	23 773 532	442 319	423	1.456	9.947 245 851 334	2 161 9
1.407	9.947 877 044 164	23 331 213	441 896	424	1.457	9 947 243 689 430	1 739 8
1.408	9.947 853 712 951	22 889 317	441 472	423	1.458	9.947 241 949 670	1 318 2
1.409	9.947 830 823 634	22 447 845	441 049	419	1.459	9.947 240 631 365	896 9
1.410	9.947 808 375 789	22 006 796	440 630	421	1.460	9.947 239 734 430	476 0
1.411	9.947 786 368 993	21 566 166	440 209	422	1.461	9.947 239 258 378	— 55 5
1.412	9.947 764 802 827	21 125 957	439 787	418	1.462	9.947 239 202 824	+ 364 5
1.413	9.947 743 676 870	20 686 170	439 369	417	1.463	9.947 239 567 383	784 2
1.414	9.947 722 990 700	20 246 801	438 952	418	1.464	9.947 240 351 672	1 203 6
1.415	9.947 702 743 899	19 807 849	438 534	418	1.465	9.947 241 555 307	1 622 5
1.416	9.947 682 936 050	19 369 315	438 116	416	1.466	9.947 243 177 905	2 041 1
1.417	9.947 663 566 735	18 931 199	437 700	415	1.467	9.947 245 219 084	2 559 3
1.418	9.947 644 635 536	18 493 499	437 285	414	1.468	9.947 247 678 464	2 877 2
1.419	9.947 626 142 037	18 056 214	436 871	414	1.469	9.947 250 555 664	3 294 6
1.420	9.947 608 085 823	17 619 343	436 457	414	1.470	9.947 253 850 302	3 711 6
1.421	9.947 590 466 480	17 182 886	436 043	410	1.471	9.947 257 562 000	4 128 3
1.422	9.947 573 283 594	16 746 843	435 633	414	1.472	9.947 261 690 380	4 544 6
1.423	9.947 556 536 751	16 311 210	435 219	410	1.473	9.947 266 235 064	4 960 6
1.424	9.947 540 225 541	15 875 991	434 809	409	1.474	9.947 271 195 674	5 376 1
1.425	9.947 524 349 550	15 441 182	434 400	411	1.475	9.947 276 571 832	5 791 3
1.426	9.947 508 908 368	15 006 782	433 989	408	1.476	9 947 282 363 164	6 206 1
1.427	9.947 493 901 586	14 572 793	433 581	408	1.477	9.947 288 569 294	6 620 5
1.428	9.947 479 328 793	14 139 212	433 173	406	1.478	9 947 295 189 847	7 034 6
1.429	9.947 465 189 581	13 706 039	432 767	407	1.479	9.947 302 224 449	7 448 2
1.430	9.947 451 483 542	13 273 272	432 360	407	1.480	9.947 309 672 726	7 861 5
1.431	9.947 438 210 270	12 840 912	431 953	404	1.481	9.947 317 534 306	8 274 5
1.432	9.947 425 369 358	12 408 959	431 549	404	1.482	9.947 325 808 818	8 687 0
1.433	9.947 412 960 399	11 977 410	431 145	403	1.483	9.947 334 495 888	9 099 2
1.434	9.947 400 982 989	11 546 265	430 742	404	1.484	9.947 343 595 146	9 511 0
1.435	9.947 389 436 724	11 115 523	430 338	402	1.485	9.947 353 106 222	9 922 5
1.436	9.947 378 321 201	10 685 185	429 936	401	1.486	9.947 363 028 746	10 333 6
1.437	9.947 367 636 016	10 255 249	429 535	400	1.487	9 947 373 362 350	10 744 3
1.438	9.947 357 380 767	9 825 714	429 135	400	1.488	9.947 384 106 666	11 154 6
1.439	9.947 347 555 053	9 396 579	428 735	399	1.489	9.947 395 261 324	11 564 6
1.440	9.947 338 158 474	8 967 844	428 336	400	1.490	9.947 406 825 958	11 974 2
1.441	9.947 329 190 630	8 539 508	427 936	398	1.491	9.947 418 800 202	12 383 4
1.442	9.947 320 651 122	8 111 572	427 538	395	1.492	9.947 431 183 690	12 792 3
1.443	9.947 312 539 550	7 684 034	427 143	398	1.493	9.947 443 976 057	13 200 8
1.444	9.947 304 855 516	7 256 891	426 745	394	1.494	9.947 457 176 938	13 609 0
1.445	9.947 297 598 625	6 830 146	426 351	397	1.495	9.947 470 785 969	14 016 8
1.446	9.947 290 768 479	6 403 795	425 954	392	1.496	9.947 484 802 787	14 424 2
1.447	9.947 284 364 684	5 977 841	425 562	395	1.497	9.947 499 227 029	14 831 3
1.448	9.947 278 386 843	5 552 279	425 167	393	1.498	9.947 514 058 334	15 238 0
1.449	9.947 272 834 564	5 127 112	424 774	392	1.499	9.947 529 296 338	15 644 3
1.450	9.947 267 707 452	4 702 338	424 382	392	1.500	9.947 544 940 683	16 050 3

Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
9.947 544 940 683	16 050 324	405 620	359
9.947 560 991 007	16 455 944	405 261	359
9.947 577 446 951	16 861 205	404 902	357
9.947 594 308 156	17 266 107	404 545	358
9.947 611 574 263	17 670 652	404 187	356
9.947 629 244 915	18 074 839	403 831	356
9.947 647 319 754	18 478 670	403 475	356
9.947 665 798 424	18 882 145	403 119	354
9.947 684 680 569	19 285 264	402 765	355
9.947 703 965 833	19 688 029	402 410	353
9.947 723 653 862	20 090 439	402 057	353
9.947 743 744 301	20 492 496	401 704	352
9.947 764 236 797	20 894 200	401 352	354
9.947 785 130 997	21 295 552	400 998	349
9.947 806 426 549	21 696 550	400 649	351
9.947 828 123 099	22 097 199	400 298	350
9.947 850 220 298	22 497 497	399 948	350
9.947 872 717 795	22 897 445	399 598	349
9.947 895 615 240	23 297 043	399 249	348
9.947 918 912 283	23 696 292	398 901	347
9.947 942 608 575	24 095 193	398 554	348
9.947 966 703 768	24 493 747	398 206	347
9.947 991 197 615	24 891 953	397 859	345
9.948 016 089 468	25 289 812	397 514	346
9.948 041 379 280	25 687 326	397 168	344
9.948 067 066 606	26 084 494	396 824	344
9.948 093 151 100	26 481 318	396 480	344
9.948 119 632 418	26 877 798	396 136	345
9.948 146 510 216	27 273 934	395 791	341
9.948 173 784 150	27 669 725	395 450	341
9.948 201 453 875	28 065 175	395 109	342
9.948 229 519 050	28 460 284	394 767	342
9.948 257 979 334	28 855 051	394 425	340
9.948 286 834 385	29 249 476	394 085	339
9.948 316 083 861	29 643 561	393 746	339
9.948 345 727 422	30 037 307	393 407	339
9.948 375 764 729	30 430 714	393 068	338
9.948 406 195 443	30 823 782	392 730	337
9.948 437 019 225	31 216 512	392 393	337
9.948 468 235 737	31 608 905	392 056	336
9.948 499 844 642	32 000 961	391 720	337
9.948 531 845 603	32 392 681	391 383	334
9.948 564 238 284	32 784 064	391 049	336
9.948 597 022 348	33 175 113	390 713	334
9.948 630 197 461	33 565 826	390 379	332
9.948 663 763 287	33 956 205	390 047	335
9.948 697 719 492	34 346 252	389 712	331
9.948 732 065 744	34 735 964	389 381	332
9.948 766 801 708	35 125 345	389 049	332
9.948 801 927 053	35 514 394	388 717	331
9.948 837 441 447	35 903 111	388 386	331

a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.550	9.948 837 441 447	35 903 111	388 386	331
1.551	9.948 873 344 558	36 291 497	388 055	327
1.552	9.948 909 636 055	36 679 552	387 728	332
1.553	9.948 946 315 607	37 067 280	387 396	328
1.554	9.948 983 382 887	37 454 676	387 068	329
1.555	9.949 020 837 563	37 841 744	386 739	325
1.556	9.949 058 679 307	38 228 483	386 414	329
1.557	9.949 096 907 790	38 614 897	386 085	326
1.558	9.949 135 522 687	39 000 982	385 759	327
1.559	9.949 174 523 669	39 386 741	385 432	324
1.560	9.949 213 910 410	39 772 173	385 108	327
1.561	9.949 253 682 583	40 157 281	384 781	323
1.562	9.949 293 839 864	40 542 062	384 458	323
1.563	9.949 334 381 926	40 926 520	384 135	326
1.564	9.949 375 308 346	41 310 655	383 809	321
1.565	9.949 416 619 101	41 694 464	383 488	323
1.566	9.949 458 313 565	42 077 952	383 165	321
1.567	9.949 500 391 517	42 461 117	382 844	322
1.568	9.949 542 852 634	42 843 961	382 522	322
1.569	9.949 585 696 595	43 226 483	382 200	319
1.570	9.949 628 923 078	43 608 683	381 881	319
1.571	9.949 672 531 761	43 990 564	381 562	320
1.572	9.949 716 522 325	44 372 126	381 242	320
1.573	9.949 760 894 451	44 753 368	380 922	317
1.574	9.949 805 647 819	45 134 290	380 605	317
1.575	9.949 850 782 109	45 514 895	380 288	318
1.576	9.949 896 297 004	45 895 183	379 970	317
1.577	9.949 942 192 187	46 275 153	379 653	316
1.578	9.949 988 467 340	46 654 806	379 337	315
1.579	9.950 035 122 146	47 034 143	379 022	317
1.580	9.950 082 156 289	47 413 165	378 705	313
1.581	9.950 129 569 454	47 791 870	378 392	314
1.582	9.950 177 361 324	48 170 262	378 078	314
1.583	9.950 225 531 586	48 548 340	377 764	315
1.584	9.950 274 079 926	48 926 104	377 449	311
1.585	9.950 323 006 030	49 303 553	377 138	311
1.586	9.950 372 309 583	49 680 691	376 827	313
1.587	9.950 421 990 274	50 057 518	376 514	312
1.588	9.950 472 047 792	50 434 032	376 202	310
1.589	9.950 522 481 824	50 810 234	375 892	309
1.590	9.950 573 292 058	51 186 126	375 583	311
1.591	9.950 624 478 184	51 561 709	375 272	310
1.592	9.950 676 039 893	51 936 981	374 962	307
1.593	9.950 727 976 874	52 311 943	374 655	308
1.594	9.950 780 288 817	52 686 598	374 347	309
1.595	9.950 832 975 415	53 060 945	374 038	308
1.596	9.950 886 036 360	53 434 982	373 730	305
1.597	9.950 939 471 343	53 808 713	373 425	307
1.598	9.950 993 280 056	54 182 138	373 118	306
1.599	9.951 047 462 194	54 555 256	372 812	305
1.600	9.951 102 017 450	54 928 068	372 507	305

a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log Γa.	Diff. I.	II.
1.600	9.951 102 017 450	54 928 068	372 507	305	1.650	9.954 298 875 428	73 189 158	357 [illegible]
1.601	9.951 156 945 518	55 300 575	372 202	303	1.651	9.954 372 064 586	73 546 991	357 [illegible]
1.602	9.951 212 246 093	55 672 777	371 899	305	1.652	9.954 445 611 577	73 904 541	357 [illegible]
1.603	9.951 267 918 870	56 044 676	371 594	304	1.653	9.954 519 516 118	74 261 809	356 [illegible]
1.604	9.951 323 963 546	56 416 270	371 290	303	1.654	9.954 593 777 927	74 618 798	356 [illegible]
1.605	9.951 380 379 816	56 787 560	370 987	302	1.655	9.954 668 396 725	74 975 505	356 [illegible]
1.606	9.951 437 167 376	57 158 547	370 685	302	1.656	9.954 743 372 230	75 331 929	356 [illegible]
1.607	9.951 494 325 923	57 529 232	370 383	301	1.657	9.954 818 704 159	75 688 076	355 [illegible]
1.608	9.951 551 855 155	57 899 615	370 082	301	1.658	9.954 894 392 235	76 043 945	355 [illegible]
1.609	9.951 609 754 770	58 269 697	369 781	300	1.659	9.954 970 436 180	76 399 532	355 [illegible]
1.610	9.951 668 024 467	58 639 478	369 481	302	1.660	9.955 046 835 712	76 754 840	355 [illegible]
1.611	9.951 726 663 945	59 008 959	369 179	299	1.661	9.955 123 590 552	77 109 871	354 [illegible]
1.612	9.951 785 672 904	59 378 138	368 880	298	1.662	9.955 200 700 423	77 464 623	354 [illegible]
1.613	9.951 845 051 042	59 747 018	368 582	301	1.663	9.955 278 165 046	77 819 099	354 [illegible]
1.614	9.951 904 798 060	60 115 600	368 281	296	1.664	9.955 355 984 045	78 173 298	353 [illegible]
1.615	9.951 964 913 660	60 483 881	367 985	298	1.665	9.955 434 157 443	78 527 219	353 [illegible]
1.616	9.952 025 397 541	60 851 866	367 687	297	1.666	9.955 512 684 662	78 880 865	353 [illegible]
1.617	9.952 086 249 407	61 219 553	367 390	298	1.667	9.955 591 565 527	79 234 235	353 [illegible]
1.618	9.952 147 468 960	61 586 943	367 092	297	1.668	9.955 670 799 762	79 587 328	352 [illegible]
1.619	9.952 209 055 903	61 954 035	366 795	294	1.669	9.955 750 387 090	79 940 148	352 [illegible]
1.620	9.952 271 009 938	62 320 830	366 501	296	1.670	9.955 830 327 238	80 292 693	352 [illegible]
1.621	9.952 333 330 768	62 687 331	366 205	295	1.671	9.955 910 619 931	80 644 964	351 [illegible]
1.622	9.952 396 018 099	63 053 536	365 910	294	1.672	9.955 991 264 895	80 996 961	351 [illegible]
1.623	9.952 459 071 635	63 419 446	365 616	296	1.673	9.956 072 261 856	81 348 685	351 [illegible]
1.624	9.952 522 491 081	63 785 062	365 320	293	1.674	9.956 153 610 541	81 700 136	351 [illegible]
1.625	9.952 586 276 143	64 150 382	365 027	291	1.675	9.956 235 310 677	82 051 314	350 [illegible]
1.626	9.952 650 426 525	64 515 409	364 736	294	1.676	9.956 317 361 991	82 402 221	350 [illegible]
1.627	9.952 714 941 934	64 880 145	364 442	293	1.677	9.956 399 764 212	82 752 855	350 [illegible]
1.628	9.952 779 822 079	65 244 587	364 149	292	1.678	9.956 482 517 067	83 103 219	350 [illegible]
1.629	9.952 845 066 666	65 608 735	363 857	290	1.679	9.956 565 620 286	83 453 310	349 [illegible]
1.630	9.952 910 675 402	65 972 593	363 567	291	1.680	9.956 649 073 596	83 803 132	349 [illegible]
1.631	9.952 976 647 995	66 336 160	363 276	291	1.681	9.956 732 876 728	84 152 685	349 [illegible]
1.632	9.953 042 984 155	66 699 436	362 985	290	1.682	9.956 817 029 413	84 501 969	349 [illegible]
1.633	9.953 109 683 591	67 062 421	362 695	289	1.683	9.956 901 531 382	84 850 982	348 [illegible]
1.634	9.953 176 746 012	67 425 116	362 406	291	1.684	9.956 986 382 364	85 199 726	348 [illegible]
1.635	9.953 244 171 128	67 787 522	362 115	286	1.685	9.957 071 582 090	85 548 201	348 [illegible]
1.636	9.953 311 958 650	68 149 637	361 829	291	1.686	9.957 157 130 291	85 896 408	347 [illegible]
1.637	9.953 380 108 287	68 511 466	361 538	287	1.687	9.957 243 026 699	86 244 349	347 [illegible]
1.638	9.953 448 619 753	68 873 004	361 251	285	1.688	9.957 329 271 048	86 592 022	347 [illegible]
1.639	9.953 517 492 757	69 234 255	360 966	288	1.689	9.957 415 863 070	86 939 428	347 [illegible]
1.640	9.953 586 727 012	69 595 221	360 678	287	1.690	9.957 502 802 498	87 286 569	346 [illegible]
1.641	9.953 656 322 233	69 955 899	360 391	286	1.691	9.957 590 089 067	87 633 442	346 [illegible]
1.642	9.953 726 278 132	70 316 290	360 105	286	1.692	9.957 677 722 509	87 980 049	346 [illegible]
1.643	9.953 796 594 422	70 676 395	359 819	285	1.693	9.957 765 702 558	88 326 392	346 [illegible]
1.644	9.953 867 270 817	71 036 214	359 534	284	1.694	9.957 854 028 950	88 672 470	345 [illegible]
1.645	9.953 938 307 031	71 395 748	359 250	285	1.695	9.957 942 701 420	89 018 282	345 [illegible]
1.646	9.954 009 702 779	71 754 998	358 965	283	1.696	9.958 031 719 702	89 363 833	345 [illegible]
1.647	9.954 081 457 777	72 113 963	358 682	284	1.697	9.958 121 083 535	89 709 119	345 [illegible]
1.648	9.954 153 571 740	72 472 645	358 398	283	1.698	9.958 210 792 654	90 054 140	344 [illegible]
1.649	9.954 226 044 385	72 831 043	358 115	282	1.699	9.958 300 846 794	90 398 898	344 [illegible]
1.650	9.954 298 875 428	73 189 158	357 833	283	1.700	9.958 391 245 692	90 743 396	344 [illegible]

Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
9.958 391 245 692	90 743 396	344 234	261	1.750	9.963 345 058 874	107 641 803	331 602	245
9.958 481 989 088	91 087 630	343 973	260	1.751	9.963 452 700 677	107 973 405	331 357	242
9.958 573 076 718	91 431 603	343 712	262	1.752	9.963 560 674 082	108 304 762	331 115	243
9.958 664 508 321	91 775 315	343 450	260	1.753	9.963 668 978 844	108 635 877	330 872	243
9.958 756 283 636	92 118 765	343 190	261	1.754	9.963 777 614 721	108 966 749	330 629	241
9.958 848 402 401	92 461 955	342 929	260	1.755	9.963 886 581 470	109 297 378	330 388	243
9.958 940 864 356	92 804 884	342 669	258	1.756	9.963 995 878 848	109 627 766	330 145	241
9.959 033 669 240	93 147 553	342 411	260	1.757	9.964 105 506 614	109 957 911	329 904	241
9.959 126 816 793	93 489 964	342 151	259	1.758	9.964 215 464 525	110 287 815	329 663	240
9.959 220 306 757	93 832 115	341 892	257	1.759	9.964 325 752 340	110 617 478	329 423	241
9.959 314 138 872	94 174 007	341 635	261	1.760	9.964 436 369 818	110 946 901	329 182	241
9.959 408 312 879	94 515 642	341 374	256	1.761	9.964 547 316 719	111 276 083	328 941	239
9.959 502 828 521	94 857 016	341 118	254	1.762	9.964 658 592 802	111 605 024	328 702	239
9.959 597 685 537	95 198 134	340 864	260	1.763	9.964 770 197 826	111 933 726	328 463	240
9.959 692 883 671	95 538 998	340 604	257	1.764	9.964 882 131 552	112 262 189	328 223	238
9.959 788 422 669	95 879 602	340 347	255	1.765	9.964 994 393 741	112 590 412	327 985	238
9.959 884 302 271	96 219 949	340 092	256	1.766	9.965 106 984 153	112 918 397	327 747	239
9.959 980 522 220	96 560 041	339 836	255	1.767	9 965 219 902 550	113 246 144	327 508	237
9.960 077 082 261	96 899 877	339 581	255	1.768	9.965 333 148 694	113 573 652	327 271	238
9.960 173 982 138	97 239 458	339 326	256	1.769	9.965 446 722 346	113 900 923	327 033	237
9.960 271 221 596	97 578 784	339 070	252	1.770	9.965 560 623 269	114 227 956	326 796	237
9.960 368 800 380	97 917 854	338 818	256	1.771	9 965 674 851 225	114 554 752	326 559	235
9.960 466 718 234	98 256 672	338 562	251	1.772	9.965 789 405 977	114 881 311	326 324	237
9.960 564 974 906	98 595 234	338 311	254	1.773	9.965 904 287 288	115 207 635	326 087	236
9.960 663 570 140	98 933 545	338 057	255	1.774	9.966 019 494 923	115 533 722	325 851	234
9.960 762 503 685	99 271 602	337 802	250	1.775	9.966 135 028 645	115 859 573	325 617	237
9.960 861 775 287	99 609 404	337 552	252	1.776	9.966 250 888 218	116 185 190	325 380	234
9.960 961 384 691	99 946 956	337 300	253	1.777	9.966 367 073 408	116 510 570	325 146	234
9.961 061 331 647	100 284 256	337 047	251	1.778	9.966 483 583 978	116 835 716	324 912	234
9.961 161 615 903	100 621 303	336 796	251	1.779	9.966 600 419 694	117 160 628	324 678	235
9.961 262 237 206	100 958 099	336 545	250	1.780	9.966 717 580 322	117 485 306	324 443	232
9.961 363 195 305	101 294 644	336 295	250	1.781	9.966 835 065 628	117 809 749	324 211	233
9.961 464 489 949	101 630 939	336 045	251	1.782	9.966 952 875 377	118 133 960	323 978	234
9.961 566 120 888	101 966 984	335 794	248	1.783	9.967 071 009 337	118 457 938	323 744	232
9.961 668 087 872	102 302 778	335 546	250	1.784	9.967 189 467 275	118 781 682	323 512	231
9.961 770 390 650	102 638 324	335 296	250	1.785	9.967 308 248 957	119 105 194	323 281	234
9.961 873 028 974	102 973 620	335 046	247	1.786	9.967 427 354 151	119 428 475	323 047	230
9.961 976 002 594	103 308 666	334 799	248	1.787	9.967 546 782 626	119 751 522	322 817	231
9.962 079 311 260	103 643 465	334 551	247	1.788	9.967 666 534 148	120 074 339	322 586	231
9.962 182 954 725	103 978 016	334 304	248	1.789	9.967 786 608 487	120 396 925	322 355	231
9.962 286 932 741	104 312 320	334 056	249	1.790	9.967 907 005 412	120 719 280	322 124	230
9.962 391 245 061	104 646 376	333 807	244	1.791	9 968 027 724 692	121 041 404	321 894	230
9.962 495 891 437	104 980 183	333 563	245	1.792	9 968 148 766 096	121 363 298	321 664	230
9.962 600 871 620	105 313 746	333 318	250	1.793	9 968 270 129 394	121 684 962	321 434	228
9 962 706 185 366	105 647 064	333 068	246	1.794	9.968 391 814 356	122 006 396	321 206	230
9.962 811 832 430	105 980 132	332 822	243	1 795	9 968 513 820 752	122 327 602	320 976	228
9.962 917 812 562	106 312 954	332 579	244	1.796	9 968 636 148 354	122 648 578	320 748	228
9.963 024 125 516	106 645 533	332 335	246	1.797	9.968 758 796 932	122 969 326	320 520	229
9.963 130 771 049	106 977 868	332 089	243	1.798	9.968 881 766 258	123 289 846	320 291	227
9.963 237 748 917	107 309 957	331 846	244	1.799	9.969 005 056 104	123 610 137	320 064	228
9.963 345 058 874	107 641 803	331 602	245	1.800	9.969 128 666 241	123 930 201	319 836	226

a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.
1.800	9.969 128 666 241	123 930 201	319 836	226	1.850	9.975 712 596 599	139 649 881	308 [illegible]
1.801	9.969 252 596 442	124 250 037	319 610	228	1.851	9.975 852 246 480	139 958 737	308 [illegible]
1.802	9.969 376 846 479	124 569 647	319 382	225	1.852	9.975 992 205 217	140 267 379	308 [illegible]
1.803	9.969 501 416 126	124 889 029	319 157	227	1.853	9.976 132 472 596	140 575 811	308 [illegible]
1.804	9.969 626 305 155	125 208 186	318 930	225	1.854	9.976 273 048 407	140 884 031	308 [illegible]
1.805	9.969 751 513 341	125 527 116	318 705	227	1.855	9.976 413 932 438	141 192 039	307 [illegible]
1.806	9.969 877 040 457	125 845 821	318 478	225	1.856	9.976 555 124 477	141 499 836	307 [illegible]
1.807	9.970 002 886 278	126 164 299	318 253	223	1.857	9.976 696 624 313	141 807 422	307 [illegible]
1.808	9.970 129 050 577	126 482 552	318 030	226	1.858	9.976 838 431 735	142 114 799	307 [illegible]
1.809	9.970 255 533 129	126 800 582	317 804	224	1.859	9.976 980 546 534	142 421 965	306 [illegible]
1.810	9.970 382 333 711	127 118 386	317 580	224	1.860	9.977 122 968 499	142 728 920	306 [illegible]
1.811	9.970 509 452 097	127 435 966	317 356	223	1.861	9.977 265 697 419	143 035 667	306 [illegible]
1.812	9.970 636 888 063	127 753 322	317 133	224	1.862	9.977 408 733 086	143 342 204	306 [illegible]
1.813	9.970 764 641 385	128 070 455	316 909	223	1.863	9.977 552 075 290	143 648 532	306 [illegible]
1.814	9.970 892 711 840	128 387 364	316 686	223	1.864	9.977 695 723 822	143 954 651	305 [illegible]
1.815	9.971 021 099 204	128 704 050	316 463	222	1.865	9.977 839 678 473	144 260 561	305 [illegible]
1.816	9.971 149 803 254	129 020 513	316 241	222	1.866	9.977 983 939 034	144 566 264	305 [illegible]
1.817	9.971 278 823 767	129 336 754	316 019	222	1.867	9.978 128 505 298	144 871 759	305 [illegible]
1.818	9.971 408 160 521	129 652 773	315 797	221	1.868	9.978 273 377 057	145 177 045	305 [illegible]
1.819	9.971 537 813 294	129 968 570	315 576	222	1.869	9.978 418 554 102	145 482 123	304 [illegible]
1.820	9.971 667 781 864	130 284 146	315 354	221	1.870	9.978 564 036 225	145 786 995	304 [illegible]
1.821	9.971 798 066 010	130 599 500	315 133	220	1.871	9.978 709 823 220	146 091 662	304 [illegible]
1.822	9.971 928 665 510	130 914 633	314 913	221	1.872	9.978 855 914 882	146 396 120	304 [illegible]
1.823	9.972 059 580 143	131 229 546	314 692	219	1.873	9.979 002 311 002	146 700 373	304 [illegible]
1.824	9.972 190 809 689	131 544 238	314 473	220	1.874	9.979 149 011 375	147 004 419	303 [illegible]
1.825	9.972 322 353 927	131 858 711	314 253	220	1.875	9.979 296 015 794	147 308 259	303 [illegible]
1.826	9.972 454 212 638	132 172 964	314 033	219	1.876	9.979 443 324 053	147 611 894	303 [illegible]
1.827	9.972 586 385 602	132 486 997	313 814	219	1.877	9.979 590 935 947	147 915 324	303 [illegible]
1.828	9.972 718 872 599	132 800 811	313 595	217	1.878	9.979 738 851 271	148 218 548	303 [illegible]
1.829	9.972 851 673 410	133 114 406	313 378	220	1.879	9.979 887 069 819	148 521 569	302 [illegible]
1.830	9.972 984 787 816	133 427 784	313 158	217	1.880	9.980 035 591 388	148 824 384	302 [illegible]
1.831	9.973 118 215 600	133 740 942	312 941	218	1.881	9.980 184 415 772	149 126 996	302 [illegible]
1.832	9.973 251 956 542	134 053 883	312 723	218	1.882	9.980 333 542 768	149 429 403	302 [illegible]
1.833	9.973 386 010 425	134 366 606	312 505	216	1.883	9.980 482 972 171	149 731 607	302 [illegible]
1.834	9.973 520 377 031	134 679 111	312 289	216	1.884	9.980 632 703 778	150 033 608	301 [illegible]
1.835	9.973 655 056 142	134 991 400	312 073	219	1.885	9.980 782 737 386	150 335 405	301 [illegible]
1.836	9.973 790 047 542	135 303 473	311 854	214	1.886	9 980 933 072 791	150 637 000	301 [illegible]
1.837	9.973 925 351 015	135 615 327	311 640	217	1.887	9.981 083 709 791	150 938 392	301 [illegible]
1.838	9.974 060 966 342	135 926 967	311 423	215	1.888	9.981 234 648 183	151 239 581	300 [illegible]
1.839	9.974 196 893 309	136 238 390	311 208	216	1.889	9.981 385 887 764	151 540 569	300 [illegible]
1.840	9.974 333 131 699	136 549 598	310 992	214	1.890	9.981 537 428 333	151 841 355	300 [illegible]
1.841	9.974 469 681 297	136 860 590	310 778	215	1.891	9.981 689 269 688	152 141 940	300 [illegible]
1.842	9.974 606 541 887	137 171 368	310 563	215	1.892	9.981 841 411 628	152 442 322	300 [illegible]
1.843	9.974 743 713 255	137 481 931	310 348	214	1.893	9.981 993 853 950	152 742 505	299 [illegible]
1.844	9.974 881 195 186	137 792 279	310 134	214	1.894	9.982 146 596 455	153 042 486	299 [illegible]
1.845	9.975 018 987 465	138 102 413	309 920	213	1.895	9.982 299 638 941	153 342 267	299 [illegible]
1.846	9.975 157 089 878	138 412 333	309 707	213	1.896	9.982 452 981 208	153 641 848	299 [illegible]
1.847	9 975 295 502 211	138 722 040	309 494	214	1.897	9.982 606 623 056	153 941 229	299 [illegible]
1.848	9.975 434 224 251	139 031 534	309 280	213	1.898	9.982 760 564 285	154 240 409	298 [illegible]
1.849	9.975 573 255 785	139 340 814	309 067	211	1.899	9.982 914 804 694	154 539 392	298 [illegible]
1.850	9.975 712 596 599	139 649 881	308 856	214	1.900	9.983 069 344 086	154 838 173	298 [illegible]

Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
9.983 069 344 086	154 838 173	298 585	201	1.950	9.991 173 182 172	169 528 926	288 957	187
9.983 224 182 259	155 136 758	298 384	197	1.951	9.991 342 711 098	169 817 883	288 770	185
9.983 379 319 017	155 435 142	298 187	199	1.952	9.991 512 528 981	170 106 653	288 585	187
9.983 534 754 159	155 733 329	297 988	197	1.953	9.991 682 635 634	170 395 238	288 398	187
9.983 690 487 488	156 031 317	297 791	199	1.954	9.991 853 030 872	170 683 636	288 211	185
9.983 846 518 805	156 329 108	297 592	196	1.955	9.992 023 714 508	170 971 847	288 026	185
9.984 002 847 913	156 626 700	297 396	198	1.956	9.992 194 686 355	171 259 873	287 841	184
9.984 159 474 613	156 924 096	297 198	195	1.957	9.992 365 946 228	171 547 714	287 657	185
9.984 316 398 709	157 221 294	297 003	199	1.958	9.992 537 493 942	171 835 371	287 472	184
9.984 473 620 003	157 518 297	296 804	196	1.959	9.992 709 329 313	172 122 843	287 288	185
9.984 631 138 300	157 815 101	296 608	195	1.960	9.992 881 452 156	172 410 131	287 103	184
9.984 788 953 401	158 111 709	296 413	197	1.961	9.993 053 862 287	172 697 234	286 919	184
9.984 947 065 110	158 408 122	296 216	195	1.962	9 993 226 559 521	172 984 153	286 735	183
9.985 105 473 232	158 704 338	296 021	195	1.963	9.993 399 543 674	173 270 888	286 552	184
9.985 264 177 570	159 000 359	295 826	196	1.964	9.993 572 814 562	173 557 440	286 368	183
9.985 423 177 929	159 296 185	295 630	194	1.965	9.993 746 372 002	173 843 808	286 185	183
9.985 582 474 114	159 591 815	295 436	195	1.966	9.993 920 215 810	174 129 993	286 002	183
9.985 742 065 929	159 887 251	295 241	194	1.967	9.994 094 345 803	174 415 995	285 819	182
9.985 901 953 180	160 182 492	295 047	195	1.968	9.994 268 761 798	174 701 814	285 637	182
9.986 062 135 672	160 477 539	294 852	193	1.969	9.994 443 463 612	174 987 451	285 455	182
9.986 222 613 211	160 772 391	294 659	194	1.970	9.994 618 451 063	175 272 906	285 273	182
9.986 383 385 602	161 067 050	294 465	193	1.971	9.994 793 723 969	175 558 179	285 091	182
9.986 544 452 652	161 361 515	294 272	193	1.972	9.994 969 282 148	175 843 270	284 909	180
9.986 705 814 167	161 655 787	294 079	194	1 973	9.995 145 125 418	176 128 179	284 729	183
9.986 867 469 954	161 949 866	293 885	191	1.974	9.995 321 253 597	176 412 908	284 546	179
9.987 029 419 820	162 243 751	293 694	194	1.975	9.995 497 666 505	176 697 454	284 367	182
9.987 191 663 571	162 537 445	293 500	191	1.976	9.995 674 363 959	176 981 821	284 185	181
9.987 354 201 016	162 830 945	293 309	192	1.977	9.995 851 345 780	177 266 006	284 004	178
9.987 517 031 961	163 124 254	293 117	192	1.978	9.996 028 611 786	177 550 010	283 826	181
9.987 680 156 215	163 417 371	292 925	192	1.979	9.996 206 161 796	177 833 836	283 645	181
9.987 843 573 586	163 710 296	292 733	189	1.980	9.996 383 995 632	178 117 481	283 464	177
9.988 007 283 882	164 003 029	292 544	194	1.981	9.996 562 113 113	178 400 945	283 287	182
9.988 171 286 911	164 295 573	292 350	188	1.982	9.996 740 514 058	178 684 232	283 105	177
9.988 335 582 484	164 587 923	292 162	191	1.983	9.996 919 198 290	178 967 337	282 928	181
9.988 500 170 407	164 880 085	291 971	191	1.984	9.997 098 165 627	179 250 265	282 747	176
9.988 665 050 492	165 172 056	291 780	190	1.985	9.997 277 415 892	179 533 012	282 571	181
9.988 830 222 548	165 463 836	291 590	188	1.986	9.997 456 948 904	179 815 583	282 390	176
9.988 995 686 384	165 755 426	291 402	192	1.987	9.997 636 764 487	180 097 973	282 214	180
9.989 161 441 810	166 046 828	291 210	187	1.988	9.997 816 862 460	180 380 187	282 034	176
9.989 327 488 638	166 338 038	291 023	191	1.989	9.997 997 242 647	180 662 221	281 858	179
9.989 493 826 676	166 629 061	290 832	187	1.990	9.998 177 904 868	180 944 079	281 679	177
9.989 660 455 737	166 919 893	290 645	189	1.991	9.998 358 848 947	181 225 758	281 502	176
9.989 827 375 630	167 210 538	290 456	188	1.992	9.998 540 074 705	181 507 260	281 326	179
9.989 994 586 168	167 500 994	290 268	189	1.993	9.998 721 581 965	181 788 586	281 147	174
9.990 162 087 162	167 791 262	290 079	188	1.994	9.998 903 370 551	182 069 733	280 973	179
9.990 329 878 424	168 081 341	289 891	186	1.995	9.999 085 440 284	182 350 706	280 794	175
9.990 497 959 765	168 371 232	289 705	188	1.996	9.999 267 790 990	182 631 500	280 619	176
9.990 666 330 997	168 660 937	289 517	187	1.997	9.999 450 422 490	182 912 119	280 443	176
9.990 834 991 934	168 950 454	289 330	188	1.998	9.999 633 334 609	183 192 562	280 267	176
9.991 003 942 388	169 239 784	289 142	185	1.999	9.999 816 527 171	183 472 829	280 091	175
9.991 173 182 172	169 528 926	288 957	187	2.000	0.000 000 000 000	183 752 920	279 916	175

CHAPITRE XVII.

Sur les Intégrales Eulériennes indéfinies de la seconde espèce.

158. Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'intégrale définie $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, terminée à la valeur $x=1$, et nous l'avons désignée par Γa; nous allons maintenant nous occuper de l'intégrale indéfinie qui se présente dans un assez grand nombre de recherches, et qui offre des difficultés particulières lorsqu'on veut la déterminer avec un certain degré de précision pour de très petites valeurs de x. Nous prendrons de là occasion de résoudre, tant par des formules que par des Tables suffisamment étendues, le cas de $a=0$ et celui de $a=\frac{1}{2}$, qui sont ceux des transcendantes $\int\frac{dx}{l\frac{1}{x}}$, $\int\frac{dx}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$, sur lesquelles plusieurs géomètres se sont exercés.

§ I. *Formules diverses pour évaluer par approximation l'Intégrale indéfinie* $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$.

159. Nous représenterons par $\Gamma(a, x)$ l'intégrale indéfinie $\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à une valeur quelconque de x; et dans cette dénomination $\Gamma(a, 1)$ sera la même chose que l'intégrale définie déjà désignée par Γa.

Cela posé, l'intégration par parties donnera la formule

$$\Gamma(a, x)=x\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}+(a-1)\,\Gamma(a-1, x), \qquad (48)$$

d'où il suit que l'intégrale $\Gamma(a, x)$ peut toujours se ramener à une intégrale semblable dans laquelle a est compris entre 1 et 2, ainsi que nous l'avons fait pour l'intégrale définie Γa.

Cette même formule donnerait la valeur exacte de $\Gamma(a, x)$, si a était un nombre entier; ainsi on aurait successivement

$$\Gamma(1, x) = x,$$

$$\Gamma(2, x) = x \log \frac{1}{x} + x,$$

$$\Gamma(3, x) = x\left(\log \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \log \frac{1}{x} + 2x,$$

$$\Gamma(4, x) = x\left(\log \frac{1}{x}\right)^3 + 3\Gamma(3, x), \text{ etc.}$$

Nous n'avons donc à nous occuper que des seuls cas où a est un nombre fractionnaire ou irrationnel.

160. Soit $\log \frac{1}{x} = z$, on aura la transformée $\Gamma(a, x) = \int -z^{a-1} e^{-z} dz$, d'où résulte en développant l'exponentielle et intégrant,

$$\Gamma(a, x) = \Gamma a - \frac{z^a}{a} + \frac{z^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{a+2}}{a+2} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{z^{a+3}}{a+3} - \text{etc.}; \quad (49)$$

cette formule donne la valeur de $\Gamma(a, x)$ par une suite qui peut être divergente dans les premiers termes, et d'autant plus divergente que x est plus petit, mais qui finit toujours par être convergente.

Cette suite est convergente dès les premiers termes, si x n'est pas plus petit que $\frac{1}{e}$; elle peut néanmoins être employée avec succès pour des valeurs beaucoup plus petites de x, telles que $x = \frac{1}{10}$, ou même $x = \frac{1}{20}$; mais alors il faudra calculer un assez grand nombre de termes de la série. Par exemple, si $x = 0.1$, il faudra calculer douze à treize termes de la série pour avoir la valeur de l'intégrale approchée jusqu'à la cinquième ou la sixième décimale. On trouve de cette manière $\Gamma(\frac{1}{2}, 0.1) = 0.056497$.

A mesure que x devient plus petit, il faudra prolonger plus loin la suite pour obtenir un égal degré d'approximation, de sorte qu'il convient de recourir à un autre moyen pour évaluer l'intégrale avec précision, lorsque x est très petit, tel que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc.

161. Il semble qu'on pourrait calculer l'intégrale $\Gamma(a, x)$, lorsque x est très petit, au moyen de la formule (48) qui donne par des transformations successives

$$\Gamma(a, x) = x[z^{a-1} + (a-1)z^{a-2} + (a-1)(a-2)z^{a-3} + \text{etc.}] \quad (50)$$

Cette série étant continuée suffisamment, ses termes deviendront alternativement positifs et négatifs, de sorte qu'on aura des valeurs alternativement plus grandes et plus petites que l'intégrale cherchée. Mais, comme la suite, qui est d'abord convergente, devient nécessairement divergente après un certain nombre de termes, il faudra s'arrêter au point où la divergence commence, et on n'aura ainsi qu'une approximation bornée qui pourrait être insuffisante.

Si on appelle P^n le terme de rang n dans la formule (50) et P^{n+1} le terme suivant, on aura $P^{n+1}=\frac{a-n}{z}P^n$; ainsi la divergence commence lorsqu'on aura $n=$ ou $>a+z$, et alors la suite ne devra pas être prolongée plus loin.

162. Soit, par exemple, $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{100}$, on aura $z=\log 100=4.60517$, et $a+z=5.1$. Ainsi la suite ne devra pas être prolongée au-delà des 5 ou 6 premiers termes. En effet, on a en faisant $z=\log 100$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{100}\left(z^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}+\frac{1.3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}}-\frac{1.3.5}{2.2.2}z^{-\frac{7}{2}}+\text{etc.}\right),$$

et par le calcul de termes successifs, on trouve

$$\begin{aligned}
z^{-\frac{1}{2}} &= 0.465991\\
-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} &= -\underline{0.050594}\\
&0.415397\\
+\frac{1.3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}} &= +\underline{0.016479}\\
&0.431876\\
-\frac{1.3.5}{2.2.2}z^{-\frac{7}{2}} &= -\underline{0.008946}\\
&0.422930\\
+\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}z^{-\frac{9}{2}} &= +\underline{0.006799}\\
&0.429729\\
-\frac{1.3.5.7.9}{2.2.2.2.2}z^{-\frac{11}{2}} &= -\underline{0.006644}\\
&0.423085\\
+\frac{1.3\ldots\ldots 11}{2.2\ldots\ldots 2}z^{-\frac{13}{2}} &= +0.007935.
\end{aligned}$$

On voit qu'il est inutile d'aller plus loin que le sixième terme, puisque la suite devient divergente à compter de ce terme.

Il résulte de ce calcul que la somme cherchée est plus grande que 0.423085, et plus petite que 0.429729. Par un milieu, on trouve la somme

82..

de la suite $= 0.426407$, et on voit qu'on ne peut compter sur plus de quatre décimales exactes dans cette évaluation ; il en résulte pour la valeur de l'intégrale cherchée, $\Gamma(a, x) = 0.004264$.

163. Si en prenant toujours $a = \frac{1}{2}$, on eût fait $x = \frac{1}{1000}$, on aurait vu d'abord que la suite ne doit être prolongée que jusqu'au neuvième terme, et par le calcul effectif des termes, on aurait trouvé que l'intégrale cherchée est comprise entre $x \times 0.357708$ et $x \times 0.357173$. Le milieu est $x \times 0.35744$; d'où résulte l'intégrale $\Gamma(a, x) = 0.00035744$.

En général la formule (3) donnera d'autant plus de précision, que x sera plus petit; mais cette précision ne s'obtiendra que par le calcul d'un plus grand nombre de termes, puisque pour tirer de la suite toute l'approximation qu'elle peut offrir, il faut la prolonger jusqu'à ce que le nombre de ses termes soit $a + z$ ou $a + \log \frac{1}{x}$.

Si on appliquait la formule (3) au cas de $x = \frac{1}{10}$ déjà résolu par la formule (2), on trouverait que la suite cesse d'être convergente au quatrième terme. Les deux premiers termes donnent $\Gamma > x \times 0.5159$, et les trois premiers donnent $\Gamma < x \times 0.6091$; il en résulte par un milieu, $\Gamma = x \times 0.5625 = 0.05625$, tandis que la vraie valeur est 0.056497. Il convient donc de préférer la formule (2) lorsqu'on voudra avoir au moins quatre chiffres significatifs exacts, et que la valeur de x ne sera pas plus petite que 0.01. Nous verrons ci-après quels sont les moyens d'obtenir une approximation plus grande ou même indéfinie.

164. Jusqu'ici nous avons supposé tacitement que x ne surpasse pas l'unité; mais on peut aussi demander l'intégrale $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$ pour une valeur de x plus grande que l'unité. La partie comprise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est connue et représentée par $\Gamma(a)$; ainsi tout se réduit à trouver l'intégrale depuis $x = 1$ jusqu'à une valeur quelconque de $x > 1$.

Remarquons d'abord que dans tout cet intervalle, $l\left(\frac{1}{x}\right)$ étant négatif, il faudra mettre l'intégrale sous la forme $(-1)^{a-1}\int dx (lx)^{a-1}$. Je fais abstraction du facteur $(-1)^{a-1}$ qui peut être réel ou imaginaire, suivant les diverses valeurs de a, et je considère simplement l'intégrale $\int dx\,(lx)^{a-1}$ que je désigne par $\psi(a, x)$, et qui est supposée nulle lorsque $x = 1$.

Si on fait $lx = u$, on aura $x = e^u$, et l'intégrale dont il s'agit deviendra

$\int u^{a-1}du.e^u = \int u^{a-1}du(1+u+\frac{1}{2}u^2+\text{etc.})$; d'où l'on tire

$$\psi(a,x) = \frac{u^a}{a} + \frac{u^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{a+2}}{a+2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{u^{a+3}}{a+3} + \text{etc.}, \quad (51)$$

formule où il n'y a pas de constante à ajouter, parce qu'elle s'évanouit lorsque $x=1$.

La suite comprise dans cette intégrale pourra être divergente dans les premiers termes; mais elle finira toujours par être convergente. Ainsi on en tirera dans tous les cas une valeur aussi approchée qu'on voudra de la vraie intégrale, et il est visible que cette valeur deviendra infinie si on fait $x=\infty$.

165. On peut encore mettre $\psi(a,x)$ sous une forme plus commode. Soit $\int u^{a-1}du.e^u = Pe^u$, on aura $u^{a-1} = P + \frac{dP}{du}$; soit ensuite $P = \frac{u^a}{a} + Au^{a+1} + Bu^{a+2} + \text{etc.}$, on trouvera $A = -\frac{1}{a(a+1)}$, $B = \frac{1}{a(a+1)(a+2)}$, etc.; donc

$$\psi(a,x) = x\left(\frac{u^a}{a} - \frac{u^{a+1}}{a(a+1)} + \frac{u^{a+2}}{a(a+1)(a+2)} - \text{etc.}\right), \quad (52)$$

série qui aura, comme la précédente, la propriété de devenir toujours convergente, mais qui aura de plus l'avantage de donner des valeurs alternativement plus grandes et plus petites que l'intégrale cherchée; de sorte que le degré d'approximation sera connu dans chaque cas par la différence de deux termes consécutifs.

§ II. *De l'Intégrale* $Z = \int \frac{dx}{\log\frac{1}{x}}$, *prise à compter de* $x=0$.

166. Cette formule résulte de la formule générale en faisant $a=0$; soit alors $l\frac{1}{x}=z$ ou $x=e^{-z}$, on aura la transformée $Z = \int -e^{-z}.\frac{dz}{z}$, qu'il faudra prendre depuis $z=\infty$ jusqu'à $z=l\frac{1}{x}$; substituant au lieu de e^{-z} sa valeur développée et intégrant, on aura

$$Z = -C - lz + z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{z^3}{3} - \text{etc.} \quad (53)$$

La condition, pour déterminer la constante C, est que Z s'évanouisse lorsque $z=\infty$; mais les quantités infinies que cette supposition introduit ne permettent d'en tirer aucun résultat et il faut recourir à d'autres moyens.

167. Considérons pour cet effet l'intégrale

$$V = \int \left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{\log \frac{1}{x}} \right),$$

prise de même à compter de $x = 0$, nous aurons $V = -\log(1-x) - Z$, et par conséquent

$$V = C' + \log\left(\frac{z}{1-x}\right) - z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{z^3}{3} + \text{etc.} \qquad (54)$$

Il suffit de connaître la valeur de V dans un cas particulier pour déterminer la constante C'; or, si on fait $x = 1 - \omega$, ω étant infiniment petit, on aura $\frac{z}{1-x} = -\frac{\log(1-\omega)}{\omega} = 1$, de sorte qu'on aura dans ce cas $V = C'$. Mais par la formule de l'art. 129, on a dans le même cas $V = C$; donc $C' = C$, C étant le nombre connu dans la théorie des fonctions Γ, dont la valeur calculée avec quelques décimales de plus que dans l'article 86, est

$$C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86061\ 811209.$$

Cela posé, la formule (53) fera connaître l'intégrale Z par une suite d'autant plus convergente que x sera plus près de l'unité; lorsqu'on fait $x = 1$, on a $z = 0$, et par conséquent Z devient infini; mais cet infini n'est que logarithmique; car en faisant $x = 1 - \omega$, ω étant infiniment petit, on a $Z = \log\frac{1}{\omega} - C + \frac{1}{2}\omega$.

168. A mesure que x diminue, z ou $\log\frac{1}{x}$ augmente de plus en plus, et la suite contenue dans la formule (53) devient de moins en moins convergente; elle peut même devenir divergente dans les premiers termes, lorsqu'on veut déterminer l'intégrale Z pour une très petite valeur de x, mais elle finit toujours par être convergente après un certain nombre de termes. Soit P le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite $z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{z^3}{3} - \text{etc.}$, et P' le terme suivant, on aura, en général, $P' = \frac{nz}{(n+1)^2}P$; ainsi la convergence de la suite aura lieu au plus tard dès qu'on aura $n =$ ou $> z$. Par exemple, si l'on a $x = e^{-10} = 0.0000454$, ce qui donne $z = 10$, la série sera convergente au dixième terme, ou même dès le neuvième, puisqu'en faisant $n = 8$, on a $\frac{nz}{(n+1)^2} = \frac{80}{81}$. Mais on voit en même temps que la grandeur des termes qui précèdent le point de convergence, et celle d'un assez grand

nombre de termes suivans, rendent très difficile le calcul par la formule (53) de la fonction Z, pour une valeur de x aussi petite qu'on l'a supposée, et la difficulté augmenterait toujours à mesure que x serait supposé plus petit.

169. Pour obvier à cet inconvénient, on pourrait faire usage de la méthode des quadratures; mais on peut aussi, par d'autres formules, éviter ces calculs de quadrature, qui sont toujours très longs, surtout dans le cas dont il s'agit, si l'on voulait obtenir un certain degré d'approximation. Et d'abord la formule (50) donne, pour le cas de $a = 0$,

$$Z = \frac{x}{z} - \frac{x}{z^2} + \frac{2x}{z^3} - \frac{2.3x}{z^4} + \frac{2.3.4x}{z^5} - \text{etc.}, \tag{55}$$

formule qui sera d'autant plus convergente dans les premiers termes, que z sera plus grand. Mais comme le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série est égal au précédent multiplié par $\frac{n-1}{z}$, on voit que la suite deviendra divergente dès qu'on aura $n - 1 > z$. Ainsi, dans le cas de $z = 10$, dont nous avons déjà parlé, la suite sera divergente dès le douzième terme.

Pour apprécier le degré d'exactitude que donnerait la formule, dans le cas dont il s'agit, il faut observer que dans une suite telle que la précédente, qui doit s'arrêter aux termes à peu près égaux $T - T'$, la somme totale est connue, à une différence près de $\frac{1}{2}$ T environ. En général, soit $x = e^{-n}$ ou $z = n$, l'erreur sur la valeur de Z aura pour limite.... $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3.4\ldots\ldots n-1}{n^n} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma n}{n^n} \cdot e^{-n}$, ce qui donne en logarithmes vulgaires $\log \varepsilon = -2mn - \frac{1}{2} ln + \frac{1}{2} l\frac{1}{2}\pi$, m étant le module 0.43429, etc. Il s'ensuit que la valeur de Z déduite de la formule (55) sera exacte jusqu'à la décimale de l'ordre k, si l'on a $k = 2mn + \frac{1}{2} ln - \frac{1}{2} l\frac{1}{2}\pi$, et par conséquent si $-mn$ ou $\log x = -\frac{1}{2} k + \frac{1}{4} l\frac{Mk}{\pi}$.

L'approximation obtenue par la formule (55) est donc de plus en plus grande, à mesure que z est plus grand ou x plus petit; elle donne neuf décimales exactes pour la valeur $z = 10$ ou $x = 0.0000454$, mais à mesure que x augmente, l'approximation diminue et devient bientôt insuffisante, comme on l'a vu dans le cas de $x = 0.01$ (art. 162).

Il nous reste à démontrer une troisième formule dont l'application s'étend depuis les plus petites valeurs de x jusqu'à celles qui permettent d'employer avec avantage la formule (53). Cette troisième formule, qui s'exprime en fraction continue, est connue depuis long-temps des Analystes; mais ils ne se sont point occupés d'en rendre le calcul facile, ni de fixer le degré de précision dont elle est susceptible, suivant le nombre de termes auquel on veut s'arrêter.

§ III. *Expression de l'Intégrale* $\Gamma(a, x)$ *en fraction continue.*

170. Considérons en général la fonction $Z = \Gamma(a, x) = \int z^{a-1} dx$, dans laquelle nous supposerons a positif et plus petit que l'unité, ce que l'on peut toujours obtenir par l'application de la formule (48); l'intégrale Z étant prise à compter de $x = 0$, la quantité z^{a-1}, où $a - 1$ est négatif, sera plus grande pour la dernière valeur de x que pour les valeurs précédentes, de sorte qu'on aura toujours $Z = z^{a-1} x T$, T étant en général une quantité plus petite que l'unité, mais qui se réduit à l'unité lorsqu'on suppose x infiniment petit. Si l'on différencie cette équation et qu'on substitue les valeurs $dZ = z^{a-1} dx$, $dx = -x dz$, on aura, pour déterminer T, l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dz} - (1 - a)\frac{T}{z} - T + 1 = 0,$$

qu'il conviendra de mettre sous la forme suivante, en faisant $z = \frac{1}{\zeta}$,

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{(1-a)\zeta + 1}{T} - \frac{1}{T^2} = 0. \tag{56}$$

171. Considérons plus généralement l'équation différentielle

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{\alpha\zeta + 1}{T} + \mathrm{6}\zeta - \frac{1}{T^2} = 0, \tag{57}$$

dans laquelle α et $\mathrm{6}$ sont des coefficiens constans; si l'on fait $\frac{1}{T} = 1 + k\zeta T'$, on aura la transformée

$$\zeta^2\left(kT' + k\zeta \cdot \frac{dT'}{d\zeta}\right) - (\alpha + \mathrm{6})\zeta + (1 - \alpha\zeta)k\zeta T' - k^2\zeta^2 T'^2 = 0.$$

Le coefficient k étant arbitraire, on peut faire $k = \alpha + \mathrm{6}$; alors divisant tout par $k\zeta T'^2$, on aura

$$\frac{\zeta^2 dT'}{T'^2 d\zeta} + \frac{(1-\alpha)\zeta + 1}{T'} + (\alpha + \mathrm{6})\zeta - \frac{1}{T'^2} = 0.$$

Cette transformée est entièrement semblable à la proposée, puisqu'en faisant $\alpha' = 1 - \alpha$, $\mathrm{6}' = \alpha + \mathrm{6}$, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\zeta^2 dT'}{T'^2 d\zeta} + \frac{\alpha'\zeta + 1}{T'} + \mathit{6}'\zeta - \frac{1}{T'^2} = 0,$$

et on aura en même temps $k = \mathit{6}'$.

172. Il suit de là que, par des substitutions répétées, on obtiendra des transformées successives en T', T'', T''', etc., qui seront liées entre elles et dont les coefficiens seront déterminés par les équations suivantes:

$$\frac{1}{T} = 1 + \mathit{6}'\zeta T', \qquad \alpha' = 1 - \alpha, \qquad \mathit{6}' = \alpha + \mathit{6},$$

$$\frac{1}{T'} = 1 + \mathit{6}''\zeta T'', \qquad \alpha'' = \alpha, \qquad \mathit{6}'' = 1 + \mathit{6},$$

$$\frac{1}{T''} = 1 + \mathit{6}'''\zeta T''', \qquad \alpha''' = 1 - \alpha, \qquad \mathit{6}''' = 1 + \alpha + \mathit{6},$$

$$\frac{1}{T'''} = 1 + \mathit{6}^{\text{iv}}\zeta T^{\text{iv}}, \qquad \alpha^{\text{iv}} = \alpha, \qquad \mathit{6}^{\text{iv}} = 2 + \mathit{6}, \text{ etc.}$$

On pourra donc exprimer la fonction T par cette fraction continue

$$T = 1 : (1 + (\alpha + \mathit{6}) : \zeta(1 + (1 + \mathit{6})\zeta : (1 + (1 + \alpha + \mathit{6})\zeta : (1 + (2 + \mathit{6})\zeta : (1 + \text{etc.}, \quad (58)$$

où il faut remarquer que les dénominateurs des fractions composantes sont tous égaux à l'unité, et que les numérateurs forment la suite

$$(\alpha + \mathit{6})\zeta,\ (1 + \mathit{6})\zeta,\ (1 + \alpha + \mathit{6})\zeta,\ (2 + \mathit{6})\zeta,\ (2 + \alpha + \mathit{6})\zeta, \text{ etc.},$$

dont la loi est telle, que les termes croissent alternativement de $(1 - \alpha)\zeta$ et de $\alpha\zeta$.

Cette expression sera l'intégrale de l'équation différentielle (57), si toutefois la fonction cherchée T doit se réduire à l'unité lorsque $\zeta = 0$.

173. Cette condition étant remplie dans l'équation proposée (56), il y aura lieu de lui appliquer la formule (58); c'est pourquoi faisant $\alpha = 1 - a$, $\mathit{6} = 0$, on aura, pour l'intégrale générale $Z = \int z^{a-1} dx$, cette expression en fraction continue :

$$Z = xz^{a-1} : (1 + (1 - a)\zeta : (1 + \zeta : (1 + (2 - a)\zeta : (1 + 2\zeta : (1 + (3 - a)\zeta + \text{etc.}, \quad (59)$$

où l'on voit que les numérateurs des fractions composantes forment la suite $(1 - a)\zeta$, ζ, $(2 - a)\zeta$, 2ζ, $(3 - a)\zeta$, 3ζ, $(4 - a)\zeta$, etc., dont les termes croissent alternativement de $a\zeta$ et de $(1 - a)\zeta$.

§ IV. *Application à l'Intégrale* $\Gamma(0, x)$.

174. Maintenant si l'on fait $a = 0$, on aura, pour le cas particulier de l'intégrale $Z = \int \frac{dx}{z}$, cette troisième formule

$$Z = x\zeta : (1 + \zeta : (1 + \zeta : (1 + 2\zeta : (1 + 2\zeta : (1 + 3\zeta : (1 + \text{etc.} \qquad (60),$$

où l'on voit que les numérateurs ζ, ζ, 2ζ, 2ζ, 3ζ, 3ζ, 4ζ, etc., croissent alternativement de o et de ζ.

Il n'y aura lieu d'employer cette formule que pour de très petites valeurs de x, qui laissent encore ζ assez petit; car, par exemple, pour la valeur $x = \frac{1}{e^4} = 0.0183$, qui donne $s = 4$ et $\zeta = \frac{1}{4}$, on pourra employer indifféremment la formule (53), qui ne cesse pas d'être convergente, ou la formule (60); le choix de l'une ou de l'autre dépend encore du degré d'approximation qu'on veut atteindre, et qui s'obtiendra plus facilement, tantôt par une formule, tantôt par l'autre. Pour mieux en juger, il faut faire voir quelle est la meilleure manière de calculer des fractions continues telles que la formule (60), dans laquelle les numérateurs augmentent à l'infini, tandis que les dénominateurs restent égaux à l'unité.

175. Soient $\frac{P^\circ}{Q^\circ}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ les trois fractions consécutives qui résultent du calcul de la fraction continue, exécuté suivant les règles ordinaires en s'arrêtant à la fraction composante $\frac{\mu}{1}$; on aura, d'après la loi connue,

$$P' = P + \mu P^\circ, \quad Q' = Q + \mu Q^\circ; \quad \text{de là } P'Q - PQ' = \mu(P^\circ Q - PQ^\circ),$$

ou

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = -\frac{\mu Q^\circ}{Q'}\left(\frac{P}{Q} - \frac{P^\circ}{Q^\circ}\right).$$

Supposons la différence $\frac{P}{Q} - \frac{P^\circ}{Q^\circ}$ positive $= R^\circ$; on voit que la différence suivante $\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q}$ sera négative; en l'appelant $-R$, on aura

$$R = \frac{\mu Q^\circ}{Q'} \cdot R^\circ.$$

On parviendra donc à la valeur $\frac{P'}{Q'}$, en calculant par cette formule une suite de différences $r, r', r'' \ldots\ldots R^\circ, R$, qui, à partir du premier terme A de la série, s'appliqueront alternativement en plus et en moins au résultat de tous les termes précédens; d'où l'on conclura

$$\frac{P'}{Q'} = A - r + r' - \ldots + R^\circ - R.$$

Les signes des différences seront toujours alternatifs, tant que les indices μ seront positifs, comme dans le cas proposé. On obtiendra donc ainsi des résultats alternativement plus grands et plus petits que la valeur totale que l'on cherche, ce qui donnera à chaque instant une mesure du degré d'approximation auquel on est parvenu. Lorsqu'il ne manquera plus qu'une ou deux décimales pour obtenir le degré désiré, on pourra s'arrêter à la dernière différence calculée R, et suppléer aux différences suivantes R', R'', etc., en considérant la suite R°, R, R', R'' comme une progression géométrique; dans cette hypothèse, faisant $R = \alpha R^\circ$, on aura...... $R - R' + R'' - \text{etc.} = R(1 - \alpha + \alpha^2 - \text{etc.}) = \frac{R}{1+\alpha}$; ainsi, au lieu de la différence R, on prendra $\frac{R}{1+\alpha}$. Pour plus d'exactitude, on pourrait avoir recours aux trois derniers termes $R^{\circ\circ}$, R°, R, et faisant $R^\circ = \alpha^\circ R^{\circ\circ}$, $R = \alpha R^\circ$, on supposerait par analogie $R' = \alpha' R$, et l'on déduirait le rapport α' des deux rapports connus α°, α, par l'équation $\log \alpha' = 2 \log \alpha - \log \alpha^\circ$; ensuite, au lieu de R, on prendrait $\frac{R}{1+\alpha'}$.

176. Pour calculer facilement les différences R et éviter en même temps l'embarras des grands nombres auxquels conduirait nécessairement, dans ces opérations, l'accroissement rapide des indices μ, voici comment il faudra procéder.

Soit la fraction proposée $Z = X : (1 + \mu : (1 + \mu_1 : (1 + \mu_2 : (1 + \mu_3 : (1 + \text{etc.};$ les premiers termes, calculés à la manière ordinaire, sont :

$$\frac{X}{1},\quad \frac{X}{1+\mu},\quad \frac{X(1+\mu_1)}{1+\mu+\mu_1},\quad \frac{X(1+\mu_1+\mu_2)}{1+\mu+\mu_1+\mu_2(1+\mu)},\ \text{etc.},$$

et la série formée par la différence des termes consécutifs commence ainsi :

$$Z = \frac{X}{1} - \frac{X\mu}{1+\mu} + \frac{X\mu\mu_1}{(1+\mu)(1+\mu+\mu_1)} - \text{etc.}$$

Pour la continuer indéfiniment, on prendra des auxiliaires θ, λ, θ_1, λ_1, θ_2, λ_2, etc., d'après la loi suivante, qui comprend celle des différences R, R_1, R_2, etc.,

$$\begin{array}{lll}
\theta = \mu, & \lambda = \frac{1}{1+\theta}, & R = X\theta\lambda, \\
\theta_1 = \mu_1\lambda, & \lambda_1 = \frac{1}{1+\theta_1}, & R_1 = R\theta_1\lambda_1, \\
\theta_2 = \mu_2\lambda_1, & \lambda_2 = \frac{1}{1+\theta_2}, & R_2 = R_1\theta_2\lambda_2, \\
\theta_3 = \mu_3\lambda_2, & \lambda_3 = \frac{1}{1+\theta_3}, & R_3 = R_2\theta_3\lambda_3, \\
\theta_4 = \mu_4\lambda_3, & \lambda_4 = \frac{1}{1+\theta_4}, & R_4 = R_3\theta_4\lambda_4, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Cela posé, la valeur de Z se calculera par la suite

$$Z = X - R + R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \text{etc.},$$

qu'on prolongera jusqu'à ce qu'on ait obtenu le degré d'exactitude désiré.

177. Ces calculs, comme on voit, sont très faciles à faire par logarithmes; toute prolixité et toutes opérations inutiles en sont écartées; il suffira de calculer les termes X, R, R_1, R_2, etc., avec une décimale de plus qu'on n'en veut avoir dans le résultat, et l'on prolongera la suite des différences jusqu'à ce qu'elles appartiennent à l'ordre de décimales qu'on peut négliger, ou seulement jusqu'à ce qu'elles approchent de cet ordre, puisqu'on peut tenir compte des termes suivans par le moyen que nous avons indiqué.

Il est bon d'observer, au sujet de ces calculs logarithmiques, que pour déduire chaque λ du θ correspondant, par l'équation $\frac{1}{\lambda} = 1 + \theta$, on pourra faire usage des formules souvent mentionnées $\log \theta = \log a \pm d$, $d' = \frac{d}{1+a}$, $\log D = \log(ad') \pm \frac{1}{2} d'$, d'où résulte $\log(1+\theta)$, ou $-\log \lambda = \log(1+a) \pm D$. On prend pour a le nombre de la table dont le logarithme approche le plus de $\log \theta$; il suffit que a ait au moins le tiers du nombre de chiffres significatifs avec lesquels R doit être déterminé; mais il faut que $\log(1+a)$ soit aussi donné dans la table immédiatement et sans interpolation.

178. Comme on a en général $R_n = R_{n-1} \cdot \frac{\theta_n}{1+\theta_n}$, il est évident que les différences R, R_1, R_2, etc., vont continuellement en diminuant, dès le commencement de la série, ce qui est une suite de ce que les indices μ sont supposés tous positifs; ainsi à mesure que la suite des différences est prolongée, l'approximation augmente de plus en plus, pourvu que les différens termes, à compter du premier X, soient calculés jusqu'au nombre de décimales qu'on veut obtenir dans le résultat, ou même au-delà, pour obvier à l'accumulation des erreurs.

La formule (60) est donc propre à déterminer l'intégrale Z pour de très petites valeurs de x, sans être sujette aux inconvéniens que présentent les formules (53) et (55), la première en offrant des termes divergens dès le commencement de la série, et fort grands par rapport au résultat cherché; la seconde, en amenant assez promptement une divergence qui limite beaucoup l'approximation et la rend souvent insuffisante. Cette formule, cependant, est loin de conserver son avantage, lorsqu'on l'applique à des valeurs de x qui passent une certaine limite; car sa marche se ralentit de plus en plus, à mesure que x augmente, et la formule (53) devient fort préférable, surtout si l'on a besoin d'une grande approximation.

179. Pour mieux apprécier la formule (60), essayons de déterminer combien il faudra calculer de termes de cette formule, afin d'obtenir la valeur de $\frac{Z}{x\zeta}$ avec un nombre i de décimales, ou de manière que l'erreur soit moindre que 10^{-i}.

On remarquera d'abord que le $n^{\text{ième}}$ des numérateurs ζ, ζ, 2ζ, 2ζ, 3ζ, 3ζ, etc., peut être représenté par $\frac{1}{2}\zeta(n+\sin^2\frac{1}{2}n\pi)$; or on a $\theta_n=\mu_n\lambda_{n-1}$, ou $\theta_n(1+\theta_{n-1})=\mu_n$; donc $\theta_n(1+\theta_{n-1})=\frac{1}{2}\zeta(n+\sin^2\frac{1}{2}n\pi)$. De là on voit que θ_n a pour limite $(\frac{1}{2}\zeta n)^{\frac{1}{2}}$, et qu'ainsi lorsque n devient un peu grand, on peut supposer $\theta_n=\sqrt{(\frac{1}{2}\zeta n)}$.

Soit $\log R_n=U_n$, l'équation $R_n=R_{n-1}\theta_n\lambda_n$ donnera $U_n=U_{n-1}+l\frac{\theta_n}{1+\theta_n}$ $=U_{n-1}-\frac{1}{\theta_n}=U_{n-1}-\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\zeta n}\right)}$; d'où l'on déduit la valeur approchée

$$U_n=\text{const.}-2\sqrt{\left(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta}\right)}.$$

Ainsi, à mesure que n augmente, le logarithme hyp. de R_n approche de plus en plus de la limite: const. $-2\sqrt{\left(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta}\right)}$, et son logarithme vulgaire, de la limite : const. $-2m\sqrt{\left(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta}\right)}$. Si l'on veut donc que cette limite soit $-i$, on aura $2m\sqrt{\left(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta}\right)}=\text{const.}+i$, ou à peu près $n=\frac{1}{8}M^2\zeta i^2$, M étant le nombre 2.3025, etc. On voit par conséquent que le nombre n augmente en raison du nombre ζ, et aussi en raison du carré du nombre de décimales qu'on veut obtenir.

Soit, par exemple, $x=0.01$, ce qui donne $z=l\,100=2M$, $\zeta=\frac{1}{2M}$; on aura à peu près $n=\frac{1}{16}Mi^2$; dans ce même cas, $x\zeta=\frac{m}{200}=0.00217$; donc si l'on veut que Z soit déterminé avec dix décimales exactes, il faudra faire $i=8$, ce qui donnera $n=4M=9.2$; donc il suffira de 9 à 10 termes de la série des R, pour obtenir ce degré d'exactitude. Si l'on veut vingt décimales exactes, il faudra faire $i=18$, ce qui donnera $n=46.5$; ainsi la série des R devrait être prolongée jusqu'à 46 ou 47 termes.

Si l'on fait $x=0.1$, ζ sera égal à m et l'on aura $n=\frac{1}{8}Mi^2$; dans ce même cas, $x\zeta=0.0434$; donc, si l'on veut déterminer Z avec dix décimales exactes, il faudra faire $i=9$, et l'on aura $n=22$, c'est-à-dire qu'il faudra calculer 22 ou 23 termes de la série, et pour l'avoir avec vingt décimales, il en faudrait calculer plus de 100. La formule (53) exigerait aussi environ 22 termes dans le premier cas, et seulement 32 dans le second. Nous ajouterons qu'à égal nombre de termes, l'usage de la formule (53) est préférable, parce que chaque terme se déduit très simplement du précédent.

180. Pour faciliter le calcul des fonctions Z, dans tous les cas où x n'est pas très petit, nous joignons ici une table des valeurs de la fonction V, calculée pour toutes les valeurs de x, de centième en centième, depuis $x=1.00$ jusqu'à $x=0$. Il nous aurait été également facile de donner la table des fonctions Z, puisque la somme de ces deux fonctions est égale à la quantité $-l(1-x)$, donnée immédiatement dans la table des logarithmes hyperboliques. Mais l'interpolation pour les valeurs de x peu différentes de l'unité serait d'un calcul difficile et peu exact dans la table des fonctions Z, tandis qu'elle est très facile dans la table des fonctions V. D'ailleurs, connaissant V, on a immédiatement $Z=l\left(\frac{1}{1-x}\right)-V$.

Le calcul de la table des fonctions V a été fait par la formule (54) ou par une formule équivalente, depuis $x=1.00$ jusqu'à $x=0.80$. Pour les valeurs suivantes, depuis $x=0.80$ jusqu'à $x=0.06$, nous avons préféré d'employer la méthode des ordonnées moyennes, corrigée pour les dernières valeurs de x, comme on l'a expliqué (art. 818). Enfin les cinq derniers termes, à compter de $x=0.05$, ont été calculés par la formule (60), qui donne la valeur de Z, d'où l'on tire celle de V.

181. L'interpolation de la table des fonctions V se fera à l'ordinaire, par la série des différences, tant que x ne sera pas plus petit que 0.10; il deviendra seulement nécessaire d'avoir égard aux différences du cinquième, ou même du sixième ordre, lorsque x approchera de cette limite, et dans ce cas, il conviendrait d'employer la série des différences dans l'ordre de x croissant.

L'interpolation peut aussi se faire en général, par une formule dont l'application s'étend jusqu'à des valeurs assez petites de x.

Soit a le nombre de la table qui approche le plus de la valeur donnée $x=a-\alpha$; on connaît la valeur correspondante de $V(a)$, et par conséquent celle de $Z(a)$; il ne s'agit donc que d'avoir la différence $y=Z(a)-Z(a-\alpha)$. Pour cela soit $x=e^{-z}$, ce qui donne $Z=\int-\frac{e^z dz}{z}$; soit ensuite $a=e^{-b}$, $a-\alpha=e^{-b-\epsilon}$, ou $b=l\frac{1}{a}$, $\epsilon=l\frac{a}{a-\alpha}$; soit enfin $z=b+\omega$, on aura

$$y=\int \frac{e^{-b-\omega}d\omega}{b+\omega}=\frac{a}{b}\int e^{-\omega}d\omega\left(1-\frac{\omega}{b}+\frac{\omega^2}{b^2}-\text{etc.}\right),$$

intégrale qui devra être prise depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\beta$. Le premier terme $\frac{a}{b}\int e^{-\omega}d\omega$ donne $\frac{a}{b}(1-e^{-\beta})$, ou $\frac{a}{a}$; les autres étant intégrés successivement par le développement de $e^{-\omega}$, on en tire

$$\begin{aligned} y=\frac{a}{b}&-\frac{a\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{4}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{\beta^3}{5}+\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{\beta^4}{6}-\text{etc.}\right)\\ &+\frac{a\beta^3}{b^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{\beta}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{5}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{\beta^3}{6}+\text{etc.}\right)\\ &-\frac{a\beta^4}{b^4}\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{6}-\text{etc.}\right)\\ &+\frac{a\beta^5}{b^5}\left(\frac{1}{5}-\frac{\beta}{6}+\text{etc.}\right)-\text{etc.}\end{aligned}\qquad(61)$$

Cette formule pourra s'appliquer depuis $x=1$ jusqu'à $x=0.05$; mais au-dessous de cette limite, il sera plus simple de calculer directement la fonction Z par la formule (60).

182. L'usage de la Table est borné à la valeur $x=1$, qui rend la fonction Z infinie; passé $x=1$, la fonction Z redevient finie; elle diminue progressivement jusqu'à la valeur $x=1.45137$, où elle est nulle; ensuite x continuant à augmenter, la valeur de Z devient négative et augmente jusqu'à l'infini. D'ailleurs depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, cette fonction se déterminera avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, par la formule (53), où il faudra changer le signe de z (excepté dans le terme lz), et faire $z=\log x$, ce qui donnera

$$Z=-C-lz-z-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{z^3}{3}-\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{z^4}{4}-\text{etc.}$$

Imaginons une courbe dont l'ordonnée pour chaque abscisse x soit égale à la fonction Z; l'aire de cette courbe sera

$$\int Zdx = xZ-\int\frac{xdx}{l\frac{1}{x}}=xZ-Z(x^2),$$

en désignant par $Z(x^2)$ ce que devient la fonction Z ou $Z(x)$, lorsqu'au lieu de x on met x^2. Si dans cette équation on fait $x=1-\omega$, ω étant infiniment petit, on aura $x^2=1-2\omega$, $Z(x)=-C-l\omega$, $Z(x^2)=-C-l(2\omega)$. Donc, $\int Zdx=l2$; ainsi quoique l'ordonnée Z soit infinie lorsque $x=1$, l'aire de la courbe pour cette même abscisse, n'en est pas moins égale à la quantité finie $l2$.

TABLE des valeurs de l'Intégrale $V=\int\left(\frac{dx}{1-x}-\frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right)$.

x	Int. V.	Diff. I.	II.	III.	IV.
1.00	0.57721 56649	500 41806	84176	858	16
0.99	0.57221 14843	501 25982	85034	874	18
0.98	0.56719 88861	502 11016	85908	892	17
0.97	0.56217 77845	502 96924	86800	909	19
0.96	0.55714 80921	503 83724	87709	928	19
0.95	0.55210 97197	504 71433	88637	947	19
0.94	0.54706 25764	505 60070	89584	966	20
0.93	0.54200 65694	506 49654	90550	986	21
0.92	0.53694 16040	507 40204	91536	1007	21
0.91	0.53186 75836	508 31740	92543	1028	23
0.90	0.52678 44096	509 24283	93571	1051	22
0.89	0.52169 19813	510 17854	94622	1073	22
0.88	0.51659 01959	511 12476	95695	1095	27
0.87	0.51147 89483	512 08171	96790	1122	25
0.86	0.50635 81312	513 04961	97912	1147	23
0.85	0.50122 76351	514 02873	99059	1170	30
0.84	0.49608 73478	515 01932	1 00229	1200	26
0.83	0.49093 71546	516 02161	1 01429	1226	29
0.82	0.48577 69385	517 03590	1 02655	1255	30
0.81	0.48060 65795	518 06245	1 03910	1285	31
0.80	0.47542 59550	519 10155	1 05195	1316	33
0.79	0.47023 49395	520 15350	1 06511	1349	33
0.78	0.46503 34045	521 21861	1 07860	1382	33
0.77	0.45982 12184	522 29721	1 09242	1412	38
0.76	0.45459 82463	523 38963	1 10654	1450	42
0.75	0.44936 43500	524 49617	1 12104	1492	33
0.74	0.44411 93883	525 61724	1 13596	1525	44
0.73	0.43886 32159	526 75320	1 15121	1569	39
0.72	0.43359 56839	527 90441	1 16690	1608	44
0.71	0.42831 66398	529 07131	1 18298	1652	45
0.70	0.42302 59267	530 25429	1 19950	1697	47
0.69	0.41772 33838	531 45379	1 21647	1744	49
0.68	0.41240 88459	532 67026	1 23391	1793	51
0.67	0.40708 21433	533 90417	1 25184	1844	55
0.66	0.40174 31016	535 15601	1 27028	1899	53
0.65	0.39639 15415	536 42629	1 28927	1952	61
0.64	0.39102 72786	537 71556	1 30879	2013	60
0.63	0.38565 01230	539 02435	1 32892	2073	63
0.62	0.38025 98795	540 35327	1 34965	2136	68
0.61	0.37485 63468	541 70292	1 37101	2204	68
0.60	0.36943 93176	543 07393	1 39305	2272	75
0.59	0.36400 85783	544 46698	1 41577	2347	76
0.58	0.35856 39085	545 88275	1 43924	2423	83
0.57	0.35310 50810	547 32199	1 46347	2506	84
0.56	0.34763 18611	548 78546	1 48853	2590	89
0.55	0.34214 40065	552 27399	1 51443	2679	94
0.54	0.33664 12666	551 78842	1 54122	2773	101
0.53	0.33112 33824	553 32964	1 56895	2874	104
0.52	0.32559 00860	554 89859	1 59769	2978	112
0.51	0.32004 11001	556 49628	1 62747	3090	116
0.50	0.31447 61373	558 12375	1 65837	3206	125

x.	Int. V.	Diff. I.	II.	III.
0.50	0.31447 61373	558 12375	1 65837	3206
0.49	0.30889 48998	559 78212	1 69043	3331
0.48	0.30329 70786	561 47255	1 72374	3463
0.47	0.29768 23531	563 19629	1 75837	3603
0.46	0.29205 03902	564 95466	1 79440	3751
0.45	0.28640 08436	566 74906	1 83191	3910
0.44	0.28073 33530	568 58097	1 87101	4078
0.43	0.27504 75433	570 45198	1 91179	4258
0.42	0.26934 30235	572 36377	1 95437	4451
0.41	0.26361 93858	574 31814	1 99888	4656
0.40	0.25787 62044	576 31702	2 04544	4878
0.39	0.25211 30342	578 36246	2 09422	5115
0.38	0.24632 94096	580 45668	2 14537	5369
0.37	0.24052 48428	582 60205	2 19906	5646
0.36	0.23469 88223	584 80111	2 25552	5943
0.35	0.22885 08112	587 05663	2 31495	6265
0.34	0.22298 02449	589 37158	2 37760	6617
0.33	0.21708 65291	591 74918	2 44377	6996
0.32	0.21116 90373	594 19295	2 51373	7415
0.31	0.20522 71078	596 70668	2 58785	7866
0.30	0.19926 00410	599 29453	2 66651	8368
0.29	0.19326 70957	601 96104	2 75019	8914
0.28	0.18724 74853	604 71123	2 83933	9525
0.27	0.18120 03730	607 55056	2 93458	10196
0.26	0.17512 48674	610 48514	3 03654	10945
0.25	0.16902 00160	613 52168	3 14599	11786
0.24	0.16288 47992	616 66767	3 26385	12726
0.23	0.15671 81225	619 93152	3 39111	13791
0.22	0.15051 88073	623 32263	3 52902	14998
0.21	0.14428 55810	626 85165	3 67900	16379
0.20	0.13801 70645	630 53065	3 84279	17965
0.19	0.13171 17580	634 37344	4 02244	19807
0.18	0.12536 80236	638 39588	4 22051	21955
0.17	0.11898 40648	642 61639	4 44006	24496
0.16	0.11255 79009	647 05645	4 68502	27518
0.15	0.10608 73364	651 74147	4 96020	31173
0.14	0.09956 99217	656 70167	5 27193	35642
0.13	0.09300 29050	661 97360	5 62835	41205
0.12	0.08638 31690	667 60195	6 04040	48263
0.11	0.07970 71495	673 64235	6 52303	57417
0.10	0.07197 07260	680 16538	7 09720	69647
0.09	0.06616 90722	687 26258	7 79367	86546
0.08	0.05929 64464	695 05625	8 65913	
0.07	0.05234 58839	703 71538	9 76910	
0.02	0.04530 87301	713 48448		
0.05	0.03817 38853	724 73932		
0.04	0,03092 64921	738 10943		
0.03	0.02354 53978	754 79049		
0.02	0.01599 74929	777 69008		
0.01	0.00822 05921	822 05921		
0.00	0.00000 00000			

§ V. *Application à l'Intégrale* $\Gamma(\frac{1}{2}, x)$.

183. Nous avons traité fort au long des différens moyens d'évaluer la fonction $\Gamma(a, x)$ dans le cas de $a=0$. Occupons-nous maintenant du cas $a=\frac{1}{2}$, qui est celui de l'intégrale $Z=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Faisant à l'ordinaire $l\frac{1}{x}=z$, ou $x=e^{-z}$, on aura sous une autre forme $Z=\int -z^{-\frac{1}{2}}dze^{-z}$, d'où l'on tire, en développant e^{-z} et intégrant,

$$Z=\Gamma\tfrac{1}{2}-2z^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{5}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{z^3}{7}+\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{z^4}{9}-\text{etc.}\right) \quad (62)$$

On sait d'ailleurs que $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$, ainsi étant donné x et en même temps $z=l\frac{1}{x}$, on connaîtra l'intégrale Z par une série d'autant plus convergente, que z sera plus petit, c'est-à-dire que x approchera plus de l'unité.

A mesure que x deviendra plus petit, la série sera de moins en moins convergente; elle deviendra même divergente dans les premiers termes, dès qu'on aura $z>3$, ou $x<e^{-3}<0.05$. Dans ce cas et dans ceux où x est encore beaucoup plus petit, la série, qui est divergente dans les premiers termes, finit toujours par être convergente, et même plus que toute progression géométrique décroissante. Mais, comme il faudrait calculer un nombre de termes assez grand pour arriver au point de convergence (qu'on peut toujours déterminer *à priori*), et que ces termes ayant une valeur absolue beaucoup plus grande que le résultat qui doit provenir de la série totale, il deviendrait nécessaire de calculer chacun d'eux avec beaucoup de précision, puisque la plus grande partie de leur valeur doit être détruite; on voit par toutes ces raisons qu'il vaudra presque toujours mieux, dans le cas de x très petit, appliquer la formule générale (58).

184. Faisant donc $a=\frac{1}{2}$, et $\zeta=\frac{1}{2z}$, on aura la formule

$$Z=xz^{-\frac{1}{2}}:(1+\zeta:(1+2\zeta:(1+3\zeta:(1+4\zeta:(1+\text{etc.}, \quad (63)$$

où l'on doit remarquer que les numérateurs croissent continuellement de ζ, tandis que les dénominateurs sont tous égaux à l'unité.

Le calcul de cette formule devra se faire comme nous l'avons expliqué ci-dessus art. 176. Pour en donner un exemple, soit $x=0.01$, on aura $z=\log 100=2M$, $\zeta=\frac{1}{2z}=\frac{1}{4}m=0.10857\ 362$ etc.; d'après ces valeurs, il faut calculer successivement les quantités X, R, R_1, R_2, etc., par les formules de l'article cité, savoir,

$$
\begin{array}{lll}
 & & X = xz^{-\frac{1}{2}}, \\
\theta = \zeta, & \lambda = \dfrac{1}{1+\theta}, & R = X\theta\lambda, \\
\theta_1 = 2\zeta\lambda, & \lambda_1 = \dfrac{1}{1+\theta_1}, & R_1 = R\theta_1\lambda_1, \\
\theta_2 = 3\zeta\lambda_1, & \lambda_2 = \dfrac{1}{1+\theta_2}, & R_2 = R_1\theta_2\lambda_2, \\
\theta_3 = 4\zeta\lambda_2, & \lambda_3 = \dfrac{1}{1+\theta_3}, & R_3 = R_2\theta_3\lambda_3, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Voici les logarithmes de ces quantités, calculés à dix décimales, avec les valeurs qui en résultent progressivement pour la fonction............ $Z = X - R + R_1 - R_2 + R_3 - \text{etc.}$

X...	7.66837 71578 2	θ....	9.03572 43199 8	X =	0.00465 99060 2
$\theta\lambda$...	8.99095 97799 8	λ....	9.95523 54600 0	R..... —	45 63908 6
R...	6.65933 69378 0	θ_1.....	9.29198 97756 4		420 35151 6
$\theta_1\lambda_1$...	9.21430 22252 2	λ_1....	9.92231 24495 8	R_1..... +	7 47548 1
R_1...	5.87363 91630 2	θ_2.....	9.43515 80242 8		427 82699 7
$\theta_2\lambda_2$...	9.33054 48692 0	λ_2....	9.89538 68449 2	R_2..... —	1 60023 6
R_2...	5.20418 40322 2	θ_3....	9.53317 11562 2		426 22676 1
$\theta_3\lambda_3$...	9.40563 63390 5	λ_3....	9.87246 52028 3	R_3..... +	40721 2
R_3...	4.60982 03912 7	θ_4....	9.60715 95271 5		63397 3
$\theta_4\lambda_4$...	9.45956 83608 9	λ_4....	9.85240 88337 4	R_4.... —	11732 4
R_4...	4.06938 87521 6	θ_5....	9.66628 44041 4		51664 9
$\theta_5\lambda_5$...	9.50081 73435 3	λ_5....	9.83453 29393 9	R_5..... +	3717 1
R_5...	3.57020 60956 9	θ_6....	9.71535 52993 7		55382 0
$\theta_6\lambda_6$...	9.53373 33020 1	λ_6....	9.81837 80026 4	R_6..... —	1270 4
R_6...	3.10393 93977	θ_7.....	9.75719 23096		54111 6
$\theta_7\lambda_7$...	9.56081 38838	λ_7.....	9.80362 15742	R_7..... +	462 1
R_7...	2.66475 32815	θ_8.....	9.79358 840		54573 7
$\theta_8\lambda_8$...	9.58361 499	λ_8.....	9.79002 659	R_8..... —	177 2
R_8...	2.24836 837	θ_9.....	9.82575 09		54396 5
$\theta_9\lambda_9$...	9.60316 45	λ_9....	9.77741 36	R_9.... +	71 0
R_9...	1.85153 28			R_{10} — etc. —	20 8
				Z =	0.00426 54447

185. Pour faciliter le calcul des fonctions Z, nous avons construit la table ci-jointe, où l'on remarque deux parties distinctes.

Dans la première, la fonction Z est calculée avec ses différences successives, pour toutes les valeurs de $t=\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, de centième en centième, depuis $t=0$ jusqu'à $t=0.50$. Ces limites répondent aux valeurs $x=1$, $x=0.7788$ etc.; ainsi la première partie de la table servira à calculer la fonction Z pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites; car d'ailleurs x étant donné on connaît $t=\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. Cette première partie a été calculée par la formule (62).

Dans la seconde partie on trouve la fonction Z calculée pour toutes les valeurs de x, de centième en centième, depuis $x=0.80$ jusqu'à $x=0.00$; cette partie a été construite par la méthode des ordonnées moyennes, excepté les cinq ou six derniers termes, qui ont été calculés directement par la formule (63), dont nous avons donné un exemple.

186. Si l'on compare les derniers nombres de la première partie de la table, avec les premiers de la seconde partie, lesquels répondent à peu près aux mêmes valeurs de x, on verra qu'en supposant même égaux les intervalles, qui sont moindres dans la première partie que dans la seconde, il y aurait un avantage marqué à se servir, pour l'interpolation, des nombres de la première partie, attendu que les différences successives diminuent bien plus rapidement dans ces nombres que dans ceux de la seconde partie.

En général, quand on veut construire la table des valeurs d'une fonction, il importe de choisir convenablement l'*argument* de cette table, c'est-à-dire la variable par laquelle la fonction doit être déterminée, pour que les différences décroissent de la manière la plus prompte, et qu'elles rendent ainsi l'interpolation plus facile. Car, en substituant une variable à une autre, la marche des différences n'étant plus la même, on doit préférer celle qui sera la plus favorable aux interpolations.

TABLE des valeurs de l'Intégrale $Z=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$; *la première partie depuis*

t.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	t.	Z.	Diff. I.
0.00	1.77245 38509	1999 93333	39993	39972	51	21		0.25	1.28267 80766	1874 07449
0.01	1.75245 45176	1999 53340	79965	39921	72	21		0.26	1.26393 73317	1864 35476
0.02	1.73245 91836	1998 73375	1 19886	39849	93	28		0.27	1.24529 37841	1854 31454
0.03	1.71247 18461	1997 53489	1 59735	39756	121	22		0.28	1.22675 06387	1843 95957
0.04	1.69249 64972	1995 93754	1 99491	39635	143	25		0.29	1.20831 10430	1833 29574
0.05	1.67253 71218	1993 94263	2 39126	39492	168	20		0.30	1.18997 80856	1822 32908
0.06	1.65259 76955	1991 55137	2 78618	39324	188	25		0.31	1.17175 47948	1811 06578
0.07	1.63268 21818	1988 76519	3 17942	39136	213	25		0.32	1.15364 41370	1799 51216
0.08	1.61279 45299	1985 58577	3 57078	38923	238	19		0.33	1.13564 90154	1787 67459
0.09	1.59293 86722	1982 01499	3 96001	38685	257	24		0.34	1.11777 22685	1775 55994
0.10	1.57311 85223	1978 05498	4 34686	38428	281	24		0.35	1.10001 66691	1763 17462
0.11	1.55333 79725	1973 70812	4 73114	38147	305	18		0.36	1.08238 49229	1750 52557
0.12	1.53360 08913	1968 97698	5 11261	37842	323	24		0.37	1.06487 96672	1737 61971
0.13	1.51391 11215	1963 86437	5 49103	37519	347	22		0.38	1.04750 34701	1724 46407
0.14	1.49427 24778	1958 37334	5 86622	37172	369	20		0.39	1.03025 88294	1711 06579
0.15	1.47468 87444	1952 50712	6 23794	36803	389	19		0.40	1.01314 81715	1697 43210
0.16	1.45516 36732	1946 26918	6 60597	36414	408	20		0.41	0.99617 38505	1683 57030
0.17	1.43570 09814	1939 66321	6 97011	36006	428	23		0.42	0.97933 81475	1669 48778
0.18	1.41630 43493	1932 69310	7 33017	35578	451	16		0.43	0.96264 32697	1655 19198
0.19	1.39697 74183	1925 36293	7 68595	35127	467	20		0.44	0.94609 13499	1640 69043
0.20	1.37772 37890	1917 67698	8 03722	34660	487	19		0.45	0.92968 44456	1625 99071
0.21	1.35854 70192	1909 63976	8 38382	34173	506	15		0.46	0.91342 45385	1611 10044
0.22	1.33945 06216	1901 25594	8 72555	33667	521	20		0.47	0.89731 35341	1596 02730
0.23	1.32043 80622	1892 53039	9 06222	33146	541	15		0.48	0.88135 32611	1580 77901
0.24	1.30151 27583	1883 46817	9 39368	32605	556	18		0.49	0.86554 54710	1565 36329
0.25	1.28267 80766	1874 07449	9 71973	32049	574	15		0.50	0.84989 18381	

x.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	x.	Z.	Diff. I.
0.80	0.89350 00910	2087 97550	55 33938	3 54856	38179	5497	984	0.62	0.58168 14651	1434 27592
0.79	0.87262 03360	2032 63612	51 79082	3 16677	32682	4513	770	0.61	0.56733 87059	1410 68530
0.78	0.85229 39748	1980 84530	48 62405	2 83995	28169	3743	621	0.60	0.55323 18529	1387 85636
0.77	0.83248 55218	1932 22125	45 78410	2 55826	24426	3122	495	0.59	0.53935 32893	1365 74107
0.76	0.81316 33093	1886 43715	43 22584	2 31400	21304	2627	404	0.58	0.52569 58786	1344 29528
0.75	0.79429 89378	1843 21131	40 91184	2 10096	18677	2223	334	0.57	0.51225 29258	1323 47828
0.74	0.77586 68247	1802 29947	38 81088	1 91419	16454	1889	268	0.56	0.49901 81430	1303 25246
0.73	0.75784 38300	1763 48859	36 89669	1 74965	14565	1621	228	0.55	0.48598 56184	1283 58300
0.72	0.74020 89441	1726 59190	35 14704	1 60400	12944	1393	189	0.54	0.47314 97884	1264 43757
0.71	0.72294 30251	1691 44486	33 54304	1 47456	11551	1204	156	0.53	0.46050 54127	1245 78611
0.70	0.70602 85765	1657 90182	32 06848	1 35905	10347	1048	140	0.52	0.44804 75516	1227 60061
0.69	0.68944 95583	1625 83334	30 70943	1 25558	9299	908	106	0.51	0.43577 15455	1209 85448
0.68	0.67319 12249	1595 12391	29 45385	1 16259	8391	802	100	0.50	0.42367 29967	1192 52443
0.67	0.65723 99858	1565 67006	28 29126	1 07868	7589	702	84	0.49	0.41174 77524	1175 58628
0.66	0.64158 32852	1537 37880	27 21258	1 00279	6887	618	70	0.48	0.39999 18896	1159 01879
0.65	0.62620 94972	1510 16622	26 20979	93392	6269	548	61	0.47	0.38840 17017	1142 80162
0.64	0.61110 78350	1483 95643	25 27587	87123	5721	487	56	0.46	0.37697 36855	1126 91552
0.63	0.59626 82707	1458 68056	24 40464	81402	5234	431	43	0.45	0.36570 45303	1111 34229

$t=\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=0.00$ *jusqu'à* $t=0.50$, *la seconde depuis* $x=0.80$ *jusqu'à* $x=0.00$.

II.	III.	IV.	V.	VI.	x.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
9 71973	32049	574	15		0.45	0.36570 45303	1111 34229	15 27767	27913	1568	66	5
10 04022	31475	589	14		0.44	0.35459 11074	1096 06462	14 99854	26345	1502	61	6
10 35497	30886	603	22		0.43	0.34363 04612	1081 06608	14 73509	24843	1441	55	7
10 66383	30283	625	8		0.42	0.33281 98004	1066 33099	14 48666	23402	1386	48	10
10 96666	29664	632	10		0.41	0.32215 64905	1051 84433	14 25264	22016	1338	38	0
11 26330	29032	647	20		0.40	0.31163 80472	1037 59169	14 03248	20678	1300	38	9
11 55362	28385	657	4		0.39	0.30126 21303	1023 55921	13 82570	19378	1262	29	9
11 83747	27728	671	18		0.38	0.29102 65382	1009 73351	13 63192	18116	1233	20	− 1
12 11475	27057	684	7		0.37	0.28092 92031	996 10159	13 45076	16883	1213	21	14
12 38532	26373	692	11		0.36	0.27096 81872	982 65083	13 28193	15670	1192	7	− 1
12 64905	25681	703	11		0.35	0.26114 16789	969 36890	13 12523	14478	1185	6	8
12 90586	24978	714	9		0.34	0.25144 79899	956 24367	12 98045	13293	1179	− 2	10
13 15564	24264	723	7		0.33	0.24188 55532	943 26322	12 84752	12114	1181	12	4
13 39828	23541	730	9		0.32	0.23245 29210	930 41570	12 72638	10933	1193	16	14
13 63369	22811	739	5		0.31	0.22314 87640	917 68932	12 61705	9740	1209	30	4
13 86180	22072	744	9		0.30	0.21397 18708	905 07227	12 51965	8531	1239	34	16
14 08252	21328	753	5		0.29	0.20492 11481	892 55262	12 43434	7292	1273	50	14
14 29580	20575	758	4		0.28	0.19599 56219	880 11828	12 36142	6019	1323	64	10
14 50155	19817	762	6		0.27	0.18719 44391	867 75686	12 30123	4696	1387	74	24
14 69972	19055	768	4		0.26	0.17851 68705	855 45563	12 25427	3309	1461	98	21
14 89027	18287	772	0		0.25	0.16996 23142	843 20136	12 22118	1848	1559	119	25
15 07314	17515	772			0.24	0.16153 03006	830 98018	12 20270	+ 289	1678	144	37
15 24829	16743				0.23	0.15322 04988	818 77748	12 19981	− 1389	1822	181	38
15 41572					0.22	0.14503 27240	806 57767	12 21370	3211	2003	219	55
					0.21	0.13696 69473	794 36397	12 24581	5214	2222	274	72
					0.20	0.12902 33076	782 11816	12 29795	7436	2496	346	83
II.	III.	IV.	V.	VI.	0.19	0.12120 21260	769 82021	12 37231	9932	2842	429	124
					0.18	0.11350 39239	757 44790	12 47163	12774	3271	553	165
23 59062	76168	4803	388	44	0.17	0.10592 94449	744 97627	12 59937	16045	3824	718	221
22 82894	71365	4415	344	34	0.16	0.09847 96822	732 37690	12 75982	19869	4542	939	327
22 11529	66950	4071	310	31	0.15	0.09115 59132	719 61708	12 95851	24411	5481	1266	479
21 44579	62879	3761	279	30	0.14	0.08395 97424	706 65857	13 20262	29892	6747	1745	720
20 81700	59118	3482	249	22	0.13	0.07689 31567	693 45595	13 50154	36639	8492	2465	1162
20 22582	55636	3233	227	22	0.12	0.06995 85972	679 95441	13 86793	45131	10957	3627	1938
19 66946	52403	3006	205	23	0.11	0.06315 90531	666 08648	14 31924	56088	14584	5565	3478
19 14543	49397	2801	182	12	0.10	0.05649 81883	651 76724	14 88012	70672	20149	9043	6820
18 65146	46596	2619	170	19	0.09	0.04998 05159	636 88712	15 58684	90821	29192	15863	15018
18 18550	43977	2449	151	17	0.08	0.04361 16447	621 30028	16 49505	1 20013	45055	30881	
17 74573	41528	2298	134	4	0.07	0.03739 86419	604 80523	17 69518	1 65068	75936		
17 33045	39230	2164	130	21	0.06	0.03135 05896	587 11005	19 34586	2 41004			
16 93815	37066	2034	109	4	0.05	0.02547 94891	567 76419	21 75590	3 87609			
16 56749	35032	1925	105	16	0.04	0.01980 18472	546 00829	25 63199				
16 21717	33107	1820	89	11	0.03	0.01434 17643	520 37630	33 12064				
15 88610	31287	1731	78	3	0.02	0.00913 80013	487 25566	60 71119				
15 57323	29556	1643	75	9	0.01	0.00426 54447	426 54447					
15 27767	27913	1568	66	5	0.00	0.00000 00000						

187. Ainsi étant proposée la fonction $Z = \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, si l'on fait..... $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = t$, ou $x = e^{-t^2}$, cette fonction sera aussi exprimée par la formule $Z = \sqrt{\pi} - 2\int e^{-t^2}dt$, où l'intégrale doit être prise à compter de $t = 0$; on a donc le choix entre les deux expressions, l'une par la variable x, l'autre par la variable t.

La première partie de notre table a été calculée, selon la seconde expression, pour toutes les valeurs de t, de centième en centième, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 0.50$. On l'aurait pu continuer jusqu'à une valeur plus grande de t, par exemple, jusqu'à $t = 3$, comme l'a fait M. Kramp, dans une table de l'intégrale $\int e^{-t^2}dt$, placée à la fin de son *Analyse des réfractions*. Quant à l'intervalle depuis $t = 3$ jusqu'à $t = \infty$, il paraît immense, cependant il n'embrasse, par rapport à la variable x, que le petit espace depuis $x = 0$ jusqu'à $x = e^{-9} = 0.00012\,312$ etc.; on y suppléera aisément en calculant directement, dans chaque cas particulier, la fonction Z par la formule (63).

188. Étant connue par la table la fonction $Z = A$, qui répond à la variable $x = a$, si l'on veut avoir la valeur de la fonction pour une variable peu différente $x = a - \alpha$, il faudra d'abord, pour la facilité du calcul, exprimer les fonctions par la variable t. Ainsi faisant $x = e^{-t^2}$, ou $t = \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, puis déterminant b et $\mathsf{6}$ par les équations $b = \left(l\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b + \mathsf{6} = \left(l\frac{1}{a-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, la question sera de déterminer la différence δZ d'après l'équation $Z = \sqrt{\pi} - 2\int e^{-t^2}dt$, en supposant que t prenne successivement les deux valeurs b, $b + \mathsf{6}$.

Soit donc $t = b + \omega$; on aura, en observant que $a = e^{-b^2}$,

$$\delta Z = 2a\int e^{-2b\omega - \omega^2}d\omega;$$

cette intégrale doit être prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \mathsf{6}$, et comme la quantité $\mathsf{6}$ est supposée très petite, on pourra développer d'abord le facteur $e^{-\omega^2}$, ce qui donnera

$$\int e^{-2b\omega - \omega^2}d\omega = \int e^{-2b\omega}d\omega - \int e^{-2b\omega}\omega^2 d\omega + \tfrac{1}{2}\int e^{-2b\omega}\omega^4 d\omega - \text{etc.};$$

ensuite développant $e^{-2b\omega}$ dans les différens termes, excepté dans le premier, et faisant, pour abréger, $2b\mathsf{6} = \lambda$, on aura la différence cherchée

$$\delta Z = \frac{a}{b}(1 - e^{-\lambda}) - 2a\mathcal{C}^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{5} - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{\lambda^3}{6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ 2a\mathcal{C}^5\left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{7} - \text{etc.}\right) \qquad (64)$$
$$- 2a\mathcal{C}^7\left(\frac{1}{7} - \frac{\lambda}{8} + \text{etc.}\right)$$
$$+ 2a\mathcal{C}^9\left(\frac{1}{9} - \text{etc.}\right) - \text{etc.}$$

Chaque ligne de cette formule forme une suite fort convergente, et les différentes lignes décroissent à peu près comme la progression $\mathcal{C}^3$, $\mathcal{C}^5$, $\mathcal{C}^7$, etc.; il suffira donc presque toujours de calculer un petit nombre de termes de cette formule, pour avoir une valeur très approchée de la différence δZ, d'où l'on déduira $Z = A - \delta Z$.

Cette formule servira à interpoler la seconde partie de notre table, dans les cas où la série des différences ne décroîtrait pas assez rapidement pour donner un résultat exact jusque dans les dernières décimales. Cependant si x n'était pas plus grand que 0.02, il serait encore plus simple de calculer directement la fonction Z par la formule (63).

189. Au reste, pour donner un exemple du calcul de la formule (64), nous allons déterminer la fonction Z(0,02) où $x = 0.02$, par le moyen de la fonction Z(0,03) supposée connue, ce qui est un des cas les plus difficiles que puisse présenter l'application de notre formule.

Dans le cas dont il s'agit, on aura $a = 0.03$, $a - \alpha = 0.02$, $b^2 = l\frac{100}{3}$, $(b + \mathcal{C})^2 = l50$. D'après ces données, on calculera le premier terme (1) de la formule, comme il suit:

$b =$	1.87258 054495	$\mathcal{C}$.....	9.02244 041883
$b + \mathcal{C} =$	1.97788 346609	$2b$.....	0.57347 050266
$\mathcal{C} =$	0.10530 292114	λ.....	9.59591 092149
		m.....	9.63778 431130
		λm.....	9.23369 523279

$$e^{-\lambda} = 0.67410\ 027526 \qquad e^{-\lambda}\ldots\left\{\begin{array}{l}-0.17127\ 549556\\ 9.82872\ 450444\end{array}\right.$$

$$1 - e^{-\lambda} = 0.32589\ 972474$$

son log... $9.51308\ 399141$

$\frac{a}{b}$... $8.20468\ 074772$

(1)... $7.71776\ 473913$ .... $(1) = 0.00522\ 113280$

En second lieu viennent les termes de...... la suite

$$-2a\text{б}^3\left(\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{5}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{\lambda^3}{6}+\text{etc.}\right),$$

que nous désignerons successivement par (2,1), (2,2), (2,3), etc., et qui se déduisent aisément, chacun de celui qui le précède.

Les termes de la seconde ligne, savoir,......

$$+2a\text{б}^5\left(\frac{1}{5}-\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{7}-\text{etc.}\right),$$

étant désignés de même par (3,1), (3,2), etc., et semblablement ceux des lignes suivantes, qu'on calculera jusqu'à ce qu'ils ne donnent plus rien dans le dixième ordre de décimales, on aura les résultats ci-joints.

La valeur de δZ, qui est le résultat total de la formule, étant retranchée de la valeur connue de $Z(0{,}03)$, on trouve celle de $Z(0{,}02)$, la même qui est inscrite dans la table, et qui a été calculée directement par la formule (16).

(2,1)	—	2 335346
		519 777934
(2,2)	+	690754
		520 468688
(2,3)	—	108967
		520 359721
(2,4)	+	11937
		520 371658
(2,5)	—	1009
(2,6)	+	69
		520 370718
(3,1)	+	7769
(3,2)	—	2553
(3,3)	+	431
(3,4)	—	50
		520 376315
(4,1)	—	21
(4,2)	+	7

$\delta Z = 0.00520\ 37630$

$Z(0{,}03) = 0.01434\ 17643$

$2) = 0.00913\ 80015.$

§ VI. *Intégrale complète de l'équation* (57).

190. Les recherches précédentes nous conduisent à déterminer les cas d'intégrabilité de l'équation différentielle de l'art. 171.

Si l'on suppose qu'on ait en même temps $T = 1$ et $\zeta = 0$, la formule (58), exprimée en fraction continue, sera, comme nous l'avons déjà dit, l'intégrale de l'équation (57). Si l'on suppose, de plus, que l'un des deux nombres α, $\alpha+\text{б}$, est un entier négatif, il est visible que la fraction continue se terminera d'elle-même, et qu'on aura ainsi la valeur de T exprimée exactement par une fonction rationnelle de ζ. L'intégrale étant connue pour chacun de ces deux cas généraux, il sera facile d'avoir, dans la même supposition, l'intégrale complète de l'équation (57), laquelle ne supposera plus qu'on ait en même temps $T=1$ et $\zeta=0$.

En effet, par le tableau analytique de l'art. 172, on voit que l'équation différentielle proposée en T, est liée avec les transformées successives en T', T'', T''', etc., de manière qu'il suffit de résoudre complètement une de ces équations, pour résoudre toutes les autres, et particulièrement l'équation en T. Or, par la loi des transformées successives, il est évident que les coefficiens qui étaient α et β dans l'équation en T, deviennent α et $n+\beta$ dans la transformée paire en T^{2n}, et qu'ils deviennent $1-\alpha$ et $n+\alpha+\beta$ dans la transformée impaire en T^{2n+1}.

191. Soit donc 1°. $\beta=-n$; pour avoir les transformées successives on prolongera la suite des équations,

$$\frac{1}{T}=1+(\alpha+\beta)\zeta T',$$

$$\frac{1}{T'}=1+(1+\beta)\zeta T'',$$

$$\frac{1}{T''}=1+(1+\alpha+\beta)\zeta T''',$$

etc.,

jusqu'à celle qui donne la transformée en T^{2n-1}, savoir:

$$\frac{1}{T^{2n-2}}=1+(n-1+\alpha+\beta)\zeta T^{2n-1}=1+(\alpha-1)\zeta T^{2n-1};$$

cette transformée sera

$$\frac{\zeta^2 dT^{2n-1}}{(T^{2n-1})^2 d\zeta}+\frac{(1-\alpha)\zeta+1}{T^{2n-1}}+(\alpha-1)\zeta-\frac{1}{(T^{2n-1})^2}=0.$$

Enfin si l'on fait $\frac{1}{T^{2n-1}}=1+\zeta Y$, on aura pour dernière transformée,

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta}+\frac{1+\alpha\zeta}{Y}+\zeta=0.$$

Celle-ci étant linéaire par rapport à $\frac{1}{Y}$, on en tire

$$\frac{1}{Y}=\zeta^{\alpha} e^{-\frac{1}{\zeta}}\left(A-\int \zeta^{-1-\alpha} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta\right),$$

A étant la constante arbitraire.

Eliminant donc successivement T', $T''\ldots$, T^{2n-1}, Y, au moyen des équations précédentes, on aura l'intégrale de l'équation proposée en T, laquelle contiendra la constante arbitraire A, et sera par conséquent complète.

192. Dans cette intégrale, outre le terme $A\zeta^{a} e^{-\frac{1}{\zeta}}$, qui appartient aux exponentielles ordinaires, se trouve comprise la transcendante $\int \zeta^{-1-a} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta$ qui, pour les valeurs positives de ζ, semble différente des transcendantes $\Gamma(a, x)$; mais pour les valeurs négatives de ζ, ces deux transcendantes sont de même nature.

En effet, soit $\zeta = -\sigma$, on aura $\int \zeta^{-1-a} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta = (-1)^{a} \int \sigma^{-1-a} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma$; soit encore $e^{-\frac{1}{\sigma}} = x$; ou $\frac{1}{\sigma} = l\frac{1}{x}$, on aura

$$\int \sigma^{-1-a} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma = \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = \Gamma(a, x);$$

dans ce même cas on aurait

$$\frac{1}{Y} = \sigma^{a} e^{\frac{1}{\sigma}} \left[A - \Gamma(a, e^{-\frac{1}{\sigma}})\right].$$

Ainsi le simple changement de ζ en $-\sigma$, suffit pour que l'intégrale complète de l'équation proposée en T, puisse être exprimée par la fonction $\Gamma(a, x)$, en faisant $x = e^{-\frac{1}{\sigma}}$; elle satisfera à toutes les valeurs positives de σ, ou à toutes les valeurs négatives de ζ. Ensuite si l'on change le signe de σ, ce qui rend ζ positif, la fonction $\Gamma(a, x)$ supposera $x = e^{\frac{1}{\zeta}}$, c'est-à-dire $x > 1$, et elle se déterminera alors comme on l'a fait voir dans l'art. 164. Donc dans tous les cas, l'intégrale complète de l'équation proposée s'exprimera par la transcendante connue $\Gamma(a, x)$, en donnant à cette transcendante toute l'extension dont elle est susceptible.

193. Soit 2°. $\alpha + \beta = -n$, les transformées successives devront être prolongées, suivant la loi de l'art. 172, jusqu'à la transformée en T^{2n} qui sera

$$\frac{\zeta^{2} dT^{2n}}{(T^{2n})^{2} d\zeta} + \frac{\alpha\zeta + 1}{T^{2n}} + (n + \beta)\zeta - \frac{1}{(T^{2n})^{2}} = 0.$$

Dans celle-ci, faisant de nouveau $\frac{1}{T^{2n}} = 1 + \zeta Y$, on aura la dernière transformée

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta}+\frac{(1-a)\zeta+1}{Y}+\zeta=0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{Y}=\zeta^{1-a}e^{-\frac{1}{\zeta}}(A-\int\zeta^{a-2}e^{\frac{1}{\zeta}}d\zeta).$$

Connaissant Y, on obtiendra successivement les valeurs de T^{2n}, T^{2n-1}, et enfin T, de sorte qu'on aura l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée.

194. Dans cette intégrale se trouve la transcendante $\int\zeta^{a-2}e^{\frac{1}{\zeta}}d\zeta$ qui, pour toutes les valeurs négatives de ζ, se ramène immédiatement aux fonctions $\Gamma(a, x)$. Car faisant $\zeta=-\sigma$ et ensuite $e^{-\frac{1}{\sigma}}=x$, ou $\frac{1}{\sigma}=l\frac{1}{x}$, on a

$$\frac{1}{Y}=\sigma^{1-a}e^{\frac{1}{\sigma}}(A-\int\sigma^{a-2}e^{-\frac{1}{\sigma}}d\sigma),$$

et $\int\sigma^{a-2}e^{-\frac{1}{\sigma}}d\sigma=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{1-a}=\Gamma(1-a, x)$. Ainsi dans le cas de ζ négatif, l'intégrale de l'équation différentielle proposée dépendra simplement de la fonction $\Gamma(1-a, x)$.

Dans le cas de ζ positif, on substituera à la fonction $\Gamma(1-a, x)$, ce que devient cette fonction lorsque $x=e^{\frac{1}{\zeta}}$, c'est-à-dire lorsque x est >1; ou bien, pour éviter des transformations qui quelquefois sont embarrassées d'imaginaires, on conservera dans l'expression de T la transcendante $\int\zeta^{a-2}e^{\frac{1}{\zeta}}d\zeta$ qui s'évaluera convenablement suivant les différens cas.

Si a est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale dont il s'agit s'exprimera toujours exactement, ou se réduira à la forme connue $\int\frac{e^z dz}{z}$.

Si a n'est pas un entier, soit $\frac{1}{\zeta}=u$, on aura $\int\zeta^{a-2}e^{\frac{1}{\zeta}}d\zeta=-\int u^{-a}e^u du$, ce qui donne par le développement de e^{-u}, la valeur approchée

$$\int\zeta^{a-2}e^{\frac{1}{\zeta}}d\zeta=\text{const.}-\frac{u^{1-a}}{1-a}-\frac{u^{2-a}}{2-a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3-a}}{3-a}-\text{etc.}$$

On peut aussi mettre cette intégrale sous la forme

$$\text{const.}-e^u\left(\frac{u^{1-a}}{1-a}-\frac{u^{2-a}}{1-a.2-a}+\frac{u^{3-a}}{1-a.2-a.3-a}-\text{etc.}\right),$$

d'où résulte

$$\frac{1}{Y}=Ae^{-u}u^{\alpha-1}-\frac{1}{1-\alpha}+\frac{u}{1-\alpha.2-\alpha}-\frac{u^2}{1-\alpha.2-\alpha.3-\alpha}+\text{etc.},$$

série qui pourra être divergente dans les premiers termes, mais qui deviendra toujours convergente après un certain nombre de termes.

195. Si, au lieu de faire les substitutions dans l'ordre indiqué art. 172, on les fait dans l'ordre inverse, on aura les équations suivantes qui serviront à déterminer les transformées successives en T°, $T^{\circ\circ}$, $T^{\circ(2n-1)}$, $T^{\circ(2n)}$,

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{T^{\circ}} = 1+\beta\,\zeta T, & \alpha^{\circ} = 1-\alpha, & \beta^{\circ} = \alpha+\beta-1, \\
\frac{1}{T^{\circ\circ}} = 1+\beta^{\circ}\,\zeta T^{\circ}, & \alpha^{\circ\circ} = \alpha, & \beta^{\circ\circ} = \beta-1, \\
\frac{1}{T^{\circ\circ\circ}} = 1+\beta^{\circ\circ}\,\zeta T^{\circ\circ}, & \alpha^{\circ\circ\circ} = 1-\alpha, & \beta^{\circ\circ\circ} = \alpha+\beta-2, \\
\frac{1}{T^{\circ\circ\circ\circ}} = 1+\beta^{\circ\circ\circ}\zeta T^{\circ\circ\circ}, & \alpha^{\circ\circ\circ\circ} = \alpha, & \beta^{\circ\circ\circ\circ} = \beta-2, \\
\text{etc.,} & \text{etc.,} & \text{etc.}
\end{array}$$

De là on voit que la transformée paire en $T^{\circ(2n)}=Y$, sera

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta}+\frac{\alpha\zeta+1}{Y}+(\beta-n)\zeta-\frac{1}{Y^2}=0,$$

et que la transformée impaire en $T^{\circ(2n-1)}=Y$, sera

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta}+\frac{(1-\alpha)\zeta+1}{Y}+(\alpha+\beta-n)\zeta-\frac{1}{Y^2}=0.$$

Donc, 1°. si β est égal à un nombre entier positif n, la transformée de l'ordre $2n$ se réduira à l'équation linéaire

$$\zeta^2\frac{dY}{d\zeta}+(\alpha\zeta+1)Y-1=0,$$

dont l'intégrale est $Y=\zeta^{-\alpha}e^{\frac{1}{\zeta}}\left(A-\int\zeta^{\alpha-2}e^{-\frac{1}{\zeta}}d\zeta\right)$. Si dans cette expression on fait $e^{-\frac{1}{\zeta}}=x$, ou $\frac{1}{\zeta}=l\,\frac{1}{x}$, on aura

$$\int\zeta^{\alpha-2}e^{-\frac{1}{\zeta}}d\zeta=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}=\Gamma(1-\alpha,x);$$

ainsi l'intégrale de l'équation proposée en T s'exprimera généralement au moyen de la fonction $\Gamma(1-\alpha, x)$.

2°. Si $\alpha+\beta$ est égal à un nombre entier positif n, la transformée de l'ordre $2n-1$, se réduira à une équation linéaire,

$$\frac{\zeta^2 dY}{d\zeta}+[(1-\alpha)\zeta+1]Y-1=0,$$

dont l'intégrale est

$$Y=\zeta^{\alpha-1}e^{\frac{1}{\zeta}}(A-\int\zeta^{-1-\alpha}e^{-\frac{1}{\zeta}}d\zeta);$$

et en faisant toujours la substitution $e^{-\frac{1}{\zeta}}=x$, on aura

$$\int\zeta^{-1-\alpha}e^{-\frac{1}{\zeta}}d\zeta=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=\Gamma(\alpha,x).$$

Donc alors l'intégrale complète de l'équation proposée s'exprimera au moyen de la fonction $\Gamma(\alpha, x)$.

196. Il reste donc démontré qu'étant proposée l'équation différentielle,

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta}+\frac{\alpha\zeta+1}{T}+6\zeta-\frac{1}{T^2}=0,$$

on en pourra toujours trouver l'intégrale complète au moyen des fonctions $\Gamma(a, x)$, considérées dans toute l'étendue dont elles sont susceptibles, si l'un des nombres 6, $\alpha+6$, est un entier positif ou négatif.

Nous remarquerons que si l'on proposait l'équation différentielle

$$\zeta^2\frac{dZ}{d\zeta}+(A\zeta+1)Z+B\zeta Z^2+C\zeta-D=0,$$

où il y a quatre coefficiens constans A, B, C, D, cette équation pourrait être ramenée à la même forme que l'équation précédente qui ne contient que deux coefficiens constans. En effet, soit $Z=mT+n$, m et n étant deux constantes indéterminées, l'équation transformée en T sera

$$\begin{array}{llllll} m\zeta^2\frac{dT}{d\zeta} & + Bm^2\zeta T^2 & + (A\zeta+1)mT & + Bn^2\zeta & + n & = 0 \\ & & + 2Bmn\zeta T & + An\zeta & - D & \\ & & & + C\zeta. & & \end{array}$$

Déterminant n d'après l'équation $Bn^2+An+C=0$, faisant ensuite... $m=D-n$, $6=Bm$, $\alpha=A+2Bn$, on aura

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta}+\frac{\alpha\zeta+1}{T}+6\zeta-\frac{1}{T^2}=0,$$

équation entièrement semblable à l'équation (57). Donc l'équation proposée en Z sera intégrable si l'un des nombres

$$\mathrm{BD} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\,\sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{BC})},$$
$$\mathrm{BD} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\,\sqrt{(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{BC})},$$

est un entier positif ou négatif.

197. Nous remarquerons enfin qu'on peut donner à l'équation (57) une forme analogue à celle de l'équation de Riccati. Pour cela, soit d'abord $\zeta = \mathrm{A}x^m$, $\mathrm{T} = \mathrm{B}xy$; soit ensuite $m = -\frac{1}{\alpha}$, $\mathrm{B} = -\frac{\alpha}{\zeta}$, $\mathrm{A} = \frac{1}{\alpha^2 n}$, la transformée en y sera $\frac{dy}{dx} + y^2 - n\alpha x^{\frac{1}{\alpha}-1} y - n\beta x^{\frac{1}{\alpha}-2} = 0$; enfin faisant.... $y - \frac{1}{2}\alpha n x^{\frac{1}{\alpha}-1} = z$, on aura

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha - \beta\right) n x^{\frac{1}{\alpha}-2} - \tfrac{1}{4}\alpha^2 n^2 x^{\frac{2}{\alpha}-2} = 0.$$

Cette équation, qui est plus générale que l'équation de Riccati, sera donc intégrable si l'un des nombres β, $\alpha + \beta$, est un entier positif ou négatif.

Dans le cas où l'on a $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$, cette équation devient............. $\frac{dz}{dx} + z^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 n^2 x^{\frac{2}{\alpha}-2} = 0$; elle sera intégrable suivant la théorie précédente, si l'un des deux nombres $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$, est un entier positif ou négatif; alors l'exposant de x, savoir, $\frac{2}{\alpha} - 2$, se réduit à la forme $-\frac{4k}{2k+1}$, k étant un entier positif ou négatif; on obtient ainsi les mêmes résultats que présente la résolution connue de l'équation de Riccati.

FIN DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

APPENDICE.

SECTION PREMIÈRE.

Sur le Développement de la puissance $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n}$.

1. On peut toujours supposer $a<1$; car si on avait $a<1$, on mettrait $\frac{1}{a}$ à la place de a, et la puissance à développer serait $a^{2n}(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n}$, a étant <1.

Cela posé, si l'on fait $D=1+a^2-2a\cos\varphi$, et qu'on suppose

$$D^{-n}=P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+2P_3\cos 3\varphi+\text{etc.},$$

l'expression générale du coefficient $P(\lambda)$ sera donnée par la formule suivante où l'intégrale doit être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\pi$:

$$P(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}. \tag{1}$$

En effet, on sait que l'intégrale $\int d\varphi\cos\lambda\varphi\cos\mu\varphi$ prise entre ces limites, se réduit à zéro, pour toutes valeurs des entiers λ et μ, pourvu qu'ils soient différens l'un de l'autre ; ainsi en substituant pour D^{-n} la valeur développée $P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+\text{etc.}$, l'intégrale $\int D^{-n}d\varphi\cos\lambda\varphi$ se réduira au seul terme $2P(\lambda)\int d\varphi\cos^2\lambda\varphi$, dont la valeur est $\pi P(\lambda)$, ce qui donne la formule (1).

Cette formule réduit aux quadratures la détermination générale du coefficient $P(\lambda)$; mais il importe de chercher une autre expression de ce coefficient propre à en faciliter le calcul numérique pour toutes valeurs données de n et de λ.

Il est nécessaire, pour cet effet, de traiter séparément le cas où l'exposant n est un nombre entier, positif ou négatif, et celui où n est un nombre fractionnaire. Dans le premier cas, la valeur du cofficient général $P(\lambda)$ peut être déterminée exactement par une fonction rationnelle de n et de λ ; dans le second cas, les coefficiens $P(\lambda)$ sont en général des transcendantes qui ont beaucoup de rapport avec les fonctions elliptiques et qui coïncident avec elles lorsque $2n$ est un nombre impair.

§ I. *Solution du cas où l'exposant* n *est un nombre entier, positif ou négatif.*

2. Nous ferons toujours $a < 1$, $D = 1 + a^2 - 2a\cos\varphi$ et

$$D^{-n} = P_0 + 2P_1 \cos\varphi + 2P_2 \cos 2\varphi + 2P_3 \cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Dans cette série, le coefficient $P(\lambda)$ qui accompagne $\cos\lambda\varphi$, suppose n constant; mais si on a égard à la variabilité de n, ce coefficient, fonction de deux variables, devra être désigné par $P(\lambda, n)$; on pourra en outre considérer $P(\lambda, n)$ comme étant fonction de a, et différencier, s'il y a lieu, ce cofficient par rapport à a.

Cela posé, on sait par la théorie des suites récurrentes, que la suite infinie $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + a^3\cos 3\varphi + \text{etc.}$, n'est autre chose que le développement de la fraction $\frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$, suivant les puissances ascendantes de a. De là on déduit l'équation

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} = 1 + 2a\cos\varphi + 2a^2\cos 2\varphi + 2a^3\cos 3\varphi + \text{etc.},$$

ou

$$D^{-1} = \frac{1}{1 - a^2}\left(1 + 2a\cos\varphi + 2a^2\cos 2\varphi + 2a^3\cos 3\varphi + \text{etc.}\right),$$

ce qui fait voir que dans le cas de $n = 1$, on a en général

$$P(\lambda, 1) = \frac{a^\lambda}{1 - a^2}. \tag{2}$$

Au moyen de cette valeur, nous allons déterminer successivement $P(\lambda, 2)$, $P(\lambda, 3)$, et en général $P(\lambda, n)$, n étant un nombre entier positif quelconque.

3. Pour cela différencions par rapport à a l'équation $P(\lambda, n) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}$, nous aurons

$$\frac{dP(\lambda, n)}{da} = \frac{1}{\pi}\int \frac{n\,d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^{n+1}}(2\cos\varphi - 2a);$$

multipliant de part et d'autre par a et mettant au lieu de $2a\cos\varphi - 2a^2$ sa valeur $1 - a^2 - D$, on aura

$$\frac{a\,dP(\lambda, n)}{da} = \frac{n}{\pi}(1 - a^2)\int \frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^{n+1}} - \frac{n}{\pi}\int \frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}.$$

Le second membre de cette équation se réduit à $n(1 - a^2)P(\lambda, n + 1)$

$-nP(\lambda, n)$, donc on a

$$P(\lambda, n+1) = \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{d\,[a^n P(\lambda, n)]}{d(a^n)}. \tag{3}$$

Ainsi le coefficient $P(\lambda, n+1)$ se déduira en général du coefficient $P(\lambda, n)$, au moyen d'une simple différentiation faite en regardant a comme seule variable; et puisque nous connaissons la valeur de $P(\lambda, 1)$ par la formule (2), nous en déduirons successivement les valeurs de $P(\lambda, 2)$, $P(\lambda, 3)$, etc., savoir :

$$P(\lambda,2) = \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^3}[\lambda+1-a^2(\lambda-1)],$$

$$P(\lambda,3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^5}[(\lambda+1)(\lambda+2) - 2a^2(\lambda+2)(\lambda-2) + a^4(\lambda-2)(\lambda-1)],$$

$$\begin{aligned} P(\lambda,4) = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^7}[&(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) - 3a^2(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda-3) \\ &+ 3a^4(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-2) - a^6(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda,5) = \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^9}[&(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) - 4a^2(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-4) \\ &+ 6a^4(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-4)(\lambda-3) - 4a^6(\lambda+4)(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-2) \\ &+ a^8(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)], \end{aligned}$$

etc.,

La loi de ces expressions est facile à saisir, et en général la valeur de $P(n, \lambda)$ sera donnée par la formule suivante :

$$\left.\begin{aligned} P(\lambda, n) &= \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^{2n-1}} \cdot \frac{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3\,\ldots\,\lambda+n-1}{1.2.3\,\ldots\,n-1}\,B, \\ B &= 1 + \frac{n-1}{1}a^2 \cdot \frac{n-\lambda-1}{\lambda+1} + \frac{n-1.n-2}{1.2}a^4 \cdot \frac{n-\lambda-1.n-\lambda-2}{\lambda+1.\lambda+2} \\ &\quad + \frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}a^6 \cdot \frac{n-\lambda-1.n-\lambda-2.n-\lambda-3}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pour s'assurer de l'exactitude de cette formule, il suffit de substituer la valeur générale de $P(\lambda, n)$ dans le second membre de l'équation (3); on trouvera, après les réductions, une valeur de $P(\lambda, n+1)$ qui ne sera autre chose que ce que devient la fonction $P(\lambda, n)$ en mettant $n+1$ à la place de n. Tout autre mode de vérification serait moins facile que celui que nous indiquons.

4. Le cas le plus simple est celui de $n = \lambda + 1$; alors B ou $B(\lambda, n)$ se réduit à son premier terme 1, et on a

$$P(\lambda, \lambda+1) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{D^{\lambda+1}} = \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^{2\lambda+1}} \cdot \frac{\lambda+1.\lambda+2\ldots 2\lambda}{1.2\ldots\ldots\lambda}.$$

Un autre cas qui mérite d'être remarqué est celui de $\lambda = 0$; alors on a

$$(5)\quad P(o,n) = \frac{1}{(1-a^2)^{2n-1}}\left[1 + \left(\frac{n-1}{1}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n-1.n-2}{1.2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\right)^2 a^6 + \text{etc.}\right],$$

formule dont les coefficiens sont les quarrés des coefficiens du binome élevé à la puissance $n-1$; elle donne en même temps la valeur de l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$, prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$. On aurait par exemple,

$$\int\frac{d\varphi}{D^5} = \frac{\pi}{(1-a^2)^9}(1 + 4^2a^2 + 6^2a^4 + 4^2a^6 + a^8).$$

5. La formule (4) ne laisse rien à désirer lorsque n est un entier positif, mais elle ne peut s'appliquer au cas où n est un entier négatif ; c'est pourquoi il est nécessaire de chercher directement la solution de ce cas, c'est-à-dire la valeur générale du coefficient $P(\lambda, -n)$ donné par l'intégrale définie $\frac{1}{\pi}\int D^n d\varphi \cos\lambda\varphi$. Or, sans passer par les cas particuliers, on peut déterminer tout d'un coup la valeur de cette intégrale.

En effet, le polynome $1 - 2a\cos\varphi + a^2$ étant décomposé en ses deux facteurs imaginaires, on aura

$$D = (1 - a e^{\varphi\sqrt{-1}})(1 - a e^{-\varphi\sqrt{-1}});$$

si ensuite on suppose

$$(1 - a e^{\varphi\sqrt{-1}})^n = 1 + K_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + K_2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} \ldots + K_\lambda e^{\lambda\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

on aura semblablement

$$(1 - a e^{-\varphi\sqrt{-1}})^n = 1 + K_1 e^{-\varphi\sqrt{-1}} + K_2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} \ldots + K_\lambda e^{-\lambda\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre afin d'avoir la valeur de D^n, et observant qu'il suffit de conserver dans le second membre les termes affectés de $e^{\lambda\varphi\sqrt{-1}}$ et $e^{-\lambda\varphi\sqrt{-1}}$, puisque ce sont les seuls qui ne disparaissent pas dans l'intégrale cherchée, on aura pour cette partie de D^n la valeur

$$(K_\lambda + K_1 K_{\lambda+1} + K_2 K_{\lambda+2} + K_3 K_{\lambda+3} + \text{etc.})(e^{\lambda\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\lambda\varphi\sqrt{-1}});$$

mais le facteur $e^{\lambda\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\lambda\varphi\sqrt{-1}}$ se réduit à $2\cos\lambda\varphi$, et on a entre les limites données $\int d\varphi.2\cos^2\lambda\varphi = \pi$; donc la valeur générale du coefficient $P(\lambda, -n)$ est

$$P(\lambda, -n) = K_\lambda + K_1 K_{\lambda+1} + K_2 K_{\lambda+2} + K_3 K_{\lambda+3} + \text{etc.};$$

or, on a par la formule du binome

$$K_\lambda = \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots n-\lambda+1}{1.2.3\ldots\lambda}(-a)^\lambda,$$

$$K_{\lambda+1} = K_\lambda \,.\, \frac{n-\lambda}{\lambda+1}(-a), \qquad K_1 = \frac{n}{1}(-a),$$

$$K_{\lambda+2} = K_\lambda \,.\, \frac{n-\lambda\,.\,n-\lambda-1}{\lambda+1.\lambda+2}(-a)^2, \qquad K_2 = \frac{n.n-1}{1.2}(-a)^2,$$

$$K_{\lambda+3} = K_\lambda \,.\, \frac{n-\lambda.n-\lambda-1.n-\lambda-2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}(-a)^3 \qquad K_3 = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(-a)^3,$$

etc. etc.

Donc enfin la valeur de $P(\lambda, -n)$ sera donnée par la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned} &P(\lambda,-n) = (-a)^\lambda . \frac{n.n-1.n-2\ldots n+1-\lambda}{1\,.\,2\,.\,3\qquad\lambda} . C \\ &C = 1 + \frac{n}{1}a^2 . \frac{n-\lambda}{\lambda+1} + \frac{n.n-1}{1.2}a^4 . \frac{n-\lambda.n-\lambda-1}{\lambda+1.\lambda+2} \\ &\qquad + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^6 . \frac{n-\lambda.n-\lambda-1.n-\lambda-2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

6. Remarquons que dans l'application de cette formule il faut supposer $n =$ ou $> \lambda$; en effet, si n était $< \lambda$, le développement de D^n ne pourrait donner aucun terme semblable à $\cos \lambda\varphi$; ainsi l'intégrale $\int D^n d\varphi \cos \lambda\varphi$, prise entre les limites données, serait nulle. La plus petite valeur qu'on puisse donner à n est donc $n = \lambda$, alors on a $\int D^\lambda d\varphi \cos \lambda\varphi = \pi(-a)^\lambda$, ce qui se vérifie immédiatement.

Le cas de $\lambda = 0$ mérite encore d'être remarqué; alors on a

$$\int D^n d\varphi = \pi \left[1 + n^2a^2 + \left(\frac{n.n-1}{1.2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right)^2 a^6 + \text{etc.}\right) \qquad (7)$$

Comparant cette formule à la formule (5), on en tire

$$\int D^n d\varphi = (1-a^2)^{2n+1} \int \frac{d\varphi}{D^{n+1}}, \qquad (8)$$

ce qui établit un rapport remarquable entre ces deux intégrales définies, rapport qui aurait lieu quand même n ne serait pas un nombre entier et d'où l'on déduirait aisément la formule de l'art. 148, tome I.

En général, si l'on observe que la valeur du cofficient C n'est autre chose que celle du coefficient B dans laquelle on aurait mis $n+1$ au lieu de n, on en déduira un rapport remarquable entre les intégrales $\int D^n d\varphi \cos \lambda\varphi$ et $\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{D^{n+1}}$. Ce rapport est donné par l'équation suivante, dont l'équation (8) n'est qu'un cas particulier.

$$\int \mathrm{D}^n d\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{n.n-1.n-2\ldots n-\lambda+1}{n+1.n+2.n+3\ldots n+\lambda}(-1)^\lambda(1-a^2)^{2n+1}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{\mathrm{D}^{n+1}}\ldots(9)$$

7. Les formules précédentes résolvent complètement le problème du développement de la puissance D^{-n}, lorsque l'exposant n est un entier positif ou négatif; elles peuvent même s'appliquer au cas où l'exposant n ne serait pas un nombre entier; mais alors la suite qui exprime la valeur du coefficient $\mathrm{P}(\lambda, n)$ s'étend à l'infini, et on ne peut plus déterminer que par approximation les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc., qui deviennent dans ce cas des transcendantes d'une nature particulière; d'où naît cette sorte de paradoxe que le développement d'une quantité algébrique telle que D^{-n} ne peut s'exécuter qu'avec des coefficiens de nature transcendante. Nous examinerons ci-après les propriétés de ces coefficiens, afin de faciliter autant qu'il est possible les calculs nécessaires pour leur détermination; mais nous saisirons cette occasion de démontrer ici une formule assez remarquable qui a lieu dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, et qui paraît ne se rattacher à aucune autre formule du même genre.

8. Si on fait $n=\frac{1}{2}$ dans la formule (4) et que préalablement on mette au lieu de $\frac{\lambda+1.\lambda+2\ldots\lambda+n-1}{1.2\ldots n-1}$, la fraction équivalente $\frac{n.n+1.n+2\ldots n+\lambda-1}{1.2.3\ldots\lambda}$, on aura $\pi\mathrm{P}(\lambda, \frac{1}{2})$ ou

$$\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}} = \pi a^\lambda.\frac{1.3.5\ldots2\lambda-1}{2.4.6\ldots2\lambda}\left(1+\tfrac{1}{2}a^2.\frac{2\lambda+1}{2\lambda+2}+\frac{1.3}{2.4}a^4.\frac{2\lambda+1.2\lambda+3}{2\lambda+2.2\lambda+4}+\text{etc.}\right)$$

Mais si l'on considère l'intégrale $\mathrm{Z}=\int\frac{d\varphi\sin^{2\lambda}\varphi}{\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)}}$, et qu'on développe la quantité sous le signe, on aura

$$\mathrm{Z}=\int d\varphi\left(\sin^{2\lambda}\varphi+\tfrac{1}{2}a^2.\sin^{2\lambda+2}\varphi+\frac{1.3}{2.4}a^4.\sin^{2\lambda+4}\varphi+\text{etc.}\right)$$

Effectuant l'intégration de chaque terme entre les limites $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, d'après la formule connue $\int d\varphi\sin^{2m}\varphi=\frac{1.3.5\ldots2m-1}{2.4.6\ldots2m}\pi$, on aura

$$\mathrm{Z}=\pi.\frac{1.3.5\ldots2\lambda-1}{2.4.6\ldots2\lambda}\left(1+\tfrac{1}{2}a^2.\frac{2\lambda+1}{2\lambda+2}+\frac{1.3}{2.4}a^4.\frac{2\lambda+1.2\lambda+3}{2\lambda+2.2\lambda+4}+\text{etc.}\right);$$

et puisque cette valeur est la même, au facteur a^λ près, que celle de $\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}}$, on aura en général la formule

$$\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos\varphi)}}=a^\lambda.\int\frac{d\varphi\sin^{2\lambda}\varphi}{\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)}},\qquad(10)$$

où les deux intégrales sont prises depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\pi$.

La valeur du coefficient $P(\lambda, \frac{1}{2})$ que donne cette formule, peut se tirer directement d'une intégrale comprise dans l'art. 123, tome I. Cette intégrale est en général

$$\int \frac{1 - a^2\sin^4\theta}{1 - 2a\sin^2\theta\cos\varphi + a^2\sin^4\theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}} = D^{-\frac{1}{2}} \text{ arc tang. } \frac{D^{\frac{1}{2}}\tang\theta}{\sqrt{(1-a^2\sin^2\theta)}};$$

et si on la prend depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, on aura

$$D^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int \frac{1 - a^2\sin^4\theta}{1 - 2a\sin^2\theta\cos\varphi + a^2\sin^4\theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}}.$$

Développant la quantité sous le signe par la formule qui sert à exprimer D^{-1}, dans l'art. 2, on aura

$$D^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}}(1 + 2a\sin^2\theta\cos\varphi + 2a^2\sin^4\theta\cos 2\varphi + \text{etc.})$$

Ainsi on voit que dans le développement de $D^{-\frac{1}{2}}$, le coefficient $P(\lambda, \frac{1}{2})$ sera en général $\frac{a^\lambda}{\pi}\int \frac{d\theta\sin^{2\lambda}\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}}$, cette intégrale étant prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$.

On pourra toujours déterminer la valeur exacte de ce coefficient par les fonctions complètes $F'a$, $E'a$; mais si on voulait la déterminer par les quadratures, la forme $\frac{a^\lambda}{\pi}\int \frac{d\theta\sin^{2\lambda}\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}}$ serait beaucoup plus facile à calculer que la forme $\frac{1}{\pi}\int \frac{d\theta\cos\lambda\theta}{\sqrt{(1 + a^2 - 2a\cos\theta)}}$, où l'ordonnée ne suit pas une marche aussi régulière.

Il résulte aussi de l'expression $P(\lambda, \frac{1}{2}) = \frac{a^\lambda}{\pi}\int \frac{d\theta\sin^{2\lambda}\theta}{\sqrt{(1 - a^2\sin^2\theta)}}$, que le coefficient P diminue continuellement à mesure que le nombre des termes λ augmente, tant à raison du facteur constant a^λ, qu'à raison du facteur variable $\sin^{2\lambda}\theta$. Cette expression fait d'ailleurs connaître deux limites entre lesquelles le coefficient $P(\lambda, \frac{1}{2})$ sera toujours contenu; on aura en effet

$$P(\lambda, \tfrac{1}{2}) > \frac{a^\lambda}{\pi}\int d\theta\sin^{2\lambda}\theta > a^\lambda \cdot \frac{1.3.5..2\lambda - 1}{2.4.6..2\lambda},$$

et

$$P(\lambda, \tfrac{1}{2}) < \frac{a^\lambda}{\pi}\int \frac{d\theta\sin^{2\lambda}\theta}{\sqrt{(1 - a^2)}} < \frac{a^\lambda}{\sqrt{(1 - a^2)}} \cdot \frac{1.3.5..2\lambda - 1}{2.4.6..2\lambda}.$$

Nous remarquerons enfin qu'en différenciant par rapport à a, le coefficient $P(\lambda, \frac{1}{2})$, on en tirerait la valeur générale du coefficient $P(\lambda, n)$ pour le cas de $n = \frac{3}{2}$, mais cette valeur serait moins simple que pour le cas de $n = \frac{1}{2}$.

§ II. *Solution du cas où l'exposant* n *n'est pas un nombre entier.*

9. Supposant toujours que le développement de D^{-n} est représenté par la suite

$$P_0 + 2P_1 \cos\varphi + 2P_2 \cos 2\varphi + 2P_3 \cos 3\varphi \ldots + 2P_\lambda \cos\lambda\varphi + \text{etc.},$$

l'expression générale du coefficient P_λ ou $P(\lambda)$, sera donnée par la formule (4), en y faisant le changement indiqué dans l'art. 8, on aura ainsi

$$(11)\left\{\begin{aligned}&P(\lambda) = \frac{n.n+1.n+2\ldots n+\lambda-1}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\frac{a^\lambda}{(1-a^2)^{2n-1}}\Big(1 + \frac{1-n}{1}\cdot\frac{\lambda+1-n}{\lambda+1}a^2\\ &+\frac{1-n.2-n}{1.2}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n}{\lambda+1.\lambda+2}a^4 + \frac{1-n.2-n.3-n}{1.2.3}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n.\lambda+3-n}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}a^6+\text{et}\end{aligned}\right.$$

Une autre expression de ce même cofficient peut se tirer de la formule (6), en y changeant le signe de n : cette expression est

$$(12)\left\{\begin{aligned}&P(\lambda) = \frac{n.n+1.n+2\ldots n+\lambda-1}{1.2.3\ldots\lambda}a^\lambda\Big(1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n+\lambda}{\lambda+1}.a^2 + \frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{n+\lambda.n+\lambda+1}{\lambda+1.\lambda+2}a^4\\ &\qquad + \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\cdot\frac{n+\lambda.n+\lambda+1.n+\lambda+2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}a^6 + \text{etc.}\Big)\end{aligned}\right.$$

Cette formule renferme une suite moins convergente que celle de la formule (11), mais elle jouit de quelques avantages particuliers; elle fait voir, par exemple, que n étant positif, les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP(\lambda)}{da}$, $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, $\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}$, etc. seront tous positifs.

10. Soit $V = \frac{\sin\lambda\varphi}{D^{n-1}}$, on aura en différenciant cette équation,

$$dV = \frac{\lambda d\varphi \cos\lambda\varphi}{D^{n-1}} - \frac{2a(n-1)\sin\varphi}{D^n}.d\varphi \sin\lambda\varphi,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$\begin{aligned}dV = (1+a^2)\lambda\,.\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n} &- (\lambda+n-1)\,a\,.\frac{d\varphi\cos(\lambda-1)\varphi}{D^n}\\ &- (\lambda-n+1)\,a\,.\frac{d\varphi\cos(\lambda+1)\varphi}{D^n};\end{aligned}$$

intégrant de part et d'autre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, et observant que dans ces deux limites V s'évanouit, on aura d'après l'équation (1),

$$(13)\quad (\lambda+1-n)\,P(\lambda+1) - \left(\frac{1+a^2}{a}\right)\lambda P(\lambda) + (\lambda-1+n)\,P(\lambda-1) = 0.$$

Cette équation donne la loi générale qui lie entre eux trois termes consécutifs quelconques de la suite P_0, P_1, P_2, etc.; elle fait voir qu'il suffit de connaître deux termes de cette suite pour déterminer tous les autres; mais il y a des précautions à prendre, suivant les différens cas, pour que l'erreur qui peut exister sur les deux termes connus ne se multiplie pas dans le calcul des autres termes, de manière à rendre bientôt les résultats entièrement défectueux.

11. Si on fait $P(\lambda) = \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+\lambda-1}}{1.2\ldots\lambda}\, a^\lambda . A(\lambda)$, et qu'on substitue cette valeur dans l'équation (4), on aura

$$(14)\qquad \left(1 + \frac{n-n^2}{\lambda(\lambda+1)}\right) a^2 A(\lambda+1) - (1+a^2)\, A(\lambda) + A(\lambda-1) = 0.$$

Cette équation exprime pareillement la loi qui règne entre trois termes consécutifs de la suite A_0, A_1, A_2, A_3, etc. En supposant cette suite connue, le développement de D^{-n} serait donné par la formule

$$D^{-n} = A_0 + 2a.\frac{n}{1} A_1 \cos\varphi + 2a^2.\frac{n.\overline{n+1}}{1.2} A_2 \cos 2\varphi + 2a^3.\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} A_3 \cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Lorsque λ est très grand, l'équation (14) donne à très peu près

$$A(\lambda+1) = \frac{1+a^2}{a^2} A(\lambda) - \frac{1}{a^2} A(\lambda-1);$$

d'où l'on peut conclure que la série A_0, A_1, A_2, etc. doit se confondre dans les termes éloignés avec une série récurrente dont l'échelle de relation est $\frac{1+a^2}{a^2}$, $-\frac{1}{a^2}$; celle-ci aurait pour terme général $\alpha + \beta\left(\frac{1}{a^2}\right)^\lambda$, α et β étant des coefficiens constans. Ainsi lorsque λ est très grand, on doit avoir aussi $A(\lambda) = \alpha + \beta\left(\frac{1}{a^2}\right)^\lambda$. Mais comme, d'après l'équation (11), la valeur de $A(\lambda)$ ne doit contenir aucune puissance négative de a, il s'ensuit qu'on a $\beta = 0$; et qu'ainsi λ étant très grand, on aura $A(\lambda) = \alpha$, ou $A(\lambda)$ égal à une constante. Cette constante se détermine en faisant λ infini dans la valeur générale de $A(\lambda)$ donnée par l'équation (12), laquelle est

$$(15)\qquad A(\lambda) = 1 + \frac{n}{1}.\frac{n+\lambda}{\lambda+1} a^2 + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}.\frac{\overline{n+\lambda}.\overline{n+\lambda+1}}{\overline{\lambda+1}.\overline{\lambda+2}} a^4 + \text{etc.},$$

et on a par cette supposition $A(\lambda) = (1-a^2)^{-n}$. Mais ce résultat n'est que le premier terme d'une série propre à exprimer la valeur générale de $A(\lambda)$, lorsque λ est très grand. Voici comment on parvient à cette série.

12. Faisons, pour abréger, $\lambda + 1 = \lambda'$, $\lambda + 2 = \lambda''$, etc., et supposons

$$A.(\lambda) = a\left(1 + \frac{c'}{\lambda'} + \frac{c''}{\lambda'\lambda''} + \frac{c'''}{\lambda'\lambda''\lambda'''} + \text{etc.}\right),$$

c', c'', c''', etc. étant des coefficiens indépendans de λ; cette valeur donne

$$A(\lambda) - A(\lambda + 1) = a\left(\frac{c'}{\lambda'\lambda''} + \frac{2c''}{\lambda'\lambda''\lambda'''} + \frac{3c'''}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{iv}}} + \text{etc.}\right),$$

$$A(\lambda+1) - A(\lambda + 2) = a\left(\frac{c'}{\lambda''\lambda'''} + \frac{2c''}{\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{iv}}} + \frac{3c'''}{\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{iv}}\lambda^{\text{v}}} + \text{etc.}\right);$$

multipliant le second membre de la dernière équation par λ', et observant que $\lambda' = \lambda''' - 2 = \lambda^{\text{iv}} - 3 = \lambda^{\text{v}} - 4$, etc., on aura, après avoir divisé par λ',

$$A(\lambda+1) - A(\lambda+2) = a\left(\frac{c'}{\lambda'\lambda''} + \frac{2(c''-c')}{\lambda'\lambda''\lambda'''} + \frac{3(c'''-2c'')}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{iv}}} + \frac{4(c^{\text{iv}}-3c''')}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{iv}}\lambda^{\text{v}}} + \text{etc.}\right).$$

Maintenant si on met l'équation (14) sous cette forme :

$$0 = A(\lambda) - A(\lambda+1) - a^2[A(\lambda+1) - A(\lambda+2)] + \frac{n-n^2}{\lambda'\lambda''}a^2A(\lambda+2),$$

et qu'on substitue les valeurs précédentes, on aura une équation qui devant être identique, donnera les équations de condition

$$\begin{aligned}
(1 - a^2)\, c' &= (n^2 - n)\, a^2,\\
2\,(1 - a^2)\, c'' &= (n^2 - n - 2)\, a^2c',\\
3\,(1 - a^2)\, c''' &= (n^2 - n - 2.3)\, a^2c'',\\
4\,(1 - a^2)\, c^{\text{iv}} &= (n^2 - n - 3.4)\, a^2c''',\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les valeurs des coefficiens

$$\begin{aligned}
c' &= \frac{n.\overline{n-1}}{1} \cdot \frac{a^2}{1-a^2},\\
c'' &= \frac{\overline{n+1}.\overline{n-2}}{2} \cdot \frac{a^2}{1-a^2}\, c',\\
c''' &= \frac{\overline{n+2}.\overline{n-3}}{3} \cdot \frac{a^2}{1-a^2}\, c'',\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

donc on a la formule générale

$$\text{(16)}\quad A(\lambda)=(1-a^2)^{-n}\Big[1+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}
+\frac{n-1.n-2}{1.2}\cdot\frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2
+\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\cdot\frac{n.n+1.n+2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^3+\text{etc.}\Big].$$

Cette suite a l'avantage de se terminer d'elle-même, toutes les fois que n est un entier positif ou négatif; mais si n est fractionnaire, comme nous le supposons, elle s'étendra à l'infini et ne sera convergente dans toute son étendue et pour toute valeur de λ, que lorsqu'on aura $a^2 < 1-a^2$ ou $a^2 < \frac{1}{2}$.

13. Dans tous les cas, si λ est fort grand, on aura une valeur très approchée de $A(\lambda)$ par les premiers termes de la série, qui décroîtront alors d'une manière rapide. Dans cette hypothèse, si on prend le logarithme de $A(\lambda)$, et qu'en négligeant les termes qui ont pour diviseurs λ^3, λ^4, etc., on réunisse deux termes tels que $\frac{p}{\lambda}+\frac{pq}{\lambda^2}$ en un seul $\frac{p}{\lambda-q}$, on aura

$$\log A(\lambda) = -n\log(1-a^2)+\frac{(n^2-n)\,a^2}{(1-a^2)\,\lambda+1}.$$

D'un autre côté la valeur de $P(\lambda)$ peut en général se mettre sous la forme

$$P(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\Gamma(\lambda+1)}\,a^\lambda A(\lambda);$$

et puisque λ est supposé très grand, on a par la formule de l'art. 74,

$$\log\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)}=(n-1)\log\lambda+\frac{n^2-n}{2\lambda}+\frac{(n^2-n)(1-2n)}{12\lambda^2};$$

donc on aura

$$\text{(17)}\quad \log P(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}\lambda\log a+(n-1)\log\lambda-n\log(1-a^2)-\log\Gamma n\\ +\dfrac{n^2-n}{2\lambda+\frac{2n-1}{3}}+\dfrac{(n^2-n)a^2}{\lambda(1-a^2)+1},\end{array}\right.$$

valeur qui doit être exacte aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\lambda^3}$, et dans laquelle il faudra multiplier les deux termes algébriques par le module $m=0.434$, si on veut que les logarithmes de cette équation soient changés en logarithmes vulgaires.

Nous devons observer, 1°. que si a était négatif, le terme $\lambda\log a$ sera toujours le même que si a était positif, mais alors $P(\lambda)$ sera affecté du facteur

$(-1)^{\lambda}$, ce qui rendra $P(\lambda)$ négatif si λ est impair; 2°. que si l'exposant n était négatif, c'est-à-dire si on avait à développer une puissance positive du polynome D, alors il faudrait dans le terme $-\log \Gamma n$, mettre la valeur que prend la fonction Γn lorsque sa racine n est négative, valeur donnée par la formule (43) du chap. XV; et dans le cas où cette valeur serait négative, on devra la considérer comme positive dans le terme $-\log \Gamma n$, et changer simplement le signe de $P(\lambda)$.

Il suit de ces deux observations, que le coefficient $P(\lambda)$ ne deviendra négatif que dans le cas où la quantité $a^{\lambda}\,\Gamma n$ serait négative.

On peut donc à l'aide de la formule (17) connaître d'une manière aussi prompte que facile, la valeur et le signe d'un terme éloigné quelconque dans la suite P_0, P_1, P_2, etc. Si par exemple on fait $a=\frac{9}{10}$, $n=\frac{1}{2}$, $\lambda=100$, on trouvera $\log P_{100}=8.6430984$, et $P_{100}=0.0439641\,2$; c'est la valeur très approchée du 101° terme de la suite dont il s'agit.

14. Revenons au calcul effectif des coefficiens P_0, P_1, P_2, etc. Lorsque a sera assez petit, on pourra se servir des formules (11) ou (12) indifféremment, pour calculer les coefficiens successifs qui seront donnés alors par des séries convergentes; mais il suffira de calculer directement par ces séries les termes alternatifs P_0, P_2, P_4, P_6, etc., et on en déduira les intermédiaires P_1, P_3, P_5, etc., au moyen de l'équation (13) qui donne en général

$$P(\lambda)=\frac{a}{1+a^2}\left[\left(1+\frac{1-n}{\lambda}\right)P(\lambda+1)+\left(1+\frac{n-1}{\lambda}\right)P(\lambda-1)\right]:$$

cette équation est d'un usage également sûr, soit que a soit très petit, soit qu'il diffère très peu de l'unité.

Si on se bornait à calculer les deux premiers termes P_0, P_1 par les séries qui les représentent, et qu'ensuite on se servît de ces deux premiers termes pour calculer les suivans par l'équation (13), les erreurs se multiplieraient dans ces diverses opérations, avec d'autant plus de rapidité, que a serait plus petit. En effet, les erreurs absolues sur P_2, P_3, P_4, etc. pourraient croître suivant la progression $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, etc.; et comme ces termes eux-mêmes décroissent à peu près suivant la progression a, a^2, a^3, etc., l'erreur relative pourrait augmenter d'un terme au suivant, à peu près dans le rapport de 1 à $\frac{1}{a^2}$, erreur qui ne tarderait pas à produire des résultats entièrement défectueux.

Lorsque a sera très près de l'unité, les séries comprises dans les formules (11) et (12) seront très peu convergentes, et il faudra en calculer un grand nombre de termes pour avoir, avec un degré d'approximation suffisant, les deux premiers coefficiens P_0, P_1; mais dans ce cas, on pourra se servir de l'équation (13) pour calculer les coefficiens suivans P_2, P_3, P_4, etc., et il ne sera pas à craindre que l'erreur augmente notablement d'un terme au suivant.

15. Au reste, on peut éviter les longueurs du calcul par séries, en déterminant les deux coefficiens P_0, P_1 par les quadratures qui représentent les intégrales $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$, $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{D^n}$, prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$. Mais dans le cas où a est peu différent de l'unité, la quantité D devient très petite lorsque φ est très petit; ainsi l'ordonnée de la courbe qu'il faut quarrer, serait très grande vers l'origine des abscisses. Pour obvier à cet inconvénient, nous observerons que l'intégrale $\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}$ peut en général être déterminée par l'intégrale $\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi$, puisqu'on a par la formule (9)

$$\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n} = \frac{n.n+1.n+2\ldots.n+\lambda-1}{1-n.2-n.3-n\ldots.\lambda-n}(1-a^2)^{1-2n}\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi.$$

Soit donc $\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi = \pi M(\lambda)$, et on aura

$$P(\lambda) = \frac{n.n+1.n+2\ldots.n+\lambda-1}{\lambda-n.\lambda-n-1.\lambda-n-2\ldots.1-n}\cdot\frac{M(\lambda)}{(1-a^2)^{2n-1}}.$$

Ainsi tout se réduit à trouver la quantité $M(\lambda)$ pour les deux valeurs $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, et on aura les deux coefficiens cherchés

$$P_0 = \frac{M_0}{(1-a^2)^{2n-1}},\quad P_1 = -\frac{n}{n-1}\cdot\frac{M_1}{(1-a^2)^{2n-1}}.$$

Or quelque petit que soit $1-a$, on pourra toujours trouver par les quadratures, des valeurs aussi approchées qu'on voudra de M_0 et M_1; mais pour faciliter les calculs, il sera bon de supposer $n > 1$, afin que l'ordonnée $D^{n-1}\cos\lambda\varphi$ de la courbe à quarrer, reste très petite lorsque $\varphi = 0$, ce qui n'arriverait pas si n était < 1. Cette condition au reste est facile à remplir dans tous les cas; car on verra bientôt que le développement de D^{-n} peut toujours se déduire, par un calcul très simple, du développement de D^{-n-1}.

16. Il y a encore une autre manière de calculer les coefficiens $P(\lambda)$, laquelle a l'avantage de réussir également lorsque a est très petit et lorsqu'il est très près de l'unité. Supposons qu'on veuille prolonger la suite P_0, P_1, P_2, etc. jusqu'au terme $P_{(m)}$; on calculera directement les valeurs de $A(m-1)$ et $A(m)$, par l'une ou l'autre des formules

87..

$$A(\lambda)=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+\lambda}{\lambda+1}a^2+\frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{n+\lambda.n+\lambda+1}{\lambda+1.\lambda+2}a^4+\text{etc.},$$

(18)

$$A(\lambda)=(1-a^2)^{1-2n}\left(1+\frac{1-n}{1}\cdot\frac{\lambda+1-n}{\lambda+1}a^2+\frac{1-n.2-n}{1.2}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n}{\lambda+1.\lambda+2}a^4+\text{etc.}\right).$$

Ces deux termes étant connus, on en déduira tous les précédens, depuis $A(m-2)$, $A(m-3)$...... jusqu'à A_0, au moyen de la formule (14) qui donne

$$A(\lambda-1)=A(\lambda)+a^2[A(\lambda)-A(\lambda+1)]+\frac{n^2-n}{\lambda(\lambda+1)}a^2A(\lambda+1).$$

Il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs dans la formule

$$D^{-n}=A_0+2a.\frac{n}{1}A_1\cos\varphi+2a^2.\frac{n.n+1}{1.2}A_2\cos 2\varphi$$
$$+2a^3.\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}A_3\cos 3\varphi+\text{etc.},$$

et on aura le développement cherché de D^{-n}.

Dans cette méthode, les quantités A_0, A_1, A_2, etc. sont évaluées avec un degré presqu'égal d'exactitude, parce que la formule dont on fait usage ne permet pas que l'erreur augmente beaucoup en calculant les premiers termes par les deux derniers. Il arrivera donc que les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc. seront déterminés de plus en plus exactement à mesure que la série se prolonge plus loin; car les erreurs absolues étant les mêmes à peu près sur les coefficiens $A(\lambda)$, elles seront atténuées progressivement dans le rapport de 1 à a, sur les coefficiens $P(\lambda)$.

17. Ayant représenté le développement de D^{-n} par la formule

$$D^{-n}=P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+2P_3\cos 3\varphi+\text{etc.},$$

supposons qu'on ait semblablement

$$D^{-n-1}=Q_0+2Q_1\cos\varphi+2Q_2\cos 2\varphi+2Q_3\cos 3\varphi+\text{etc.},$$

$Q(\lambda)$ étant la même fonction de $n+1$ que $P(\lambda)$ est de n. Nous allons faire voir que ces deux suites se déduisent aisément l'une de l'autre.

En effet, si on différencie la quantité $V=\frac{\sin\lambda\varphi}{D^n}$, on aura

$$dV=\lambda.\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}+na.\frac{d\varphi\cos(\lambda+1)\varphi}{D^{n+1}}-na.\frac{d\varphi\cos(\lambda-1)\varphi}{D^{n+1}};$$

intégrant de part et d'autre depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\pi$, et observant que dans ces limites V s'évanouit, il viendra, d'après l'équation (1),

$$0=\lambda P(\lambda)+na[Q(\lambda+1)-Q(\lambda-1)],$$

ce qui donne

$$(19) \qquad P(\lambda = \frac{na}{\lambda}[Q(\lambda - 1) - Q(\lambda + 1)]:$$

ainsi on a successivement

$$P_1 = na\,(Q_0 - Q_2),$$
$$P_2 = \frac{na}{2}\,(Q_1 - Q_3),$$
$$P_3 = \frac{na}{3}\,(Q_2 - Q_4),$$
etc.

A l'égard du premier terme P_0, il n'est point déterminé par cette formule; mais comme on a $D^{-n} = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)\,D^{-n-1}$, si on multiplie la suite $Q_0 + 2Q_1\cos\varphi +$ etc. par $1 + a^2 - 2a\cos\varphi$, et qu'on réduise les produits de cosinus en cosinus linéaires, on trouvera que le terme indépendant de φ est $(1 + a^2)\,Q_0 - 2aQ_1$, et qu'ainsi on a

$$(20) \qquad P_0 = (1 + a^2)\,Q_0 - 2aQ_1.$$

Ces formules offrent, comme on voit, un moyen très facile de déduire les coefficiens P_0, P_1, P_2, etc. qui répondent à l'exposant n, des coefficiens supposés connus Q_0, Q_1, Q_2, etc. qui répondent à l'exposant $n + 1$.

18. Réciproquement si on veut déduire les coefficiens $Q(\lambda)$ qui répondent à l'exposant $n+1$, des coefficiens $P(\lambda)$ qui répondent à l'exposant n, il faudra d'abord déterminer Q_0 et Q_1 au moyen de trois équations

$$P_0 = (1 + a^2)Q_0 - 2aQ_1,$$
$$P_1 = na\,(Q_0 - Q_2),$$
$$(1 - n)\,Q_2 = \frac{1+a^2}{a}\,Q_1 - (1 + n)\,Q_0.$$

Ces équations donnent

$$(1 - a^2)^2 Q_0 = (1 + a^2)P_0 + \frac{n-1}{n}.2aP_1,$$
$$(1 - a^2)^2 Q_1 = \qquad 2aP_0 + \frac{n-1}{n}(1 + a^2)P_1,$$

ou plus simplement encore

$$(21) \qquad Q_0 + Q_1 = \frac{P_0 + \frac{n-1}{n}P_1}{(1-a)^2},$$
$$Q_0 - Q_1 = \frac{P_0 - \frac{n-1}{n}P_1}{(1+a)^2}.$$

Connaissant Q_0 et Q_1, on calculera les termes suivans Q_2, Q_3, etc., au moyen de l'équation (13), dans laquelle il faudra changer n en $n+1$ et $P(\lambda)$ en $Q(\lambda)$, ce qui donnera

$$(22)\qquad (\lambda-n)\,Q(\lambda+1)=\frac{1+a^2}{a}\lambda Q(\lambda)-(\lambda+n)\,Q(\lambda-1).$$

19. Mais on peut pour le même objet construire des formules plus commodes et qui serviront à calculer immédiatement les coefficiens $Q(\lambda)$, $Q(\lambda+1)$, par le moyen des coefficiens correspondans $P(\lambda)$, $P(\lambda+1)$, $P(\lambda-1)$.

Pour cela je tire de l'équation (19),

$$\lambda P(\lambda)=na\,[Q(\lambda-1)-Q(\lambda+1)],$$
$$(\lambda+1)\,P(\lambda+1)=na\,[Q(\lambda)-Q(\lambda+2)].$$

D'ailleurs l'équation (22) donne

$$(\lambda-n)\;Q(\lambda+1)=\frac{1+a^2}{a}\lambda Q(\lambda)-(\lambda+n)Q(\lambda-1),$$
$$(\lambda+1-n)\,Q(\lambda+2)=\frac{1+a^2}{a}(\lambda+1)Q(\lambda+1)-(\lambda+1+n)Q(\lambda).$$

De là résultent deux valeurs de $Q(\lambda)$ exprimées, l'une par les deux termes $P(\lambda)$, $P(\lambda+1)$, l'autre par les deux termes $P(\lambda-1)$, $P(\lambda)$; ces valeurs sont

$$(23)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda)&=\frac{(\lambda+n)\,(1+a^2)\,P(\lambda)-(\lambda+1-n)\,2aP(\lambda+1)}{n(1-a^2)^2},\\ Q(\lambda)&=\frac{(\lambda+n-1)\,2aP(\lambda-1)-(\lambda-n)(1+a^2)P(\lambda)}{n(1-a^2)^2}.\end{aligned}$$

La combinaison de ces deux formules en donne une troisième plus commode dans la pratique, savoir :

$$(24)\quad Q(\lambda)=\frac{a}{n(1-a^2)^2}\left[\left(\lambda+\frac{n(n-1)}{\lambda}+2n-1\right)P(\lambda-1)-\left(\lambda+\frac{n(n-1)}{\lambda}-2n+1\right)P(\lambda+1)\right].$$

Dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, cette formule se simplifie et donne ce résultat remarquable,

$$(25)\qquad Q(\lambda)=\frac{a}{(1-a^2)^2}\left(2\lambda-\frac{1}{2\lambda}\right)[P(\lambda-1)-P(\lambda+1)].$$

20. Nous observerons que les équations (14) peuvent se mettre sous la forme suivante, plus commode pour le calcul numérique,

$$(26)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda)+Q(\lambda+1)&=\frac{(\lambda+n)\,P(\lambda)-(\lambda+1-n)\,P(\lambda+1)}{n(1-a)^2},\\ Q(\lambda)-Q(\lambda+1)&=\frac{(\lambda+n)\,P(\lambda)+(\lambda+1-n)\,P(\lambda+1)}{n(1+a)^2}.\end{aligned}$$

Dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, ces formules se simplifient encore et deviennent

$$(27)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda) + Q(\lambda+1) &= \frac{2\lambda+1}{(1-a)^2}[P(\lambda) - P(\lambda+1)], \\ Q(\lambda) - Q(\lambda+1) &= \frac{2\lambda+1}{(1+a)^2}[P(\lambda) + P(\lambda+1)]. \end{aligned}$$

Le cas de $n=\frac{1}{2}$ qui donne lieu à diverses simplifications, est celui qui s'applique spécialement au calcul des perturbations des planètes; il est susceptible d'être résolu complètement par les fonctions elliptiques.

21. En effet, si l'on suppose $\varphi=\pi-2\psi$ et $c^2=\frac{4a}{(1+a)^2}$ on aura.... $D=(1+a)^2(1-c^2\sin^2\psi)$, et les valeurs de P_0 et P_1, données par la formule (1), seront

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\pi}\int\frac{2d\psi}{(1+a)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}, \\ P_1 &= -\frac{1}{\pi}\int\frac{2d\psi\cos 2\psi}{(1+a)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}; \end{aligned} \qquad \left\{\begin{aligned} \psi &= 0 \\ \psi &= \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned}\right.$$

or, par l'art. 207, tom. I, on trouve

$$(28)\qquad \begin{aligned} P_0 &= \frac{2F^1c}{\pi(1+a)}, \\ P_1 &= \frac{(1+a^2)F^1c-(1+a)^2E^1c}{\pi a(1+a)}. \end{aligned}$$

Les fonctions complètes F^1c, E^1c sont rapportées au module c; mais il conviendra de les exprimer par des fonctions semblables rapportées au module $c^0=a$, puisqu'on a $c=\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$. Or par les formules de l'article déjà cité, on a

$$\begin{aligned} F^1c &= (1+c^0)F^1c^0 = (1+a)F^1a, \\ E^1c &= (1+b)E^1c^0 - bF^1c = \frac{2}{1+a}E^1a - (1-a)F^1a, \end{aligned}$$

valeurs qui, étant substituées dans les formules (28), donnent plus simplement

$$(29)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{2}P_0 &= F^1a, \\ \frac{\pi}{2}P_1 &= \frac{1}{a}(F^1a - E^1a). \end{aligned}$$

22. Nous rappellerons ici que pour calculer les quantités F^1a, E^1a, il faut d'abord former la suite décroissante a, a^0, a^{00}, a^{000}, etc., par la même loi que la suite des modules c, c^0, c^{00}, etc. Faisant ensuite

$$K = \frac{2\sqrt{a^{\circ}}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}{a^{\circ}} \cdot \frac{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}{a^{\circ\circ}} \cdot \text{etc.},$$

$$H = K\left(\frac{a^{\circ}}{2} + \frac{a^{\circ}a^{\circ\circ}}{4} + \frac{a^{\circ}a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right),$$

on aura, suivant les formules démontrées dans le tome I,

$$F^{\text{I}}a = \frac{\pi}{2}K,$$

$$E^{\text{I}}a = \frac{\pi}{2}K(1 - \tfrac{1}{2}a^2) - \frac{\pi}{2}H \cdot \tfrac{1}{2}a^2.$$

De là résultent ces valeurs très simples des deux premiers coefficiens, P_0, P_1,

$$P_0 = K,$$

$$P_1 = \frac{a}{2}(K + H);$$

ensuite par l'équation (13) on trouve le troisième coefficient

$$P_2 = \tfrac{2}{3}aP_1 + \tfrac{1}{3}H.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (21) et (22), on en déduira les valeurs suivantes des trois premiers coefficiens Q_0, Q_1, Q_2, nécessaires au développement de $D^{-\frac{3}{2}}$,

$$Q_0 = \frac{K - a^2H}{(1 - a^2)^2},$$

$$Q_2 = Q_0 - K - H,$$

$$Q_1 = \frac{\tfrac{1}{2}Q_2 + \tfrac{3}{2}Q_0}{a + \frac{1}{a}}.$$

Ces formules sont disposées de manière à rendre le calcul numérique des premiers coefficiens aussi facile qu'il est possible. Nous en donnerons bientôt des exemples.

Les valeurs précédentes supposent que la différence $1 - a$ n'est pas très petite, et dans cette hypothèse on n'aura jamais à calculer qu'un petit nombre de termes de la suite a, a°, $a^{\circ\circ}$, etc., pour parvenir à des résultats aussi approchés qu'on voudra. S'il arrivait que $1 - a$ fût très petit, on ferait usage des formules (28), où $1 - c$ est encore beaucoup plus petit que $1 - a$, et on substituerait dans ces formules les valeurs de $F^{\text{I}}c$ et $E^{\text{I}}c$, calculées suivant les méthodes que prescrit pour ce cas la théorie des fonctions elliptiques.

23. Nous avons fait voir quels sont les procédés les plus simples pour cal-

culer les divers coefficiens $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, qui servent à développer les deux puissances consécutives D^{-n}, D^{-n-1}. Si on avait à développer un plus grand nombre de puissances successives, telles que D^{-m}, D^{-m-1}, D^{-m-2}, D^{-m-3}, on commencerait par la puissance la plus élevée, et faisant $n = m + 3$, on calculerait les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc., qui répondent à cette valeur de n.

Connaissant le développement de D^{-n}, il faudra en déduire successivement celui des puissances précédentes D^{-n+1}, D^{-n+2}, etc. Pour cela il faut observer que si on a égard à la variabilité de n, la fonction $P(\lambda)$ devient une fonction de deux variables et devra être désignée par $P(\lambda, n)$. Or les coefficiens $P(\lambda, n-1)$ se déduisent des coefficiens $P(\lambda, n)$ au moyen de la formule (19), qui peut être exprimée ainsi :

$$(30) \qquad P(\lambda, n-1) = \frac{(n-1)a}{\lambda}[P(\lambda-1, n) - P(\lambda+1, n)].$$

Cette formule ne ferait pas connaître la valeur de $P(0, n-1)$; on y supplée par l'équation (11), qui donne

$$(31) \qquad P(0, n-1) = (1+a^2)P(0, n) - 2aP(1, n).$$

Au moyen de ces deux formules on déterminera les coefficiens $P(\lambda, n-1)$, en supposant connus les coefficiens $P(\lambda, n)$; on calculera de même les coefficiens $P(\lambda, n-2)$, par le moyen dès coefficiens $P(\lambda, n-1)$, et ainsi en rétrogradant, jusqu'à ce qu'on ait les coefficiens de toutes les puissances de D dont on demande le développement.

Nous proposons de commencer par la puissance la plus haute, parce que les puissances inférieures se déduisent avec facilité des supérieures, au moyen des formules (30) et (31).

24. On pourra aussi, si on le juge à propos, suivre une marche inverse, c'est-à-dire calculer les coefficiens $P(\lambda, n+1)$ par le moyen des coefficiens $P(\lambda, n)$ supposés connus. C'est ce qu'on exécutera par les formules (26), qui peuvent être mises sous cette forme :

$$(32) \qquad \begin{aligned} P(\lambda, n+1)+P(\lambda+1, n+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda, n)-(\lambda+1-n)P(\lambda+1, n)}{n(1-a)^2}, \\ P(\lambda, n+1)-P(\lambda+1, n+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda, n)+(\lambda+1-n)P(\lambda+1, n)}{n(1+a)^2}. \end{aligned}$$

Il est visible que les mêmes formules serviront à déduire les coefficiens $P(\lambda, n+2)$ des coefficiens $P(\lambda, n+1)$; ainsi le développement connu de D^{-n} fera connaître le développement des puissances successives D^{-n}, D^{-n-1}, D^{-n-2}, etc.

25. On a vu que deux transcendantes connues dans la suite P_0, P_1, P_2, etc., suffisent pour déterminer toutes les autres représentées par $P(\lambda)$ ou $P(\lambda, n)$, et par conséquent pour avoir le développement complet de D^{-n}. Ces deux mêmes transcendantes suffiront donc aussi pour déterminer tous les coefficiens représentés par $P(\lambda, n \pm k)$, et par conséquent pour avoir le développement de la puissance $D^{-n\pm k}$, k étant un entier quelconque.

De plus, si l'on compare entr'elles les deux valeurs de $A(\lambda)$ ou $A(\lambda, n)$, données par les formules (18), on trouvera immédiatement

$$A(\lambda, n) = (1 - a^2)^{1-2n} A(\lambda, 1 - n);$$

d'où résulte la formule

$$\frac{P(\lambda, n)}{P(\lambda, 1 - n)} = \frac{n . n + 1 . n + 2 \ldots n + \lambda - 1}{1 - n . 2 - n . 3 - n \ldots \lambda - n}(1 - a^2)^{1-2n}, \tag{33}$$

laquelle revient à l'équation (9). En vertu de ce théorème, on connaîtra toujours exactement le rapport des deux fonctions $P(\lambda, n)$, $P(\lambda, 1 - n)$; de sorte que l'une peut être déterminée par l'autre. Ainsi le développement de D^{-1+n} peut être déduit immédiatement du développement de D^{-n}, et réciproquement.

Donc les deux transcendantes qui suffisent pour déterminer en général les diverses valeurs du coefficient $P(\lambda, n)$, suffiront aussi pour déterminer toutes les valeurs du coefficient $P(\lambda, 1 - n)$, et par conséquent encore toutes celles du coefficient $P(\lambda, \pm k - n)$, k étant un nombre entier quelconque.

Combinant ce résultat avec celui qu'on a déjà trouvé, on voit que les deux transcendantes qui servent à former le développement complet de D^{-n}, suffisent en même temps à former le développement tant de la puissance $D^{-n\pm k}$ que de la puissance $D^{n\pm k}$, k étant un entier quelconque.

§ III. *Application de la théorie précédente aux cas de* $n = \frac{1}{2}$ *et* $n = \frac{3}{2}$, *où l'on montre l'usage des fonctions elliptiques pour faciliter le calcul numérique des coefficiens.*

26. *Exemple I.* Soit $a = \frac{1}{10}$, et soit proposé de développer les deux puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$; le tableau suivant donne les valeurs des coefficiens successifs, jusqu'à ce qu'ils deviennent trop petits pour entrer dans le 10^{me} ordre de décimales.

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.00251 41609 100	1.02285 64089 598
1	0.05018 86804 878	0.15285 40606 972
2	0.00376 57283 143	0.01908 27992 044
3	31 38764 871	222 49281 242
4	2 74676 494	25 02099 791
5	24722 960	2 75161 704
6	2266 407	29803 823
7	210 461	3192 836
8	19 732	339 203
9	1 864	35 758
10		3 759

Les termes de la seconde colonne ont été calculés par la formule (11), en faisant $n=\frac{3}{2}$, et donnant à λ les valeurs paires 0, 2, 4, 6, 8, 10; on en a déduit les termes intermédiaires par la formule de l'art. 14. La seconde colonne étant ainsi formée, on s'en est servi pour calculer la première au moyen des formules (30) et (31). On connaît donc par ce petit tableau, le développement des deux puissances consécutives $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$, pour le cas de $a=\frac{1}{10}$; de manière que l'erreur de la série ne pourra jamais s'élever à une unité décimale du dixième ordre.

27. *Exemple II.* Soit $a=\frac{1}{2}$, et soit proposé de développer les deux puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$.

On pourrait exécuter les calculs comme dans l'exemple précédent, parce que les suites tirées de la formule (11) seraient encore suffisamment convergentes; mais si on veut obtenir des résultats exacts jusqu'à la douzième décimale environ, on y parviendra plus promptement par les formules de l'art. 22.

En prenant pour module $a=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, la théorie des fonctions elliptiques donne les valeurs suivantes :

$$K = 1.07318\ 20071\ 494,$$
$$H = 0.03855\ 03887\ 041;$$

de là on déduit, par les formules de l'article cité,

$P(0, \frac{1}{2}) = 1.07318\ 20071\ 494$ | $P(0, \frac{3}{2}) = 1.89074\ 56177\ 305$
$P(1, \frac{1}{2}) = 0.27793\ 30989\ 634$ | $P(1, \frac{3}{2}) = 1.29025\ 00150\ 137$
$P(2, \frac{1}{2}) = 0.10549\ 44958\ 892$ | $P(2, \frac{3}{2}) = 0.77901\ 32218\ 770$

On continuera le calcul des quantités $P(\lambda, \frac{3}{2})$ par la formule

$$(2\lambda - 1)\, P(\lambda + 1, \tfrac{3}{2}) = 5\lambda P(\lambda, \tfrac{3}{2}) - (2\lambda + 1)\, P(\lambda - 1, \tfrac{3}{2}),$$

et on en déduira les valeurs de $P(\lambda, \frac{1}{2})$ par la formule (30), ce qui donnera les séries de ces coefficiens, comme on les voit dans le tableau suivant :

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.07318 20071 494	1.89074 56177 305
1	0.27793 30989 634	1.29025 00150 137
2	0.10549 44958 892	0.77901 32218 770
3	0.04422 91324 002	0.44629 48479 008
4	0.01942 35009 368	0.24826 36330 744
5	0.00876 28991 039	0.13551 80329 115
6	0.00402 37244 696	0.07300 56509 967
7	0.00187 07572 266	0.03894 86456 410
8	0.00087 78723 217	0.02062 44486 525
9	0.00041 49137 923	0.01085 67313 472
10	0.00019 72258 518	0.00568 75521 305
11	0.00009 41871 684	0.00296 76972 755
12		0.00154 33167 215

28. On peut vérifier ces résultats en calculant les derniers termes $P(11, \frac{1}{2})$, $P(12, \frac{3}{2})$ par la formule (11), ou encore mieux par la valeur de $P(\lambda)$ que fournit l'équation (16), savoir :

$$P(\lambda) = \frac{n.n+1\ldots n+\lambda-1}{1.2\ldots\lambda} \cdot \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^n}\left(1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{n-1.n-2}{1.2} \cdot \frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2} \cdot \frac{a^4}{(1-a^2)^2} + \text{etc.}\right). \quad (34)$$

On trouvera de cette manière, en poussant l'approximation jusqu'à la treizième décimale,

$$P(11, \tfrac{1}{2}) = 0.00009\ 41871\ 680,$$
$$P(12, \tfrac{3}{2}) = 0.00154\ 33167\ 407.$$

L'erreur des résultats précédens ne se fait donc remarquer que dans le 11^{me} ordre de décimales sur $P(12, \frac{3}{2})$, et dans le 13^{me} seulement sur $P(11, \frac{1}{2})$. Elle pourrait être plus considérable, sans qu'il y eût une erreur d'une unité sur la dernière décimale des valeurs de P_0, P_1, P_2, d'où l'on a déduit toutes les suivantes P_3, P_4, etc., parce que la formule (13) qui sert à faire ces calculs, a l'inconvénient, comme nous l'avons déjà remarqué, de faire croître les erreurs absolues suivant une progression à peu près géométrique dont la raison est au moins $\frac{1}{a}$; d'où il suit qu'après un nombre de termes peu considérable, les résultats deviendraient entièrement défectueux. C'est au reste ce qu'on éviterait en suivant la route indiquée art. 16, mais les calculs seraient plus longs.

En jetant un coup d'œil sur le tableau précédent, on voit que les deux séries tendent de plus en plus à se confondre avec une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{a}$ ou a. On prévoit dès lors de quelle grandeur à peu près seraient des termes beaucoup plus éloignés, tels que $P(21, \frac{1}{2})$, $P(22, \frac{3}{2})$; ces termes se trouveront directement, et avec une approximation assez grande, par la formule (17) qui donne

$$P(21, \tfrac{1}{2}) = 0.00000\ 00671\ 35,$$
$$P(22, \tfrac{3}{2}) = 0.00000\ 141203.$$

On voit de cette manière jusqu'où il faut prolonger les deux suites, pour que les termes deviennent plus petits qu'une limite donnée.

29. *Exemple III.* Soit $a = 0.7233323$, et soit proposé de développer jusqu'à neuf ou dix termes les puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$.

On calculera d'abord, par la théorie des fonctions elliptiques, les modules décroissans a, a°, $a^{\circ\circ}$, etc., et leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, etc. ; ce qui donnera les logarithmes suivans :

a	9.85933 78587 0774	b	9.83916 37438 4132
a°	9.26264 53174 3980	b°	9.99259 66675 9680
$a^{\circ\circ}$	7.93060 24235 4992	$b^{\circ\circ}$	9.99998 42237 9754
$a^{\circ\circ\circ}$ ...	5.25916 06318 3109	$b^{\circ\circ\circ}$	9.99999 99999 2837
$a^{\circ\circ\circ\circ}$ ...	7.92323 06436 2327	$b^{\circ\circ\circ\circ}$	0.00000 00000 0000.

On voit que, quoique a soit assez près de l'unité, il ne faut cependant prolonger la suite des modules que jusqu'au quatrième terme, pour avoir les quantités cherchées K et H approchées jusqu'à la quatorzième décimale.

Calculant en effet ces quantités par les formules $K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \cdot b^\circ b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ}\right)}$, $H = K\left(\frac{a^\circ}{2} + \frac{a^\circ a^{\circ\circ}}{4} + \frac{a^\circ a^{\circ\circ} a^{\circ\circ\circ}}{8}\right)$, on aura

$$\log K = 0.07670\ 85737\ 4070,$$
$$K = 1.19318\ 71668\ 9482,$$
$$H = 0.10969\ 09424\ 8484.$$

En partant de ces valeurs, et suivant la même marche que dans l'exemple précédent, nous avons formé le tableau suivant qui contient les valeurs des coefficiens calculés avec dix décimales, jusqu'au neuvième ou dixième terme.

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.19318 71669	4.99626 29528
1	0.47120 69097	4.43583 71725
2	0.26378 97663	3.69338 48434
3	0.16167 14479	2.97708 98367
4	0.10339 42358	2.35232 94425
5	0.06779 32599	1.83355 74847
6	0.04518 70701	1.41509 40952
7	0.03047 27436	1.08390 91672
8	0.02073 00563	0.82529 82154
9		0.62536 34889

Le peu de convergence de ces séries exigerait qu'elles fussent poussées très loin, pour que les coefficiens devinssent négligeables. On en jugera par la formule (17) qui, étant appliquée au cas de $\lambda = 50$, donne

$$P(50, \tfrac{1}{2}) = 0.00000\ 00105\ 733,$$
$$P(50, \tfrac{3}{2}) = 0.00000\ 11659\ 555.$$

30. Puisque la théorie des fonctions elliptiques peut faciliter beaucoup la détermination des coefficiens $P(\lambda, \frac{1}{2})$ et $P(\lambda, \frac{3}{2})$, dans le cas où a est très peu différent de l'unité, il importe d'examiner avec soin les conséquences ultérieures qu'on pourrait déduire de cette théorie.

Soit donc proposée la quantité $D^{\frac{1}{2}}=(1+a^2-2a\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$; je fais $\varphi=2\psi-\pi$, $c=\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, et j'ai $D^{\frac{1}{2}}=(1+a)(1-c^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}$ ou $D^{\frac{1}{2}}=(1+a)\Delta$, en faisant $\Delta=\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}$.

Du module c qui a pour complément $b=\sqrt{(1-c^2)}$, on déduit le module suivant c^0 par la formule $c^0=\frac{1-b}{1+b}$, laquelle donne dans ce cas $c^0=a$, et son complément $b^0=\sqrt{(1-a^2)}$. Si ensuite on prend une nouvelle amplitude ψ^0 qui satisfasse à l'équation trigonométrique tang $(\psi^0-\psi)=b$ tang ψ, ou qui soit donnée par la suite

$$\psi^0=2\psi-a\sin 2\psi+\tfrac{1}{2}a^2\sin 4\psi-\tfrac{1}{3}a^3\sin 6\psi+\text{etc.},$$

on aura la transformée suivante, où Δ^0 représente $\sqrt{(1-c^{02}\sin^2\psi^0)}$,

$$\Delta=\frac{c^0\cos\psi^0+\Delta^0}{1+c^0};$$

de là on tire, en observant que $c^0=a$,

$$(35)\qquad \begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} &= \Delta^0+a\cos\psi^0, \\ D^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta^0-a\cos\psi^0}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Mais si on fait $a^0=\frac{1-\sqrt{(1-a^2)}}{1+\sqrt{(1-a^2)}}$, $D^0=1+a^{02}-2a^0\cos\varphi^0$, $\varphi^0=2\psi^0-\pi$, on aura semblablement $(D^0)^{\frac{1}{2}}=(1+a^0)\Delta^0$, ou $\Delta^0=\frac{\sqrt{D^0}}{1+a^0}$; donc $D^{-\frac{1}{2}}$ ou

$$(36)\qquad (1+a^2-2a\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(1+a^{02}-2a^0\cos\varphi^0)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{a^0}.\sin\frac{1}{2}\varphi^0}{(1-a^2)(1+a^0)}.$$

31. La relation directe entre φ^0 et φ, par laquelle on obtient cette transformation, est contenue dans l'équation

$$\text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi^0)=b\cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Mais pour qu'il n'y ait pas lieu à ambiguité, quand on veut déterminer φ^0 par le moyen de φ, il faut imaginer que l'arc φ augmente indéfiniment depuis la valeur zéro jusqu'à tant de circonférences qu'on voudra. Cela posé, l'arc φ^0 devra satisfaire à l'équation $\sin(\varphi+\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\varphi^0)=a\sin(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\varphi^0)$; d'où l'on voit qu'en désignant par θ le plus petit des arcs qui ont a pour sinus, la quantité $\varphi+\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\varphi^0$ sera toujours renfermée entre les limites $+\theta$ et $-\theta$, de sorte qu'on pourra supposer $\varphi^0=2\varphi+\pi+\theta\sin A$, A étant un angle qui varie avec φ; c'est aussi ce qui résulte de la série

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ} = \tfrac{1}{2}\pi + \varphi + a \sin \varphi + \tfrac{1}{2}a^{2} \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}a^{3} \sin 3\varphi + \text{etc.}$$

Maintenant comme a° sera toujours plus petit que a, puisqu'on a....... $a^{\circ} = \frac{1 - \sqrt{(1 - a^{2})}}{1 + \sqrt{(1 - a^{2})}}$, la fonction $(D^{\circ})^{\frac{1}{2}}$ se développera en une suite

$$L_{0} + 2L_{1} \cos \varphi^{\circ} + 2L_{2} \cos 2\varphi^{\circ} + 2L_{3} \cos 3\varphi^{\circ} + \text{etc.},$$

dans laquelle le coefficient $L(k)$ est en général la valeur de la fonction $P(k, n)$, lorsqu'on fait $n = -\frac{1}{2}$ et qu'on met a° au lieu de a.

Dans le cas de l'exemple III, on a $a^{\circ} = 0.18308$; ainsi la suite L_{0}, L_{1}, L_{2}, etc., doit être fort convergente; on trouve en effet le terme....... $L_{10} = 0.00000\ 00007\ 733$.

Cette suite étant trouvée, le développement de $D^{-\frac{1}{2}}$, ordonné suivant les cosinus des multiples de φ°, sera

$$(37)\quad D^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1 - a^{2})(1 + a^{\circ})} \cdot \left\{ \begin{array}{l} L_{0} + 2L_{1} \cos \varphi^{\circ} + 2L_{2} \cos 2\varphi^{\circ} + 2L_{3} \cos 3\varphi^{\circ} + \text{etc.} \\ + 2\sqrt{a^{\circ}} . \sin \frac{1}{2} \varphi^{\circ} \end{array} \right\}$$

On pourrait, pour plus de symétrie, mettre au lieu du terme $2\sqrt{a^{\circ}} . \sin \frac{1}{2}\varphi^{\circ}$, sa valeur

$$\frac{4\sqrt{a^{\circ}}}{\pi}\left(1 - \frac{2 \cos \varphi^{\circ}}{1.3} - \frac{2 \cos 2\varphi^{\circ}}{3.5} - \frac{2 \cos 3\varphi^{\circ}}{5.7} - \text{etc.}\right);$$

mais cette suite n'étant pas suffisamment convergente, il vaut mieux ne rien changer à la formule.

32. Si on voulait avoir le développement de $D^{-\frac{3}{2}}$, on le déduirait aisément de l'équation $(1 - a^{2}) D^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\circ} - a \cos \psi^{\circ}$, qui, étant élevée au cube, donne

$$(1 - a^{2})^{3} D^{-\frac{3}{2}} = \Delta^{\circ}(\Delta^{\circ 2} + 3a^{2} \cos^{2} \psi^{\circ}) - a \cos \psi^{\circ}(3\Delta^{\circ 2} + a^{2} \cos^{2} \psi^{\circ}).$$

Mais on a $\Delta^{\circ 2} = 1 - a^{2} + a^{2} \cos^{2} \psi^{\circ}$, d'où

$$\begin{aligned} \Delta^{\circ}(\Delta^{\circ 2} + 3a^{2} \cos^{2} \psi^{\circ}) &= 3\Delta^{\circ 3} - 3(1 - a^{2})\Delta^{\circ}, \\ a \cos \psi^{\circ}(3\Delta^{\circ 2} + a^{2} \cos^{2} \psi^{\circ}) &= a^{3} \cos 3\psi^{\circ} + 3a \cos \psi^{\circ}; \end{aligned}$$

donc

$$(1 - a^{2})^{3} D^{-\frac{3}{2}} = 4\Delta^{\circ 3} - 3(1 - a^{2})\Delta^{\circ} + 3a \cos \psi^{\circ} + a^{3} \cos 3\psi^{\circ}.$$

Substituant les valeurs $\Delta^{\circ} = \frac{(D^{\circ})^{\frac{1}{2}}}{1 + a^{\circ}}$, $\psi^{\circ} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi^{\circ}$, il vient enfin,

$$(1 - a^{2})^{3} D^{-\frac{3}{2}} = \frac{4(D^{\circ})^{\frac{3}{2}}}{(1 + a^{\circ})^{3}} - \frac{3(1 - a^{2})(D^{\circ})^{\frac{1}{2}}}{1 + a^{\circ}} - 3a \sin \tfrac{1}{2}\varphi^{\circ} + a^{3} \sin \tfrac{3}{2}\varphi^{\circ}.$$

Or on a déjà fait $(D^{\circ})^{\frac{1}{2}} = L_{0} + 2L_{1} \cos \varphi^{\circ} + 2L_{2} \cos 2\varphi^{\circ} + 2L_{3} \cos 3\varphi^{\circ} + \text{etc.}$;

supposons qu'on ait semblablement

$$(D^\circ)^{\frac{3}{2}} = M_0 + 2M_1 \cos\varphi^\circ + 2M_2 \cos 2\varphi^\circ + 2M_3 \cos 3\varphi^\circ + \text{etc.},$$

on pourra déterminer les coefficiens M_0, M_1, M_2, etc. d'après les formules (17) qui donnent :

$$\begin{aligned} M_0 &= (1 + a^{\circ 2})\, L_0 - 2a^\circ L_1, \\ M_1 &= -\tfrac{3}{2} a^\circ (L_0 - L_2), \\ M_2 &= -\tfrac{3}{4} a^\circ (L_1 - L_3), \\ M_3 &= -\tfrac{3}{6} a^\circ (L_2 - L_4), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On connaîtra donc le développement de $D^{-\frac{3}{2}}$ par l'équation

$$\begin{aligned} (1-a^2)^3 D^{-\frac{3}{2}} &= \frac{4}{(1+a^\circ)^3}(M_0 + 2M_1\cos\varphi^\circ + 2M_2\cos 2\varphi^\circ + 2M_3\cos 3\varphi^\circ + \text{etc.}) \\ (38) \qquad & -\frac{3(1-a^2)}{1+a^\circ}(L_0 + 2L_1\cos\varphi^\circ + 2L_2\cos 2\varphi^\circ + 2L_3\cos 3\varphi^\circ + \text{etc.}) \\ & - 3a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ + a^3\sin\tfrac{3}{2}\varphi^\circ, \end{aligned}$$

et ces séries exprimées par l'angle φ°, seront en général beaucoup plus convergentes que celles qui sont exprimées immédiatement par l'angle φ.

33. On pourrait ultérieurement réduire le développement de $D^{-\frac{1}{2}}$ à celui de $(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}}$, dans lequel les coefficiens décroîtraient encore plus rapidement, puisque $a^{\circ\circ}$ est beaucoup plus petit que a°, et il serait facile de continuer à volonté ces réductions. On a en effet les équations successives :

$$\begin{aligned} (1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} &= a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ + \frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}(D^\circ)^{\frac{1}{2}}, \\ (D^\circ)^{\frac{1}{2}} &= -a^\circ \sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} + \frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}}, \\ (D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}} &= -a^{\circ\circ}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ} + \frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}(D^{\circ\circ\circ})^{\frac{1}{2}}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

d'où résultent ces valeurs de $(1-a^2)\,D^{-\frac{1}{2}}$,

$$(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ - \frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} + \frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}\cdot\frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} (1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ - \frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} - \frac{a\sqrt{a^\circ a^{\circ\circ}}}{4}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ} \\ + \frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}\cdot\frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}\cdot\frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}(D^{\circ\circ\circ})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

etc.

Mais à cause du décroissement très rapide de la suite a, a°, $a^{\circ\circ}$, $a^{\circ\circ\circ}$, etc., les quantités D°, $D^{\circ\circ}$, $D^{\circ\circ\circ}$, etc. tendront non moins rapidement vers leur limite qui est l'unité; et à ce terme, le produit $\frac{a}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{a^{\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}} \cdot \frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}} \cdot$ etc. sera ce que nous avons désigné par $\frac{1}{K}$, donc on aura généralement,

$$(39)\quad (1-a^{\circ})D^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{K}+a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ}-\frac{a\sqrt{a^{\circ}}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ}-\frac{a\sqrt{a^{\circ}a^{\circ\circ}}}{4}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ}-\text{etc.}$$

Cette formule a beaucoup d'analogie avec celle qui donne la valeur d'un arc d'ellipse; elle forme une suite très convergente dont il suffira toujours de prendre un petit nombre de termes, et au moyen de laquelle on exprimera en quelque sorte rationnellement, la quantité irrationnelle $(1+a^{2}-2a\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$. Mais ce développement a l'inconvénient d'être formé avec des variables φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, etc., toutes différentes les unes des autres, et par cette raison, la formule est plus curieuse qu'utile. Il n'en est pas de même lorsqu'on s'en tient à la première transformation, et il est permis de croire que l'expression que nous avons donnée de $D^{-\frac{1}{2}}$ en fonction de l'amplitude φ°, pourrait s'appliquer utilement dans quelques cas difficiles de la théorie des perturbations des planètes.

34. Si l'on fait $\varphi=0$, il en résulte $\varphi^{\circ}=\pi$, $\varphi^{\circ\circ}=3\pi$, $\varphi^{\circ\circ\circ}=7\pi$, etc., et l'équation (39) donne

$$1+a=\frac{1}{K}+a+\frac{a\sqrt{a^{\circ}}}{2}+\frac{a\sqrt{a^{\circ}a^{\circ\circ}}}{4}+\frac{a\sqrt{a^{\circ}a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ}}}{8}+\text{etc.}$$

Ainsi on a en général cette valeur de $\frac{1}{K}$:

$$\frac{1}{K}=1-\frac{a\sqrt{a^{\circ}}}{2}-\frac{a\sqrt{(a^{\circ}a^{\circ\circ})}}{4}-\frac{a\sqrt{(a^{\circ}a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ})}}{8}-\text{etc.}$$

Cette formule qui résulterait également de la supposition $\varphi=\pi$, peut se déduire facilement des formules déjà connues; en effet on a $a=\frac{2\sqrt{a^{\circ}}}{1+a^{\circ}}$, $a^{\circ}=\frac{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}{1+a^{\circ\circ}}$, etc.; ainsi les différens termes de la suite précédente peuvent s'exprimer comme il suit:

$$\frac{a\sqrt{a^{\circ}}}{2}=\frac{a^{\circ}}{1+a^{\circ}},\ \frac{a\sqrt{(a^{\circ}a^{\circ\circ})}}{4}=\frac{a^{\circ\circ}}{1+a^{\circ}.\,1+a^{\circ\circ}},\ \frac{a\sqrt{(a^{\circ}a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ})}}{8}=\frac{a^{\circ\circ\circ}}{1+a^{\circ}.\,1+a^{\circ\circ}.\,1+a^{\circ\circ\circ}},\ \text{etc.}$$

On aura donc

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{a^{\circ}}{1+a^{\circ}} - \frac{a^{\circ\circ}}{1+a^{\circ}.1+a^{\circ\circ}} - \frac{a^{\circ\circ\circ}}{1+a^{\circ}.1+a^{\circ\circ}.1+a^{\circ\circ\circ}} - \text{etc.}$$

Cette série, selon qu'on l'arrête au 2^{me} terme, au 3^{me}, au 4^{me}, etc., donne successivement les résultats :

$$\frac{1}{1+a^{\circ}},\ \frac{1}{1+a^{\circ}.1+a^{\circ\circ}},\ \frac{1}{1+a^{\circ}.1+a^{\circ\circ}.1+a^{\circ\circ\circ}},\ \text{etc.}$$

Ainsi on aura en général $K=(1+a^{\circ})(1+a^{\circ\circ})(1+a^{\circ\circ\circ})$, etc., ce qui est la valeur connue de cette quantité.

§ IV. *Calcul des coefficiens différentiels de la fonction* P(λ, n) *en faisant varier* a.

35. Proposons-nous maintenant de trouver les coefficiens différentiels de la fonction $P(\lambda)$, pris par rapport à a.

Puisqu'on a en général $P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{D^n}$, si on différencie cette équation par rapport à a, on aura

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = -\frac{2n}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{D^{n+1}}(a - \cos\varphi),$$

ou

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = \frac{n}{\pi}\left(\int \frac{d\varphi \cos(\lambda-1)\varphi}{D^{n+1}} + \frac{d\varphi \cos(\lambda+1)\varphi}{D^{n+1}} - \frac{2ad\varphi \cos \lambda\varphi}{D^{n+1}}\right).$$

Appelons comme ci-dessus $Q(\lambda)$ ce que devient la fonction $P(\lambda)$ lorsque n se change en $n+1$, nous aurons

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = n[Q(\lambda-1) + Q(\lambda+1) - 2aQ(\lambda)]. \qquad (40)$$

Ainsi en supposant connus les coefficiens Q_0, Q_1, Q_2, etc. qui appartiennent au développement de D^{-n-1}, on connaîtra les valeurs successives du coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$; il n'y a pas même lieu à excepter le cas de $\lambda=0$, parce qu'alors on a $Q(-1)=Q_1$, et qu'ainsi la formule (40) donne

$$\frac{dP_0}{da} = n(2Q_1 - 2aQ_0).$$

36. Si l'on veut déterminer les coefficiens différentiels $\frac{dP(\lambda)}{da}$, sans supposer la connaissance des coefficiens $P(\lambda, n+1)$ qui répondent à l'exposant $n+1$, et que nous avons désignés par $Q(\lambda)$, voici comment on pourra y parvenir.

L'équation (19) étant mise sous cette forme

$$\frac{\lambda}{n}\,P(\lambda) = a\,[Q(\lambda-1) - Q(\lambda+1)],$$

si on la différencie par rapport à a, on aura

$$\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{dP(\lambda)}{da} = Q(\lambda-1) - Q(\lambda+1) + a\left[\frac{dQ(\lambda-1)}{da} - \frac{dQ(\lambda+1)}{da}\right];$$

substituant au lieu de $\frac{dP(\lambda)}{da}$, sa valeur donnée par l'équation (40), on trouve

$$\frac{dQ(\lambda-1)}{da} - \frac{dQ(\lambda+1)}{da} = \frac{(\lambda-1)\,Q(\lambda-1) + (\lambda+1)\,Q(\lambda+1)}{a} - 2\lambda Q(\lambda).$$

Puisque n n'entre pas dans cette équation, on peut mettre $P(\lambda)$ au lieu de $Q(\lambda)$, et on aura également cette formule générale :

$$(41)\quad \frac{dP(\lambda-1)}{da} - \frac{dP(\lambda+1)}{da} = \frac{(\lambda-1)\,P(\lambda-1) + (\lambda+1)\,P(\lambda+1)}{a} - 2\lambda P(\lambda).$$

Elle donne successivement

$$\frac{dP_0}{da} - \frac{dP_2}{da} = \frac{1}{a}\,(2P_2) - 2P_1,$$
$$\frac{dP_1}{da} - \frac{dP_3}{da} = \frac{1}{a}\,(P_1 + 3P_3) - 4P_2,$$
$$\frac{dP_2}{da} - \frac{dP_4}{da} = \frac{1}{a}\,(2P_2 + 4P_4) - 6P_3,$$
etc.

d'où l'on voit que, pour calculer les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP_0}{da}$, $\frac{dP_1}{da}$, $\frac{dP_2}{da}$, $\frac{dP_3}{da}$, etc., il suffit de connaître les deux premiers $\frac{dP_0}{da}$, $\frac{dP_1}{da}$.

37. On a pour cet effet les deux équations

$$\frac{dP_0}{da} = n\,(2Q_1 - 2aQ_0),$$
$$\frac{dP_1}{da} = n\,(Q_0 + Q_2 - 2aQ_1),$$

dans lesquelles il faut substituer les valeurs de Q_0, Q_1, Q_2, exprimées en P_0 et P_1, d'après les équations du n° 18 ; cette substitution donne

$$\frac{dP_0}{da} = \frac{2n}{1-a^2}\left(P_1 + aP_0 - \frac{1}{n}\,P_1\right),$$
$$\frac{dP_1}{da} = \frac{2n}{1-a^2}\left(P_0 + aP_1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{1+a^2}{2a}\,P_1\right).$$

Mais on peut mettre ces équations sous la forme suivante, plus commode pour le calcul numérique,

$$(42)\qquad \begin{aligned} \frac{dP_0}{da} + \frac{dP_1}{da} &= \frac{1}{1-a}\left[(2n-1)\,P_1 + 2nP_0 - \frac{1}{a}\,P_1\right], \\ \frac{dP_0}{da} - \frac{dP_1}{da} &= \frac{1}{1+a}\left[(2n-1)\,P_1 - 2nP_0 + \frac{1}{a}\,P_1\right]. \end{aligned}$$

Ces formules se simplifient encore dans le cas de $n = \frac{1}{2}$, et donnent

$$(43)\qquad \frac{dP_0}{da} = \frac{aP_0 - P_1}{1-a^2}, \quad \frac{dP_1}{da} = \frac{1}{a}\cdot\frac{dP_0}{da};$$

c'est aussi ce qu'on trouverait immédiatement par la différentiation des équations (29), en observant qu'on a $\frac{dF^1}{da} = \frac{E^1 - (1-a^2)\,F^1}{a(1-a^2)}$, $\frac{dE^1}{da} = -\frac{1}{a}(F^1 - E^1)$.

38. Si on veut avoir la valeur générale du coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$, exprimée par les fonctions P seulement, on la déduira aisément des équations (40) et (23); mais voici un moyen d'y parvenir qui nous fournira en même temps de nouvelles formules.

Nous avons déjà trouvé $\pi\frac{dP(\lambda)}{da} = -2n\int\frac{(a-\cos\varphi)\,d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^{n+1}}$; on a semblablement $\pi\,\frac{dP(\lambda+1)}{da} = -2n\int\frac{(a-\cos\varphi)\,d\varphi\cos(\lambda+1)\,\varphi}{D^{n+1}}$; de là résulte

$$\frac{dP(\lambda+1)}{da} - a\,\frac{dP(\lambda)}{da} = \frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^{n+1}}[(a-\cos\varphi)^2\cos\lambda\varphi + (a-\cos\varphi)\sin\varphi\sin\lambda\varphi]\cdot$$

Le second membre se réduit à

$$\frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n} + \frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi\,\sin\varphi}{D^{n+1}}\,[a\sin\lambda\varphi - \sin(\lambda+1)\varphi];$$

et au moyen de l'intégration par parties, il se réduit ultérieurement à

$$\frac{\sin(\lambda+1)\varphi - a\sin\lambda\varphi}{\pi D^n} + \frac{2n+\lambda}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n} - \left(\frac{\lambda+1}{a\pi}\right)\int\frac{d\varphi\cos(\lambda+1)\,\varphi}{D^n}.$$

La partie hors du signe est nulle dans les deux limites de l'intégrale, et l'autre partie $= (2n+\lambda)\,P(\lambda) - \left(\frac{\lambda+1}{a}\right)P(\lambda+1)$; donc on aura la formule

$$(44)\qquad \frac{dP(\lambda+1)}{da} - a\,\frac{dP(\lambda)}{da} = (2n+\lambda)\,P(\lambda) - \left(\frac{\lambda+1}{a}\right)P(\lambda+1).$$

Si on change le signe de λ et qu'on observe que la formule.... $P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}$ donne $P(-\lambda) = P(\lambda)$, on aura semblablement

$$(45)\qquad \frac{dP(\lambda-1)}{da}-a\frac{dP(\lambda)}{da}=(2n-\lambda)P(\lambda)+\frac{\lambda-1}{a}P(\lambda-1).$$

Ces deux équations donnent par leur différence la formule (41); mais, pour en déduire la valeur du coefficient cherché $\frac{dP(\lambda)}{da}$, il faut encore recourir à l'équation (13), dont la différentielle est

$$(\lambda-1+n)\frac{dP(\lambda-1)}{da}+(\lambda+1-n)\frac{dP(\lambda+1)}{da}-\left(\frac{1}{a}+a\right)\lambda\frac{dP(\lambda)}{da}+\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\lambda P(\lambda)=0;$$

et par la combinaison de ces trois équations, on aura

$$(46)\quad (1-a^2)\frac{dP(\lambda)}{da}=(\lambda-1+n)P(\lambda-1)-(\lambda+1-n)P(\lambda+1)+2naP(\lambda).$$

D'où l'on voit que le coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$ se détermine assez simplement par les trois termes consécutifs $P(\lambda-1)$, $P(\lambda)$, $P(\lambda+1)$; il pourrait se déterminer par deux seulement de ces termes, en éliminant le troisième à l'aide de l'équation (13); mais la formule qui en résulterait serait moins simple que la précédente.

39. Au moyen de l'équation (46) on pourrait trouver la valeur du coefficient différentiel $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, exprimée par les fonctions $P(\lambda)$; mais cette expression serait fort compliquée, et la complication augmenterait encore dans la valeur des coefficiens différentiels des ordres supérieurs. Pour éviter cet inconvénient, on pourra former successivement les coefficiens différentiels de chaque ordre, à compter des deux premiers termes où l'on a $\lambda=0$ et $\lambda=1$, par la méthode suivante, analogue à celle que nous avons suivie pour les coefficiens différentiels du premier ordre, dans les art. 36 et 37.

De l'équation (41) on tire, par la différentiation,

$$(47)\,\frac{ddP(\lambda-1)}{da^2}-\frac{ddP(\lambda+1)}{da^2}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-2)\frac{dP(\lambda-1)}{da^2}+(\lambda+2)\frac{dP(\lambda+1)}{da}-2\lambda P(\lambda)\right]-2\lambda\frac{dP(\lambda}{da}$$

ainsi, on connaîtra les valeurs successives de $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, si on connaît les deux premiers termes $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$.

Or, par la différentiation des équations (42), on a ces deux formules:

$$(48)\qquad \begin{aligned}(1-a)\left(\frac{ddP_0}{da^2}+\frac{ddP_1}{da^2}\right)&=2n\left(\frac{dP_1}{da}+\frac{dP_0}{da}-\frac{P_0}{a}\right)+\frac{2P_1}{a^2},\\(1+a)\left(\frac{ddP_0}{da^2}-\frac{ddP_1}{da^2}\right)&=2n\left(\frac{dP_1}{da}-\frac{dP_0}{da}+\frac{P_0}{a}\right)-\frac{2P_1}{a^2};\end{aligned}$$

ainsi on voit que les termes $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$ se déterminent par des quantités connues, puisqu'on est censé avoir formé la suite des coefficiens différentiels du premier ordre, avant de passer à ceux de second ordre.

40. On peut encore simplifier cette détermination et celle des coefficiens différentiels des ordres supérieurs, par les considérations suivantes. On tire d'abord des équations (48).

$$\frac{ddP_0}{da^2} - a\frac{ddP_1}{da^2} = 2n\frac{dP_1}{da},$$
$$\frac{ddP_1}{da^2} - a\frac{ddP_0}{da^2} = 2n\left(\frac{dP_0}{da} - \frac{P_0}{a}\right) + \frac{2P_1}{a^2},$$

d'un autre côté, les équations (42) donnent

$$\frac{dP_0}{da} - a\frac{dP_1}{da} = (2n-1)P_1,$$
$$\frac{dP_1}{da} - a\frac{dP_0}{da} = 2nP_0 - \frac{P_1}{a};$$

combinant entre elles ces équations, on en déduira les deux équations différentielles suivantes, pour déterminer séparément les fonctions P_0 et P_1

$$(a-a^3)\frac{ddP_0}{da^2} + [1-(4n+1)a^2]\frac{dP_0}{da} - 4n^2aP_0 = 0,$$
$$(49)\qquad (a^2-a^4)\frac{ddP_1}{da^2} + [a-(4n+1)a^3]\frac{dP_1}{da} - [1+(4n^2-1)a^2]P_1 = 0.$$

De là on voit que le coefficient du second ordre $\frac{ddP_0}{da^2}$ se déterminera directement par le moyen des deux quantités $\frac{dP_0}{da}$ et P_0, et que le coefficient $\frac{ddP_1}{da^2}$ se déterminera de même par le moyen de $\frac{dP_1}{da}$ et P_1.

41. Les mêmes équations feront connaître, par des différentiations répétées, les coefficiens différentiels des ordres ultérieurs. Ainsi l'équation relative à la fonction P_1 donne successivement :

$$(a-a^3)\frac{d^3P_1}{da^3} + [3-(4n+5)a^2]\frac{d^2P_1}{da^2} - (4n^2+12n+2)a\frac{dP_1}{da} - (8n^2-2)P_1 = 0,$$
$$(a-a^3)\frac{d^4P_1}{da^4} + [4-(4n+8)a^2]\frac{d^3P_1}{da^3} - (4n^2+20n+12)a\frac{d^2P_1}{da^2} - (12n^2+12n)\frac{dP_1}{da} = 0, \qquad (50)$$
$$(a-a^3)\frac{d^5P_1}{da^5} + [5-(4n+11)a^2]\frac{d^4P_1}{da^4} - (4n^2+28n+28)a\frac{d^3P_1}{da^3} - (16n^2+32n+12)\frac{d^2P_1}{da^2} = 0.$$

Ces équations dont il serait facile de trouver l'expression générale, font voir que la série des coefficiens différentiels $\frac{dP_1}{da}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$, $\frac{d^3P_1}{da^3}$, etc. peut être prolongée aussi loin qu'on voudra, et que chacun d'eux se déterminera toujours par les trois précédens.

42. Connaissant les coefficiens différentiels de la fonction P_1, on pourra en déduire ceux de P_0 par les équations successives

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dP_0}{da} &= a\,\frac{dP_1}{da} + (2n-1)\,P_1,\\
\frac{ddP_0}{da^2} &= a\,\frac{ddP_1}{da^2} + 2n\,\frac{dP_1}{da},\\
\frac{d^3P_0}{da^3} &= a\,\frac{d^3P_1}{da^3} + (2n+1)\,\frac{d^2P_1}{da^2},\\
\frac{d^4P_0}{da^4} &= a\,\frac{d^4P_1}{da^4} + (2n+2)\,\frac{d^3P_1}{da^3},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

équations dont la loi est manifeste.

On peut aussi déterminer directement ces coefficiens, à compter du second ordre, par les équations successives

$$
(52)\qquad
\begin{aligned}
&(a-a^3)\frac{ddP_0}{da^2}+[1-(4n+1)a^2]\frac{dP_0}{da}-4n^2aP_0=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^3P_0}{da^3}+[2-(4n+4)a^2]\frac{d^2P_0}{da^2}-(4n^2+8n+2)a\frac{dP_0}{da}-4n^2P_0=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^4P_0}{da^4}+[3-(4n+7)a^2]\frac{d^3P_0}{da^3}-(4n^2+16n+10)a\frac{d^2P_0}{da^2}-(8n^2+8n+2)\frac{dP_0}{da}=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^5P_0}{da^5}+[4-(4n+10)a^2]\frac{d^4P_0}{da^4}-(4n^2+24n+24)a\frac{d^3P_0}{da^3}-(12n^2+24n+12)\frac{d^2P_0}{da^2}=0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

43. Connaissant les deux premiers termes du second ordre $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$, on calculera les suivans par l'équation déjà trouvée

$$
\frac{ddP(\lambda-1)}{da^2}-\frac{ddP(\lambda+1)}{da^2}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-2)\frac{dP(\lambda-1)}{da}+(\lambda+2)\frac{dP(\lambda+1)}{da}-2\lambda P(\lambda)\right]-2\lambda\frac{dP(\lambda)}{da}.
$$

Cette équation étant différenciée successivement, donnera les formules suivantes :

$$
(53)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d^3P(\lambda-1)}{da^3}-\frac{d^3P(\lambda+1)}{da^3}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-3)\frac{d^3P(\lambda-1)}{da^2}+(\lambda+3)\frac{d^2P(\lambda+1)}{da^2}-4\lambda\frac{dP(\lambda)}{da}\right]-2\lambda\frac{ddP(\lambda)}{da^2},\\
&\frac{d^4P(\lambda-1)}{da^4}-\frac{d^4P(\lambda+1)}{da^4}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-4)\frac{d^3P(\lambda-1)}{da^3}+(\lambda+4)\frac{d^3P(\lambda+1)}{da^3}-6\lambda\frac{d^2P(\lambda)}{da^2}\right]-2\lambda\frac{d^3P(\lambda)}{da^3},\\
&\frac{d^5P(\lambda-1)}{da^5}-\frac{d^5P(\lambda+1)}{da^5}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-5)\frac{d^4P(\lambda-1)}{da^4}+(\lambda+5)\frac{d^4P(\lambda+1)}{da^4}-8\lambda\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}\right]-2\lambda\frac{d^4P(\lambda)}{da^4},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Par les équations (50), (51), (52), on connaît pour un ordre quelconque k, les deux premiers coefficiens différentiels $\frac{d^kP_0}{da^k}$, $\frac{d^kP_1}{da^k}$; on pourra donc, par les équations précédentes, continuer indéfiniment le calcul des autres coefficiens différentiels du même ordre k.

Toutes ces formules sont disposées de manière que les quantités a et $1-a^2$ entrent comme diviseurs au moindre degré possible; elles seront sujettes à quelques inconvéniens, lorsque a sera très petit et lorsqu'il sera très près de l'unité; dans le dernier cas, les valeurs du coefficient $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$ deviennent de plus en plus grandes à mesure que k augmente; mais les formules précédentes donneront toujours à peu près le même degré d'exactitude relative sur la valeur des quantités qu'on cherche; c'est-à-dire que le nombre de figures exactes par lesquelles elles sont exprimées, sera toujours à peu près le même.

44. Lorsque a est très petit, on peut éviter tout-à-fait l'emploi des équations précédentes, et déterminer directement les valeurs des quantités $P(\lambda)$ et de leurs coefficiens différentiels de divers ordres, par le moyen de la formule

$$P(\lambda)=\frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+\lambda-1}}{1.2\ldots.\lambda}\left(a^\lambda+\frac{n}{1}.\frac{\lambda+n}{\lambda+1}a^{\lambda+2}+\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}.\frac{\overline{\lambda+n}.\overline{\lambda+n+1}}{\overline{\lambda+1}.\overline{\lambda+2}}a^{\lambda+4}+\text{etc.}\right).$$

En effet, si pour une valeur donnée de λ, on calcule les différens termes de cette suite, que nous désignerons par Ca^λ, $C'a^{\lambda+2}$, etc., en sorte qu'on ait

$$P(\lambda)=Ca^\lambda+C'a^{\lambda+2}+C''a^{\lambda+4}+C'''a^{\lambda+6}\ \text{etc.};$$

les coefficiens différentiels successifs de $P(\lambda)$ se détermineront immédiatement par les formules

$$\begin{aligned}
\frac{dP(\lambda)}{da}&=\lambda Ca^{\lambda-1}+(\lambda+2)C'a^{\lambda+1}+(\lambda+4)C''a^{\lambda+3}+(\lambda+6)C'''a^{\lambda+5}+\text{etc.},\\
\frac{ddP(\lambda)}{da^2}&=\lambda.\overline{\lambda-1}.Ca^{\lambda-2}+\overline{\lambda+2}.\overline{\lambda+1}.C'a^{\lambda}+\overline{\lambda+4}.\overline{\lambda+3}.C''a^{\lambda+2}+\text{etc.}, \qquad (54)\\
\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}&=\lambda.\overline{\lambda-1}.\overline{\lambda-2}.Ca^{\lambda-3}+\overline{\lambda+2}.\overline{\lambda+1}.\lambda C'a^{\lambda-1}+\overline{\lambda+4}.\overline{\lambda+3}.\overline{\lambda+2}.C''a^{\lambda+1}+\text{etc.}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

et on voit que les calculs seront faciles à cause de la convergence des séries, et de l'emploi répété des mêmes coefficiens C, C′, C″, etc.

45. Nous remarquerons que les calculs sont susceptibles de quelque simplification, si, ayant à calculer les coefficiens différentiels de la fonction $P(\lambda)$

qui répond à l'exposant n, on connaît déjà les valeurs de la fonction $Q(\lambda)$ qui répond à l'exposant $n+1$. En effet, d'après la formule (40), on aura successivement

$$\frac{dP_0}{da} = n(2Q_1 - 2aQ_0),$$
$$\frac{dP_1}{da} = n(Q_0 + Q_2 - 2aQ_1),$$
$$\frac{dP_2}{da} = n(Q_1 + Q_3 - 2aQ_2),$$
etc.

Pour avoir une expression semblable des coefficiens différentiels du second ordre, je différencie l'équation (40), et j'en tire

$$\frac{ddP(\lambda)}{da^2} = n.\left[\frac{dQ(\lambda-1)}{da} + \frac{dQ(\lambda+1)}{da} - 2a\,\frac{dQ(\lambda)}{da} - 2Q(\lambda)\right].$$

J'observe ensuite que si on met $n+1$ à la place de n, et Q à la place de P dans les équations (44) et (45), on aura, en ajoutant ces équations,

$$\frac{dQ(\lambda-1)}{da} + \frac{dQ(\lambda+1)}{da} - 2a\,\frac{dQ(\lambda)}{da} = 4(n+1)Q(\lambda) + \frac{\lambda-1}{a}Q(\lambda-1) - \frac{\lambda+1}{a}\,Q(\lambda+1);$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura la formule

$$(55)\quad \frac{ddP(\lambda)}{da^2} = 2n(2n+1)Q(\lambda) + \frac{n}{a}[(\lambda-1)Q(\lambda-1) - (\lambda+1)Q(\lambda+1)].$$

Ainsi on voit qu'au moyen des fonctions $Q(\lambda)$ ou $P(\lambda, n+1)$, on pourra déterminer les coefficiens différentiels du premier ordre $\frac{dP(\lambda)}{da}$ par la formule (40), et les coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2P(\lambda)}{da^2}$ par la formule (55).

46. Dans le cas de $n = \frac{1}{2}$, les deux formules (40) et (55) donnent

$$(56)\quad \begin{aligned} \frac{dP(\lambda)}{da} &= \tfrac{1}{2}[Q(\lambda-1) + Q(\lambda+1)] - aQ(\lambda), \\ \frac{ddP(\lambda)}{da^2} &= 2Q(\lambda) + \frac{(\lambda-1)Q(\lambda-1) - (\lambda+1)Q(\lambda+1)}{2a}. \end{aligned}$$

Voici l'application de ces formules au cas de l'exemple III, dans lequel on a déjà calculé les premières valeurs de $Q(\lambda)$, désignées par $P(\lambda, \frac{3}{2})$.

λ	$\frac{dP(\lambda,\frac{1}{2})}{da}$	$\frac{ddP(\lambda,\frac{1}{2})}{da^2}$	$\frac{d^3P(\lambda,\frac{1}{2})}{da^3}$
0	0.82187 87994	3.86002 33582	28.27722 297
1	1.13623 95937	3.76560 50553	28.68116 475
2	1.03491 89510	4.27932 65397	29.10017 317
3	0.86944 19041	4.55610 29643	30.95666 423
4	0.70380 77947	4.54116 70062	33.19201 233
5	0.55744 04163	4.30219 87340	34.92111 159
6	0.43515 00594	3.92264 82209	
7	0.33616 96444		

La troisième colonne a été calculée par les formules des art. 41, 42 et 43.

47. On voit par le tableau précédent, que a étant peu différent de l'unité, les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP(\lambda)}{da}$, $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, $\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}$, etc., augmentent, d'une manière fort rapide, d'un terme au suivant. Cependant dans le même ordre k, les divers coefficiens $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$ ne peuvent passer un *maximum* après lequel ils décroissent continuellement, et finissent par être aussi petits qu'on voudra.

On pourrait trouver une valeur assez approchée de $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$, lorsque λ est très grand. Pour cela il faudrait faire usage de la formule (16) qui donne

$$(57)\qquad P(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\Gamma(\lambda+1)}\Big[\frac{a^\lambda}{(1-a^2)^n}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}\cdot\frac{a^{\lambda+2}}{(1-a^2)^{n+1}}$$
$$+\frac{n-1.n-2}{1.2}\cdot\frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2}\cdot\frac{a^{\lambda+4}}{(1-a^2)^{n+2}}+\text{etc.}\Big].$$

Soit donc $\frac{d^ka^\mu(1-a^2)^{-\nu}}{da^k}=F(\mu,\nu)$, $F(\mu,\nu)$ désignant une fonction connue de a et des exposans μ et ν ; on aura en général :

$$(58)\qquad \frac{d^kP(\lambda)}{da^k}=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\Gamma(\lambda+1)}\cdot\Big[F(\lambda,n)+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}.F(\lambda+2,n+1)$$
$$+\frac{n-1.n-2}{1.2}\cdot\frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2}.F(\lambda+4,n+2)+\text{etc.}\Big].$$

Lorsque λ est très grand, comme nous le supposons, cette suite est assez convergente dans ses premiers termes, pour qu'on puisse négliger les termes suivans; la question est donc réduite à trouver la fonction F pour un ordre donné k, ce qui n'aura aucune difficulté tant que k sera d'un petit nombre d'unités.

§ V. *Résumé général de la Théorie précédente.*

48. Il ne sera pas inutile de présenter, sous un même point de vue, les principales propriétés de la fonction $P(\lambda, n)$, que nous avons démontrées dans cette section.

I. Cette fonction est purement algébrique lorsque n est un nombre entier positif ou négatif. Dans tout autre cas, les fonctions $P(\lambda, n)$ forment un genre particulier de transcendantes, qui a de l'analogie avec les fonctions elliptiques complètes de la première et de la seconde espèce, et qui se réduit à ces fonctions lorsque $2n$ est un nombre impair.

II. Si on considère les valeurs de $P(\lambda, n)$, qui répondent tant aux différentes valeurs du nombre entier λ, qu'à toutes les valeurs de n qui ne diffèrent entr'elles que d'un nombre entier, toutes ces valeurs peuvent se déterminer par le moyen de deux transcendantes seulement, pour lesquelles on peut choisir deux termes consécutifs, tels que $P(k, n)$, $P(k+1, n)$ ou $P(k, n)$, $P(k, n+1)$.

III. Il en est de même des coefficiens différentiels $\frac{dP(\lambda, n)}{da}$, $\frac{d^2P(\lambda, n)}{da^2}$, $\frac{d^3P(\lambda, n)}{da^3}$, etc. à l'infini, lesquels peuvent, dans les mêmes cas, être déterminés entièrement par les deux mêmes transcendantes. Cette propriété que les fonctions $P(\lambda, n)$ partagent avec les fonctions elliptiques complètes F^1c, E^1c, n'a pas lieu dans un grand nombre de transcendantes, et notamment dans les fonctions $\log \Gamma a$, dont les coefficiens différentiels successifs offrent des transcendantes différentes de la fonction principale.

IV. Les deux mêmes transcendantes qui déterminent les diverses valeurs de la fonction $P(\lambda, n \pm k)$, λ et k étant des entiers quelconques, peuvent aussi servir à déterminer la fonction $P(\lambda, 1 - n \pm k)$, ou simplement $P(\lambda, \pm k - n)$.

Ainsi en général, les deux transcendantes par lesquelles on peut effectuer le développement de D^{-n}, serviront aussi à effectuer le développement d'un terme quelconque des deux suites

$$\ldots\ldots D^{-n+3},\ D^{-n+2},\ D^{-n+1},\ D^{-n},\ D^{-n-1},\ D^{-n-2},\ D^{-n-3},\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots D^{n+2},\ D^{n+1},\ D^{n},\ D^{-1+n},\ D^{-2+n},\ D^{-3+n},\ D^{-4+n}.\ \ldots\ldots$$

V. Quel que soit l'exposant n, pourvu qu'il soit positif, la valeur du coefficient différentiel d'un ordre quelconque $\frac{d^k P(\lambda, n)}{da^k}$ sera toujours positive.

VI. La plus simple des transcendantes désignées par $P(\lambda, n)$, est $P(0, n)$; si on la désigne par $\psi(n)$ ou ψ, sa valeur sera donnée par l'une ou l'autre des deux formules suivantes:

$$(59)\quad \begin{cases} \psi(n)=1+\left(\frac{n}{1}\right)^2 a^2+\left(\frac{n.n+1}{1.2}\right)^2 a^4+\left(\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\right)^2 a^6+\text{etc.}, \\ \psi(n)=(1-a^2)^{1-2n}\left[1+\left(\frac{n-1}{1}\right)^2 a^2+\left(\frac{n-1.n-2}{1.2}\right)^2 a^4+\left(\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\right)^2 a^6+\text{etc.}\right]. \end{cases}$$

VII. Il résulte de la deuxième propriété qu'au moyen des deux fonctions consécutives $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, on pourra en général exprimer exactement la transcendante $P(\lambda, n)$, et plus généralement la transcendante $P(\lambda, \pm n+k)$; k étant un entier quelconque. Il en sera de même des coefficiens différentiels de cette transcendante.

49. Puisque la fonction $P(0, n)$ ou $\psi(n)$ est la plus simple des transcendantes désignées en général par $P(\lambda, n)$, et qu'elle sert à exprimer ces transcendantes, nous examinerons succinctement les propriétés qui lui sont particulières.

On déduit immédiatement des équations (59),

$$(60)\qquad \psi(n)=(1-a^2)^{1-2n}\,\psi(1-n);$$

d'où il suit que les fonctions $\psi(n)$, $\psi(1-n)$, qui se servent en quelque sorte de complément, peuvent être déterminées l'une par l'autre.

En faisant n négatif dans cette équation, ou en mettant $-n$ à la place de n, on a l'équation

$$(61)\qquad \psi(-n)=(1-a^2)^{1+2n}\,\psi(1+n);$$

d'où il suit que toute fonction $\psi(-n)$ dont la variable est négative, peut se changer immédiatement en une autre dont la variable est positive.

On peut réciproquement changer toute fonction $\psi(n)$ dont la variable est positive, en une autre dont la variable soit négative, pourvu qu'on ait $n>1$; cela résulte immédiatement de l'équation (60).

Lorsque n est <1, la réduction ne peut plus avoir lieu, parce qu'alors n et $1-n$ sont tous deux positifs. Ainsi la formule (60) donnerait, par exemple, $\psi(\frac{1}{3})=(1-a^2)^{\frac{1}{3}}\psi(\frac{2}{3})$, $\psi(\frac{1}{4})=(1-a^2)^{\frac{1}{2}}\psi(\frac{3}{4})$, ce qui ne se rapporte qu'aux fonctions complémentaires.

50. Lorsque a sera très près de l'unité, on ne pourra que très difficilement

déterminer, avec un certain degré d'approximation, la fonction ψ par les suites (59); dans ce cas, on ne peut mieux faire que de chercher la valeur de $\psi(n)$ par les quadratures. On a d'abord $\psi(n)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$; mais cette valeur n'est bonne à employer que lorsque n est négatif, parce que D étant très petit pour les premières valeurs de φ, l'ordonnée $\frac{1}{D^n}$ de la courbe à quarrer serait très grande, si n était positif.

Au moyen des quadratures, on trouvera donc très aisément la valeur de $\psi(-m)$, en employant la formule $\psi(-m)=\frac{1}{\pi}\int D^m d\varphi$, et cherchant la valeur de l'aire pour les limites $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Et puisqu'on a $\psi(m+1)=(1-a^2)^{-1-2m}\psi(-m)$, il s'ensuit qu'on aura, par le même moyen, la valeur de la fonction $\psi(n)$ pour toute valeur positive de n, pourvu qu'on ait $n>1$.

Il reste donc à voir ce que l'on doit faire lorsque n est positif et <1.

51. Si on fait $V=\frac{\sin\varphi}{D^{n+1}}$, et qu'on différencie chaque membre par rapport à φ, on aura, après quelques réductions,

$$2a\,dV=(1+n)(1-a^2)^2\frac{d\varphi}{D^{n+2}}-(1+2n)(1+a^2)\frac{d\varphi}{D^{n+1}}+n\frac{d\varphi}{D^n};$$

intégrant de part et d'autre dans les limites fixées, et observant que dans ces limites V s'évanouit, on aura la formule

$$(62)\quad 0=n\psi(n)-(1+2n)(1+a^2)\psi(n+1)+(1+n)(1-a^2)^2\psi(n+2).$$

Cette formule, au reste, serait facile à déduire de celles qui ont été trouvées ci-dessus pour les fonctions $P(\lambda, n)$; mais nous avons préféré de la démontrer directement.

52. Au moyen de la formule précédente, toute fonction $\psi(n)$, dans laquelle n est plus petit que l'unité, pourra s'exprimer par les deux fonctions $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, dans lesquelles la variable est plus grande que l'unité; celles-ci se déterminent facilement par les quadratures, ainsi qu'on l'a fait voir dans l'article précédent: le cas de n positif et <1 se résoudra donc de même par les quadratures.

On aura, par exemple, d'après la formule (62),

$$\psi(\tfrac{1}{3})=5(1+a^2)\psi(\tfrac{4}{3})-4(1-a^2)^2\psi(\tfrac{7}{3});$$

d'un autre côté par la formule (60), on a

$$\psi(\tfrac{4}{3})=(1-a^2)^{-\frac{5}{3}}\psi(-\tfrac{1}{3}),\qquad \psi(\tfrac{7}{3})=(1-a^2)^{-\frac{11}{3}}\psi(-\tfrac{4}{3}).$$

donc

$$(1-a^2)^{\frac{5}{3}}\psi(\tfrac{1}{3} = 5(1+a^2)\psi(-\tfrac{1}{3}) - 4\psi(-\tfrac{4}{3});$$

et par conséquent $\psi(\frac{1}{3})$ se détermine au moyen de la formule

$$(1-a^2)^{\frac{5}{3}}\,\psi(\tfrac{1}{3}) = \frac{5(1+a^2)}{\pi}\int D^{\frac{1}{3}}\,d\varphi - \frac{4}{\pi}\int D^{\frac{4}{3}}\,d\varphi.$$

53. Connaissant les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, etc., au moyen de deux d'entr'elles, on pourra de même déterminer les valeurs de leurs coefficiens différentiels successifs, pris par rapport à a.

En effet, de l'équation $\psi(n) = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$, on déduit $\frac{d\psi(n)}{da} = -\frac{2n}{\pi}\int(a-\cos\varphi)\frac{d\varphi}{D^{n+1}}$. Substituant la valeur $a-\cos\varphi = \frac{D+a^2-1}{2a}$; il viendra $\frac{d\psi(n)}{da} = \frac{n}{a\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n} - \frac{n(1-a^2)}{a\pi}\int\frac{d\varphi}{D^{n+1}}$, ce qui donne la formule

$$a\,\frac{d\psi(n)}{da} = n\psi(n) - n(1-a^2)\,\psi(n+1). \tag{63}$$

Il est visible que par cette formule on pourrait obtenir la valeur du coefficient différentiel $\frac{dd\psi(n)}{da^2}$, exprimée par les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, ou seulement par les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, puisque $\psi(n+2)$ peut être éliminé au moyen de l'équation (62): on aurait de même l'expression des coefficiens différentiels des ordres plus élevés. Mais on peut plus directement parvenir au même but par le moyen des équations (52), où la fonction désignée par P_0 n'est autre chose que $\psi(n)$ ou ψ. En vertu de ces équations on a d'abord

$$(a-a^3)\frac{dd\psi}{da^2} + (1-a^2-4na^2)\frac{d\psi}{da} - 4n^2a\psi = 0; \tag{64}$$

d'où il suit que le coefficient différentiel du second ordre $\frac{dd\psi}{da^2}$, se détermine directement par le moyen de ψ et de $\frac{d\psi}{da}$, et qu'ainsi il peut être exprimé par les deux fonctions $\psi(n)$ et $\psi(n+1)$. On voit ensuite par les mêmes équations, qu'à compter de $\frac{d^3\psi}{da^3}$, un terme quelconque de la suite ψ, $\frac{d\psi}{da}$, $\frac{dd\psi}{da^2}$, $\frac{d^3\psi}{da^3}$, $\frac{d^4\psi}{da^4}$, etc., se déduira des trois précédens, suivant une loi dont il serait facile de donner l'expression générale.

SECTION II.

Des Quadratures.

Après avoir traité d'un grand nombre de transcendantes que l'on peut évaluer avec plus ou moins de facilité par les méthodes qui leur sont propres, nous allons donner les moyens de trouver la valeur aussi approchée qu'on voudra d'une intégrale quelconque $\int y dx$ prise entre deux limites données, ce qui est l'objet du problème général des quadratures.

§ I. *Formules générales pour les Quadratures.*

54. La question étant de trouver la valeur de l'intégrale $Z=\int y dx$ entre deux limites données, nous prendrons pour ces limites $x=0$ et $x=a$; parce qu'on peut toujours fixer l'origine des abscisses au point où commence l'aire cherchée, de manière que Z et x s'évanouissent en même temps.

Pour obtenir plus facilement le degré d'approximation qu'on peut désirer, nous supposerons :

1°. Que dans l'intervalle donné depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, la fonction y reste constamment de même signe, et nous regarderons ce signe comme positif; s'il en était autrement, on chercherait successivement les différentes parties de l'aire situées de différens côtés de la ligne des abscisses, et on retrancherait la somme des aires négatives de la somme des aires positives;

2°. Que la courbure de la courbe, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, n'éprouve aucune variation assez brusque pour que l'un des coefficiens $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., devienne infini. Ainsi dans toute l'étendue de la courbe que nous voulons quarrer, l'ordonnée qui répond à une abscisse $x+\alpha$ très peu différente de x, pourra s'exprimer avec une exactitude suffisante par la suite $y+\alpha\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\alpha^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$, sans qu'il y ait lieu à exception pour aucun point. Cette condition est surtout nécessaire aux deux limites de l'intégrale (*); elle est moins importante dans les points intermédiaires parce que, si elle n'avait pas lieu, on trouverait assez facilement dans chaque cas particulier la correction que cette cause d'anomalie exigerait. (*Exerc. de Calc. intégr.*, tom. I, pag. 314.)

55. Cela posé, divisons en n parties égales la base a de l'aire que nous voulons évaluer, et soit $a = n\omega$; on pourra imaginer que l'aire cherchée Z est composée d'un nombre n de trapèzes curvilignes sur un côté, dont la base commune sera ω, et qui auront pour côtés parallèles deux termes consécutifs de la suite Fo, $F\omega$, $F(2\omega)$, $F(3\omega)\ldots F(n\omega)$, formée en supposant $y = F(x)$.

Le premier trapèze est mesuré approximativement par $\frac{1}{2}\omega(Fo + F\omega)$, le second par $\frac{1}{2}\omega(F\omega + F2\omega)$, ainsi de suite; donc la somme de tous le sera par la suite

$$\omega[\tfrac{1}{2}Fo + F\omega + F2\omega \ldots + F(x-\omega) + \tfrac{1}{2}Fx],$$

où il faudra faire $x = a = n\omega$. Cette suite étant représentée par $n\omega M$ ou aM, M sera la moyenne des n ordonnées $\frac{1}{2}(Fo + Fx)$, $F\omega$, $F(2\omega)\ldots$ $F(x-\omega)$, la première $\frac{1}{2}(Fo + Fx)$ étant elle-même une moyenne entre les deux extrêmes Fo, Fx.

On peut encore évaluer, d'une manière approchée, le premier trapèze par $\omega F(\frac{1}{2}\omega)$, le second par $\omega F(\frac{3}{2}\omega)$, etc., et la somme de tous par la suite

$$\omega[F\tfrac{1}{2}\omega + F\tfrac{3}{2}\omega + F\tfrac{5}{2}\omega \ldots + F(x - \tfrac{1}{2}\omega)].$$

Cette suite étant représentée par $n\omega N$ ou aN, N sera la moyenne des n ordonnées $F\frac{1}{2}\omega$, $F\frac{3}{2}\omega$, $F\frac{5}{2}\omega \ldots F(x - \frac{1}{2}\omega)$.

Ainsi, nous avons deux valeurs approchées de l'aire Z, savoir $Z = aM$ et $Z = aN$. Mais il reste à trouver la correction qu'il faut appliquer à ces valeurs approchées pour en avoir de plus exactes et pour connaître en même temps le degré d'approximation qui correspond à la valeur prise pour n et qui doit augmenter à mesure que n est plus grand ou ω plus petit.

56. Pour cet effet, soit V ou $V(x)$ la somme de la suite

$$F\omega + F2\omega + F3\omega \ldots + F(x-\omega) + F(x);$$

(*) La simple substitution $x = t^m$, ou $a - x = t^m$, suffira, en déterminant convenablement l'exposant m, pour faire remplir cette condition dans l'une des deux limites, au moins pour quelques-uns des premiers coefficiens différentiels.

si on met $x - \omega$ à la place de x et qu'on prenne la différence des deux suites, on aura $F(x) = V(x) - V(x - \omega)$, ou

$$Fx = \omega . \frac{dV}{dx} - \frac{\omega^2}{2} . \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} . \frac{d^3V}{dx^3} - \text{etc.}$$

De là on peut tirer une valeur de ωV qui sera de la forme

$$\omega V = \int F dx + \tfrac{1}{2}\omega F + A'\omega^2 \frac{dF}{dx} + B'\omega^3 \frac{d^2F}{dx^2} + C'\omega^4 \frac{d^3F}{dx^3} + \text{etc.};$$

et comme cette équation est linéaire par rapport aux fonctions F et V, les coefficiens A', B', C', etc. seront les mêmes pour toute valeur de V. Soit donc V ou $V(x) = e^x$, on aura

$$F = e^x - e^{x-\omega} = e^x(1 - e^{-\omega}),\ \int F dx = F,\ \frac{dF}{dx} = F,\ \frac{d^2F}{dx^2} = F, \text{ etc.}$$

Donc

$$\omega = (1 - e^{-\omega})(1 + \tfrac{1}{2}\omega + A'\omega^2 + B'\omega^3 + C'\omega^4 + \text{etc.}),$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\omega . \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}} = 1 + A'\omega^2 + B'\omega^3 + C'\omega^4 + D'\omega^5 + \text{etc.}$$

Le premier membre est une fonction paire de ω, le second membre ne doit donc contenir non plus que des puissances paires de ω. Pour avoir égard à cette propriété, nous prendrons de nouveaux coefficiens A_1, A_2, A_3, etc., tels qu'on ait

$$\omega V = \int F dx + \tfrac{1}{2}\omega F + A_1\omega^2 \frac{dF}{dx} - A_2\omega^4 \frac{d^3F}{dx^3} + A_3\omega^6 \frac{d^5F}{dx^5} - \text{etc.},$$

et ces coefficiens seront déterminés par l'équation

$$\tfrac{1}{2}\omega . \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}} = 1 + A_1\omega^2 - A_2\omega^4 + A_3\omega^6 - \text{etc.},$$

ou, en mettant $z\sqrt{-1}$ à la place de $\frac{1}{2}\omega$,

$$1 - z \cot z = 2^2 A_1 z^2 + 2^4 A_2 z^4 + 2^6 A_3 z^6 + \text{etc.}$$

Or, on sait qu'en faisant $H_m = \frac{1}{\pi^{2m}} . S_{2m}$, S_{2m} étant la somme de la suite $1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{etc.}$, on a la formule

$$1 - z \cot z = 2H_1 z^2 + 2H_2 z^4 + 2H_3 z^6 + \text{etc.}$$

Ainsi les valeurs de A_1, A_2, A_3, etc., se déduisent très simplement de celles des coefficiens H_1, H_2, H_3, etc., et il en résulte la formule générale

(1) $aV = \int F dx + \frac{1}{2}\omega F + \frac{\omega^2}{2} H_1 \frac{dF}{dx} - \frac{\omega^4}{2^3} H_2 \frac{d^3F}{dx^3} + \frac{\omega^6}{2^5} H_3 \frac{d^5F}{dx^5} -$ etc.

Cette formule coïncide avec celle qu'a donnée Euler pour le cas de $\omega = 1$, dans son *Calc. diff.* art. 115; mais la forme précédente paraît préférable en ce que les coefficiens $\frac{\omega^2}{2} H_1$, $\frac{\omega^4}{2^3} H_2$, $\frac{\omega^6}{2^5} H_3$, etc., offrent une suite très convergente, dans laquelle le rapport de chaque terme au précédent tend de plus en plus vers la limite $\frac{\omega^2}{4\pi^2}$ ou $\frac{\omega^2}{40}$ à peu près.

57. Si on suppose maintenant comme ci-dessus, que l'intégrale $z = \int F dx$ est prise à compter de $x = 0$, on aura en même temps la somme $aV = 0$; et si on désigne par Fo, $\frac{dFo}{dx}$, $\frac{d^3Fo}{dx^3}$, etc., les valeurs de F, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^3F}{dx^3}$, etc., lorsque $x = 0$, il faudra ajouter à l'équation (1) une constante qui réduise les deux membres à zéro lorsque $x = 0$. On aura de cette manière la formule

$$\begin{aligned}\omega V = \int F dx &+ \tfrac{1}{2}\omega (Fx - Fo) + \frac{\omega^2}{2} H_1 \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right)\\ &- \frac{\omega^4}{2^3} H_2 \left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right)\\ &+ \frac{\omega^6}{2^5} H_3 \left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) - \text{etc.}\end{aligned}$$

Or la suite désignée par ωV est telle qu'en lui ajoutant le terme $\omega(\frac{1}{2}Fo - \frac{1}{2}Fx)$, la somme est la valeur de aM; on aura donc

$$(2)\qquad \begin{aligned}aM = \int F dx &+ \frac{\omega^2}{2} H_1 \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right)\\ &- \frac{\omega^4}{2^3} H_2 \left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right)\\ &+ \frac{\omega^6}{2^5} H_3 \left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) - \text{etc.}\end{aligned}$$

Pour avoir semblablement la valeur de aN, il faut d'abord mettre $\frac{1}{2}\omega$ au lieu de ω dans la valeur de ωV, ce qui donnera l'équation

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\omega[F\tfrac{1}{2}\omega + F\omega + F\tfrac{3}{2}\omega \ldots + F(x - \tfrac{1}{2}\omega) + Fx]\\ &= \int F dx + \tfrac{1}{4}\omega (Fx - Fo) + \frac{\omega^2}{2^3} H_1 \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right)\\ &\qquad - \frac{\omega^4}{2^7} H_2 \left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right)\\ &\qquad + \frac{\omega^6}{2^{11}} H_3 \left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) - \text{etc.}\end{aligned}$$

Le premier membre $= \frac{1}{2}\omega V + \frac{1}{2} aN$, ainsi en multipliant les deux membres par 2 et retranchant de part et d'autre la valeur de ωV, on aura

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
\omega N = \int F dx &- \frac{\omega^2}{2} H_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right) \\
&+ \frac{\omega^4}{2^3} H_2 \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right) \\
&- \frac{\omega^6}{2^5} H_3 \left(1 - \frac{1}{2^5}\right)\left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

58. Il ne reste plus qu'à substituer les valeurs numériques des coefficiens H_1, H_2, H_3, etc., lesquelles sont

$$
H_1 = \frac{1}{6},\ H_2 = \frac{1}{90},\ H_3 = \frac{1}{945},\ H_4 = \frac{1}{9450},\ H_5 = \frac{1}{93555},\ \text{etc.},
$$

et on aura pour l'intégrale cherchée $\int F dx$, ces deux expressions

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
\int F dx = \omega M &- \frac{\omega^2}{12}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right) + \frac{\omega^4}{720}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right) \\
&- \frac{\omega^6}{30240}\left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) + \text{etc.}, \\
\int F dx = \omega N &+ \frac{\omega^2}{24}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right) - \frac{7\omega^4}{5760}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right) \\
&+ \frac{31\,\omega^6}{157680}\left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right) - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

On voit par ces formules quels sont les termes qu'il faut ajouter aux quantités ωM et ωN pour avoir la vraie valeur de l'intégrale $\int F dx$. Ces termes forment en général une suite infinie qui ne peut se terminer d'elle-même que dans quelques cas particuliers, par exemple, lorsque F sera une fonction entière de x. Mais dans tous les cas on obtiendra tel degré d'approximation qu'on voudra, en prenant ω suffisamment petit, ce qui permettra de réduire à un ou deux termes au plus, la correction qui doit être ajoutée à la valeur calculée de ωM ou de ωN. Au reste, pour diriger convenablement le calcul, il y a différens cas à examiner.

59. 1°. Si la quantité $\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}$ qui dépend des deux limites de l'intégrale, n'est pas nulle, ce qui est le cas le moins favorable, on pourra, d'après la valeur de $\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}$ déterminée dans ces mêmes limites, voir quelle doit être à peu près la valeur de ω pour que le terme $\frac{\omega^4}{720}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right)$ appartienne à l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Cette valeur de ω fera connaître celle du nombre entier $n = \frac{a}{\omega}$ qui règle le

nombre des termes à calculer des suites représentées par aM ou par aN. Ensuite on aura avec le nombre de décimales désiré la valeur de $\int F dx$, soit par l'expression $\int F dx = aM - \frac{\omega^2}{12}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right)$, soit par l'expression... $\int F dx = aN + \frac{\omega^2}{24}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right)$.

2° Si dans l'hypothèse du cas précédent, on veut admettre les deux premiers termes de la correction, il faudra prendre ω et par suite l'entier $n = \frac{a}{\omega}$, de telle sorte que le troisième terme $\frac{\omega^6}{30240}\left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right)$ appartienne à l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Alors on déterminera $\int F dx$ avec ce degré d'approximation par l'une ou l'autre des formules

$$\int F dx = aM - \frac{\omega^2}{12}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right) + \frac{\omega^4}{720}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right), \qquad (5)$$

$$\int F dx = aN + \frac{\omega^2}{24}\left(\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx}\right) - \frac{7\omega^4}{5760}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right).$$

On peut aussi de ces deux formules en déduire une troisième, savoir :

$$\int F dx = \frac{a}{3}(2N + M) - \frac{\omega^4}{2880}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right), \qquad (6)$$

dans laquelle la correction n'est que d'un seul terme; cette formule s'obtiendrait directement en considérant les n trapèzes dont l'aire $\int F dx$ est composée, comme étant terminés chacun par un arc de parabole; mais le calcul de cette formule serait plus long que celui de l'une des formules (5).

3°. Si les deux limites de l'intégrale sont telles qu'on ait $\frac{dF}{dx} - \frac{dFo}{dx} = 0$, alors les formules se simplifient, puisque la partie principale de la correction disparaît, et il devient d'autant plus facile de calculer avec un degré d'approximation déterminé l'intégrale $\int F dx$, au moyen de l'une ou l'autre des formules

$$\int F dx = aM + \frac{\omega^4}{720}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right) - \frac{\omega^6}{30240}\left(\frac{d^5F}{dx^5} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right),$$

$$(7) \qquad \int F dx = aN - \frac{7\omega^4}{5760}\left(\frac{d^3F}{dx^3} - \frac{d^3Fo}{dx^3}\right) + \frac{31\omega^6}{157680}\left(\frac{d^5F}{dx} - \frac{d^5Fo}{dx^5}\right).$$

4°. Il y a enfin un cas qui est susceptible de la solution la plus simple et la plus exacte, mais qui offre une sorte de paradoxe analytique assez difficile à expliquer : nous allons l'examiner avec tout le soin qu'il mérite dans le paragraphe suivant.

§ II. *Examen d'un cas particulier fort remarquable.*

60. Ce cas est celui où les coefficiens différentiels de degré impair $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^3F}{dx^3}$, $\frac{d^5F}{dx^5}$, etc., s'anéantiraient tous dans les deux limites $x=0$, $x=a$. Par exemple, si on avait $F(x)=(1-c^2\sin^2 x)^k$, k étant un exposant quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif, et c étant <1, il est visible que les coefficiens dont il s'agit seraient tous nuls pour les limites $x=0$, $x=\frac{1}{2}\pi$; parce qu'ils sont tous affectés du facteur $\sin x \cos x$ et qu'aucun d'eux ne peut devenir infini. Dans ce cas particulier les formules (4) donnent $\int Fdx = aM$ et $\int Fdx = aN$, d'où l'on devrait conclure que non-seulement les quantités aM et aN sont égales entre elles, mais qu'elles sont l'une et l'autre indépendantes du nombre entier n qui désigne le nombre de termes des séries dont aM et aN représentent les sommes.

Cette conclusion est tout-à-fait inadmissible; car indépendamment des considérations générales qui doivent la faire rejeter, l'application de l'exemple précédent aux deux valeurs particulières $k=\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{2}$, donnerait pour les fonctions complètes E^1c, F^1c, des valeurs de la forme $\frac{\pi}{2}A$, $\frac{\pi}{2}B$, où A et B seraient déterminables algébriquement; résultat entièrement contraire à la nature connue de ces transcendantes.

Il faut donc avouer que le calcul nous induit ici en erreur, et qu'on ne voit guère par quels moyens il pourrait être redressé. Voici cependant une manière d'expliquer cette espèce de paradoxe.

61. Supposons qu'au lieu de chercher l'intégrale $\int Fdx$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, on veuille seulement la déterminer depuis $x=0$ jusqu'à $x=a-\alpha$, α étant une quantité asez petite pour que αFa puisse être négligé par rapport à l'intégrale $\int Fdx$. Alors on pourra regarder l'intégrale dont la limite est $x=a-\alpha$, comme sensiblement égale à l'intégrale dont la limite est $x=a$.

Mais, lorsque la limite est $a-\alpha$ au lieu de a, les coefficiens différentiels $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^3F}{dx^3}$, $\frac{d^5F}{dx^5}$, etc., ne s'anéantissent plus pour cette limite; ils sont d'abord très petits et presque nuls, lorsque la différence est d'un degré peu élevé; ils augmentent ensuite très rapidement selon la nature de la fonction F; car, par exemple, si on excepte le seul cas où l'exposant m est un entier positif, les coefficiens différentiels de la simple puissance x^m forment la suite

$$mx^{m-1},\ m(m-1)\,x^{m-2},\ m(m-1)(m-2)\,x^{m-3},\ \text{etc.},$$

où l'on voit qu'à compter du terme où l'exposant de x devient négatif, les coefficiens suivans augmentent dans un rapport qui surpasse bientôt tout nombre donné.

Cela posé, la valeur de $\int F dx$ étant représentée par la formule

$$\int F dx = (a-\alpha)\,\text{M} - \frac{\omega^2}{2}\,\text{H}_1\,\frac{d\text{F}}{dx} + \frac{\omega^4}{2^3}\,\text{H}_2\,\frac{d^3\text{F}}{dx^3} - \text{etc.},$$

on voit que la série qui sert de correction à la première valeur $(a-\alpha)\text{M}$, sera convergente dans ses premiers termes qui seront d'abord très petits, mais qu'ensuite l'augmentation progressive des coefficiens différentiels agira en sens contraire de la diminution opérée par les facteurs décroissans $\frac{\omega^2}{2}\text{H}_1$, $\frac{\omega^4}{2^3}\text{H}_2$, etc., et qu'enfin il y aura un terme où la série deviendrait divergente.

Avant d'atteindre ce terme, la partie de la série

$$-\frac{\omega^2}{2}\,\text{H}_1\,\frac{d\text{F}}{dx} + \frac{\omega^4}{2^3}\,\text{H}_2\,\frac{d^3\text{F}}{dx^3} - \frac{\omega^6}{2^5}\,\text{H}_3\,\frac{d^5\text{F}}{dx^5} + \text{etc.},$$

qui est convergente, servira à corriger la quantité $(a-\alpha)\text{M}$, et la correction sera de plus en plus petite, à mesure que ω sera plus petit ou n plus grand. On rentre ainsi dans l'effet ordinaire de la formule générale d'approximation, qui est de donner un résultat d'autant plus exact qu'on aura divisé la base a en un plus grand nombre de parties.

62. Le calcul que nous venons d'indiquer dans l'hypothèse que l'on prenne $a-\alpha$ à la place de a, n'est utile que pour l'explication que nous voulions en tirer, et il n'y aura jamais lieu à l'exécuter. Nous en conclurons seulement qu'ayant choisi une valeur de n à volonté, d'après laquelle on calculera les quantités aM et aN, l'intégrale $\int F dx$ prise entre les limites $x=0$, $x=a$, sera donnée avec à peu près le même degré d'approximation par l'une ou par l'autre de ces deux quantités. On ne peut fixer *a priori* ce degré d'approximation, mais on peut assurer qu'il augmentera de plus en plus, à mesure que n sera plus grand. Nous donnerons bientôt un exemple dans lequel on verra qu'en doublant la valeur de n, on double le nombre des décimales ou plutôt le nombre des chiffres significatifs exacts du résultat. C'est ce qu'on peut démontrer en général pour l'intégrale $\int dx(1-c^2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}\pi$, dans la supposition que c est <1.

63. En effet, on peut supposer

$$(1 - c^2 \sin^2 x)^k = A_0 + 2A_1 \cos 2x + 2A_2 \cos 4x + 2A_3 \cos 6x + \text{etc.},$$

les coefficiens A_0, A_1, A_2, etc. étant des fonctions de c et de k qu'il est facile d'exprimer en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de c^2. D'après ce développement, l'intégrale $\int dx\,(1 - c^2 \sin^2 x)^k$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, a pour valeur exacte $A_0 . \frac{1}{2}\pi$. Voyons jusqu'à quel point on approche de cette valeur par la formule suivante où l'on doit faire $\omega = \frac{\pi}{2n}$ et $F(x) = (1 - c^2 \sin^2 x)^k$;

$$\frac{\pi}{2} N = \omega \left[F \tfrac{1}{2}\omega + F \tfrac{3}{2}\omega + F \tfrac{5}{2}\omega \ldots + F \tfrac{2n-1}{2}\omega \right].$$

D'après la formule précédente, on a

$$\begin{aligned}
F \tfrac{1}{2}\omega &= A_0 + 2A_1 \cos \omega + 2A_2 \cos 2\omega + 2A_3 \cos 3\omega + \text{etc.},\\
F \tfrac{3}{2}\omega &= A_0 + 2A_1 \cos 3\omega + 2A_2 \cos 6\omega + 2A_3 \cos 9\omega + \text{etc.},\\
F \tfrac{5}{2}\omega &= A_0 + 2A_1 \cos 5\omega + 2A_2 \cos 10\omega + 2A_3 \cos 15\omega + \text{etc.},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Continuant ces séries jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ qui représente $F\left(\frac{2n-1}{2}\omega\right)$, et faisant la somme de toutes, on aura

$$\frac{\pi}{2} N = \omega \left[A_0 n + 2A_1 \int \cos \omega + 2A_2 \int \cos 2\omega + 2A_3 \int \cos 3\omega + \text{etc.} \right],$$

expression dans laquelle $\int \cos \omega$ représente la somme $\cos \omega + \cos 3\omega + \cos 5\omega$ jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme inclusivement $+ \cos (2n-1)\omega$; de même $\int \cos 2\omega$ représente une somme semblable dans laquelle on met 2ω à la place de ω, et ainsi à l'infini. Maintenant il résulte des formules connues pour la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique (*Introd. in Anal.*, art. 260), qu'on a en général $\int \cos m\omega = \frac{\sin (2nm\omega)}{2 \sin (m\omega)}$. Donc tant que m n'est pas égal à $2n$ ou à un multiple de $2n$, on a $\int \cos m\omega = 0$; mais si on a $m = 2in$, i étant un entier, la fraction $\frac{\sin (2nm\omega)}{2 \sin (m\omega)}$, dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent dans ce cas, aura pour valeur $\frac{2nm \cos (2nm\omega)}{2m \cos (m\omega)}$ ou $\frac{n \cos m\pi}{\cos m\omega} = n \cos i\pi$. Donc, on aura en général

$$(8) \qquad \frac{\pi}{2} N = \frac{\pi}{2} \left[A_0 - 2A_{2n} + 2A_{4n} - 2A_{6n} + \text{etc.} \right],$$

on trouverait, par la même méthode,

$$\frac{\pi}{2}M = \frac{\pi}{2}[A_0 + 2A_{2n} + 2A_{4n} + 2A_{6n} + \text{etc.}]. \qquad (9)$$

64. Ces formules font voir que la correction qu'il faut ajouter à l'intégrale approchée $\frac{\pi}{2}M$ pour avoir l'intégrale exacte $\frac{\pi}{2}A_0$, est

$$-\pi(A_{2n} + A_{4n} + A_{6n} + \text{etc.});$$

et parce que le coefficient A_n comparé aux puissances décroissantes c^2, c^4, c^6, etc., est en général de l'ordre c^{2n}, la correction précédente sera censée de l'ordre c^{4n}.

De même la correction qu'il faut appliquer à l'intégrale approchée $\frac{\pi}{2}N$ pour avoir l'intégrale exacte $\frac{\pi}{2}A_0$, est

$$+\pi(A_{2n} - A_{4n} + A_{6n} - \text{etc.});$$

elle est donc aussi de l'ordre c^{4n}; et on peut considérer ces deux corrections comme sensiblement égales et de signes contraires.

65. Lorsqu'après avoir calculé les quantités M et N pour un nombre de termes n, on les calcule de nouveau pour un nombre de termes $2n$, si on désigne ces dernières valeurs par M' et N', il est aisé de voir qu'on aura $M' = \frac{1}{2}(M + N)$. D'ailleurs il suffit de mettre $2n$ à la place de n, dans l'expression des corrections précédentes pour avoir celles qui doivent être appliquées aux intégrales approchées $\frac{\pi}{2}M'$, $\frac{\pi}{2}N'$. Ainsi la correction qui est de l'ordre c^{4n} pour les résultats $\frac{\pi}{2}M$, $\frac{\pi}{2}N$, sera de l'ordre c^{8n} pour les résultats $\frac{\pi}{2}M'$, $\frac{\pi}{2}N'$; c'est-à-dire que le nombre de chiffres significatifs que les valeurs approchées ont de communs avec la valeur exacte $\frac{\pi}{2}A_0$, devient à peu près double, quand on double le nombre des termes compris dans les séries M et N.

66. Pour donner un exemple de ces formules, nous les appliquerons au calcul des fonctions complètes E^1c, F^1c, en supposant le module $c = 0,6$, ce qui donne $b = 0.8$.

Il faudra d'abord chercher par les méthodes propres aux fonctions elliptiques, les valeurs de ces fonctions, afin de les comparer à celles que donnera le calcul des quantités M et N pour diverses valeurs du nombre des termes

n. Or le module étant $c = 0,6$, on trouvera d'abord l'échelle des modules et le coefficient K exprimés logarithmiquement comme il suit :

c....	9.77815 12503 83604	b....	9.90308 99869 91944
c°...	9.04575 74905 60675	b°....	9.99730 24840 56647
$c^{\circ\circ}$...	7.49214 83170 00258	$b^{\circ\circ}$...	9.99999 79056 317585
$c^{\circ\circ\circ}$..	4.38223 87370 32444	$b^{\circ\circ\circ}$...	9.99999 99999 987375
$c^{\circ\circ\circ\circ}$.	$\bar{8}$.16241 74827 58188	K....	0.04710 52013 47598.

La valeur de K donne $F^1c = \frac{\pi}{2}K$; ainsi la fonction F^1c est égale au quart de la circonférence dont le rayon $K = 1.11456\ 44874\ 839014$.

On déduira de ces mêmes élémens et des formules connues

$$\log E^1c = 0.15170\ 17715\ 26836;$$

ainsi faisant $E^1c = \frac{\pi}{2}I$, c'est-à-dire supposant que la circonférence de l'ellipse est égale à celle du cercle dont le rayon est I, on aura

$$\log I = 9.95558\ 18944\ 96683,$$
$$I = 0.90277\ 99277\ 72195.$$

Ces calculs ont été faits avec les précautions nécessaires pour que les valeurs de I et de K fussent exactes jusqu'à la quatorzième décimale au moins. Voyons maintenant ce qui résultera du calcul des séries M et N, lorsqu'on suppose $k = \frac{1}{2}$, pour avoir la valeur de E^1c, et $k = -\frac{1}{2}$ pour avoir la valeur de F^1c.

67. L'ordonnée appelée précédemment F ou $F(x)$ est $\sqrt{(1 - c^2\sin^2 x)}$ ou $\Delta(x)$ dans le premier cas et $\frac{1}{\Delta(x)}$ dans le second; ainsi nous avons d'abord à calculer les valeurs de Δx qui répondent aux valeurs successives $x = \frac{\pi}{2n}$, $\frac{2\pi}{2n}$, $\frac{3\pi}{2n}$ ... $\frac{(n-1)\pi}{2n}$. Ces ordonnées et la demi-somme des extrêmes $\frac{1}{2}(\Delta 0 + \Delta\frac{1}{2}\pi)$ ou $\frac{1}{2}(1 + b)$, sont les n termes dont la somme divisée par n sera la valeur de M pour l'intégrale $\int \Delta dx = E^1c$; leurs inverses $\frac{1}{\Delta x}$ et la demi-somme des extrêmes $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ sont pareillement les n termes dont la somme divisée par n sera la valeur de M pour l'intégrale $\int \frac{dx}{\Delta} = F^1c$.

Enfin les valeurs $x = \frac{\pi}{4n}$, $\frac{3\pi}{4n}$, $\frac{5\pi}{4n}$ ... $\frac{(2n-1)\pi}{4n}$ serviront à former les valeurs de Δx et $\frac{1}{\Delta x}$, dont la somme divisée par n sera la valeur de N pour les intégrales $\int \Delta dx$ et $\int \frac{dx}{\Delta}$.

Voici un tableau qui contient les valeurs de ces quantités pour le cas de $n = 4$.

x.	Log Δx.	Δx.	$\frac{1}{\Delta x}$.
$\frac{1}{8}\pi$	9.98823 90053 928875	0.97328 27033 362764	1.02745 07053 008714
$\frac{2}{8}\pi$	9.95690 69261 918584	0.90553 85138 137417	1.10431 52607 484655
$\frac{3}{8}\pi$	9.92027 91076 321275	0 83229 84917 602750	1.20149 20246 762057
$\frac{1}{16}\pi$	9.99700 41457 736114	0.99312 55287 485221	1.00692 20567 314798
$\frac{3}{16}\pi$	9.97442 23045 257570	0.94280 59279 754850	1.06066 36745 987892
$\frac{5}{16}\pi$	9.93785 37905 768480	0.86667 00538 118781	1.15384 16443 509227
$\frac{7}{16}\pi$	9.90768 98019 255376	0.80851 82027 313724	1.23683 05334 644976

On peut remarquer que les valeurs logarithmiques de Δ contenues dans ce tableau peuvent se vérifier assez facilement par le théorème de Côtes. En effet, puisqu'on a $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 x)} = \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2}\cos 2x\right)}$, cette quantité peut se mettre sous la forme $B\sqrt{(a^2 + 2a\cos 2x + 1)}$, en faisant $B = \frac{1}{2}(1+b)$ et $a = \frac{1-b}{1+b}$. Si ensuite on donne à $2x$ les valeurs successives $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$, le produit des quatre valeurs de Δ sera $B^4 \sqrt{(1 + a^8)}$; la somme de leurs logarithmes sera donc $4 \log B + \frac{1}{2}\log(1 + a^8)$, ou $4 \log B + \frac{m}{2} a^8 (1 - \frac{1}{2}a^8 + \frac{1}{3}a^{16} - \text{etc.})$. Dans le cas de notre tableau où l'on a $b = 0.8$, $B = 0.9$; la quantité précédente se réduit à 9.81697 00428 017543, ce qui est en effet la somme des quatre logarithmes qui répondent aux valeurs supposées de x.

68. Avant de faire $n = 4$, valeur pour laquelle le tableau est calculé, faisons $n = 2$, valeur trop petite pour donner un résultat suffisamment approché, mais qui fera voir le progrès de l'approximation en passant de cette première valeur à une valeur double. Alors les quantités M et N nécessaires pour calculer les valeurs $\int \Delta dx = \frac{1}{2}\pi M$, $\int \Delta dx = \frac{1}{2}\pi N$, seront composées

de deux termes seulement, savoir :

$$M = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(1+b) + \Delta\tfrac{1}{4}\pi], \quad N = \tfrac{1}{2}(\Delta\tfrac{1}{8}\pi + \Delta\tfrac{3}{8}\pi).$$

Substituant les valeurs numériques données dans le tableau, et la valeur $\frac{1}{2}(1+b) = 0.9$, on aura

$$M = 0.90276\ 92569\ 0687085,$$
$$N = 0.90279\ 05975\ 482757.$$

Ces valeurs ne diffèrent que de 2 unités décimales du 5^{me} ordre, et le milieu entr'elles donne pour I la valeur approchée

$$I = 0.90277\ 99272\ 275733,$$

laquelle n'est en erreur que de 5 unités décimales du 10^{me} ordre. On a peine à concevoir comment le calcul de deux seuls trapèzes, fait de deux manières différentes, peut donner un résultat si exact.

Faisons maintenant $n=4$, et appelons M′ et N′ les nouvelles valeurs de M et N, nous aurons

$$M' = \tfrac{1}{4}\left[\frac{1+b}{2} + \Delta\tfrac{1}{8}\pi + \Delta\tfrac{2}{8}\pi + \Delta\tfrac{3}{8}\pi\right],$$
$$N' = \tfrac{1}{4}[\Delta\tfrac{1}{16}\pi + \Delta\tfrac{3}{16}\pi + \Delta\tfrac{5}{16}\pi + \Delta\tfrac{7}{16}\pi].$$

La première quantité est la même chose que la moyenne $\frac{1}{2}(M+N)$, dont nous venons de donner la valeur, la seconde se trouvera par les quatre dernières lignes du tableau, de sorte qu'on aura

$$M' = 0.90277\ 99272\ 275733,$$
$$N' = 0.90277\ 99283\ 168144.$$

Ces deux valeurs ne diffèrent que d'une unité décimale du 9^{me} ordre, et le milieu entr'elles donne pour I la valeur plus approchée

$$I = 0.90277\ 99277\ 7219385,$$

laquelle s'accorde parfaitement avec celle qu'on a déduite de la théorie des fonctions elliptiques; car la différence de ces valeurs n'étant que d'une unité décimale du 15^{me} ordre, on ne peut prononcer de quel côté est l'erreur.

69. Par des calculs semblables, appliqués à la fonction complète...... $F^1c = \int \frac{dx}{\Delta}$, on trouvera d'abord pour le cas de $n=2$, les formules

$$M = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{b}\right) + \frac{1}{\Delta\frac{1}{4}\pi}\right], \quad N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta\frac{1}{8}\pi} + \frac{1}{\Delta\frac{3}{8}\pi}\right),$$

d'où résulte

$$\mathrm{M} = 1.11465\ 76303\ 7423275,$$
$$\mathrm{N} = 1.11447\ 13649\ 8853855;$$

ensuite pour le cas de $n=4$, on aura

$$\mathrm{M}' = 1.11456\ 44976\ 8138565,$$
$$\mathrm{N}' = 1.11456\ 44772\ 864223 25.$$

Par un milieu pris entre ces deux derniers résultats, on aura la valeur approchée

$$\mathrm{K} = 1.11456\ 44874\ 839040,$$

laquelle s'accorde suffisamment avec celle que donne la théorie des fonctions elliptiques, puisque la différence est à peine de 3 unités décimales du 15^{me} ordre.

Si quelque chose peut étonner dans le résultat de ces calculs, c'est qu'on puisse obtenir une si grande approximation avec une valeur de n aussi petite que $n=4$, c'est-à-dire en divisant l'espace qu'il faut quarrer en quatre trapèzes seulement, et évaluant ces trapèzes de deux manières différentes.

En calculant, comme nous l'avons fait, les valeurs de M et N pour le cas de $n=4$, on trouve que pour l'intégrale $\int \Delta dx$ ces deux valeurs ne diffèrent que d'une unité dans le 9^{me} ordre de décimales, ce qui doit faire présumer que la moyenne entr'elles sera exacte jusqu'à la 17^{me} décimale, chose que nous n'avons pu vérifier, parce que les calculs du tableau ne sont exacts que jusqu'à la 15^{me} décimale au plus. L'approximation est un peu moindre pour l'intégrale $\int \frac{dx}{\Delta}$; car les valeurs de M et N calculées en supposant $n=4$, diffèrent entr'elles de deux unités décimales du 8^{me} ordre, d'où l'on doit conclure que la moyenne ne sera exacte que jusqu'au 15^{me} ordre.

70. Au reste, on peut s'en tenir à ne calculer qu'une seule des quantités M et N, sauf à lui appliquer la correction dont nous avons donné la formule art. 64, en la réduisant à son premier terme. Or, ce premier terme $\pm 2\mathrm{A}_{2n}$ se trouvera toujours avec une exactitude suffisante par la formule de l'art. 17.

Pour cela il faut réduire le binome $1 - c^2 \sin^2 x$ à la forme........ $\mathrm{B}^2(1 + a^2 - 2a \cos 2x)$, ce qui se fera en prenant $\mathrm{B} = \frac{1}{2}(1+b)$, et... $a = -\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$; on aura donc $(1 - c^2\sin^2 x)^k = \left(\frac{1+b}{2}\right)^{2k}(1 + a^2 - 2a\cos 2x)^k$. Développant ensuite les deux membres par les formules des art. 1 et 63, on aura entre les coefficiens d'un même cosinus l'équation générale $\mathrm{A}_\lambda = \left(\frac{1+b}{2}\right)^{2k} \mathrm{P}(\lambda, -k)$. Prenant les logarithmes de chaque membre et mettant au lieu de $\log P(\lambda, -k)$ sa valeur donnée par la formule (17), on aura

$$(10)\quad \begin{aligned}\log A_\lambda = \lambda \log a - (k+1)\log\lambda + k\log b - \log\Gamma(-k)\\ + \frac{(k^2+k)m}{2\lambda - \frac{1}{3}(2k+1)} + \frac{(k^2+k)ma^2}{(1-a^2)\lambda+1}.\end{aligned}$$

Quant au signe du coefficient A_λ, il sera le même que celui de la quantité $a^\lambda\,\Gamma(-k)$.

71. Appliquons cette formule à la détermination de la fonction complète $E'c = \int dx\sqrt{(1-c^2\sin^2 x)}$; cette quantité étant représentée par $\frac{\pi}{2}A_0$, nous avons déjà trouvé pour A_0 la valeur approchée.

$$M = 0.90276\ 92569,$$

laquelle résulte de la supposition $n=2$, et nous avons fait voir (art. 64) que la correction à appliquer à cette valeur est $-2A_{2n}$ ou $-2A_4$. Faisant donc $\lambda=4$, $b=0.8$, $a=-\frac{1}{9}$, $k=\frac{1}{2}$, $\Gamma(-k)=\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$, on trouvera par la formule précédente $\log A_4 = 4.7271088$; et parce que $a^4\,\Gamma(-\frac{1}{2})$ est négatif, il faudra que A_4 soit négatif; on aura donc $A_4 = -0.00000\ 53347$, ce qui donne la valeur corrigée

$$M - 2A_4 = 0.90277\ 99263,$$

valeur qui n'est en erreur que d'une unité décimale du 9^e^ ordre. C'est déjà un assez grand degré d'approximation obtenu en divisant en deux parties égales seulement la base $\frac{1}{2}\pi$ de l'espace qu'il faut quarrer, et mesurant les deux trapèzes curvilignes qui en résultent comme s'ils étaient rectilignes. On conçoit dès lors qu'une approximation beaucoup plus grande résultera de la supposition $n=4$, laquelle donne

$$M = 0.90277\ 99272\ 275733.$$

La correction qu'il faut appliquer à cette valeur étant toujours représentée par $-2A_{2n}$, on la calculera par la formule précédente, en faisant $\lambda=8$, et conservant les autres valeurs de b, a, k et $\Gamma(-k)$. Il en résultera $\log A_8 = 0.4305944$, d'où $A_8 = -0.00000\ 00002\ 723074$, et la valeur corrigée

$$M - 2A_8 = 0.90277\ 99277\ 721881;$$

valeur qui ne diffère de la véritable que d'une demi-unité décimale du quatorzième rang.

72. Si on veut appliquer de semblables corrections aux valeurs de M déjà

trouvées pour la fonction complète $F^1c = \int dx \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 x)}^{-\frac{1}{2}}$, il faudra faire $b = 0.8$, $a = -\frac{1}{9}$, $k = -\frac{1}{2}$, $\Gamma(-k) = \sqrt{\pi}$.

La première valeur de M calculée pour le cas de $n = 2$, est $M = 1.11465\ 76304$; faisant donc $\lambda = 2n = 4$, on aura par la formule précédente $\log A_4 = 5.6680381$; et puisque $a^\lambda \Gamma(-k)$ est positif, A_4 le sera aussi, et on aura $A_4 = 0.00004\ 65627$, ce qui donne la valeur corrigée

$$M - 2\,A_{2n} = 1.11456\ 4505,$$

laquelle n'est en erreur que de 2 unités décimales du 8^e ordre. La seconde valeur trouvée pour M, savoir :

$$M = 1.11456\ 44976\ 8138565,$$

suppose $n = 4$; dans ce cas, la correction $2A_{2n} = 0.00000\ 00101\ 97379$, et la valeur corrigée

$$M - 2A_{2n} = 1.11456\ 44874\ 84006,$$

laquelle n'est en erreur que d'une unité décimale du 13^e ordre.

73. On voit, par ces exemples, que l'effet de la correction est non-seulement de déterminer le nombre de décimales exactes qui se trouvent dans la valeur de M ou dans celle de N, mais encore d'en ajouter cinq ou six de plus, ce qui donnera un résultat aussi exact qu'on voudra, en prenant une valeur convenable de n. Quand on calcule à la fois les deux quantités M et N, le milieu pris entre elles approche plus du vrai résultat que l'une des deux augmentée ou diminuée de la correction, mais cet avantage ne s'obtient que par un calcul plus long.

74. On trouve dans les Œuvres de Jean Bernoulli (*) un théorème pour calculer par approximation le rayon du cercle égal en circonférence à une ellipse donnée. Ce théorème fort remarquable conduit aux mêmes valeurs de M et N que donnent les précédentes formules, en prenant pour n un terme de la progression 2, 4, 8, 16, etc., ce qui permet de déterminer géométriquement toutes les quantités $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 x)}$ dont se composent les valeurs de M et N.

Jean Bernoulli n'a point donné la démonstration de son théorème; il a indiqué seulement la construction géométrique qui en est la base et par laquelle on peut obtenir la valeur très approchée de la circonférence de

(*) Joh. Bernoulli Opera. Tom. 1, pag. 447.

toute courbe ovale, partagée comme l'ellipse, en quatre parties égales et semblables par deux axes rectangulaires. Cette construction s'exécute au moyen d'un mouvement continu que l'auteur appelle *motus reptorius*, et dont il détaille les propriétés.

Nous avions pensé d'abord à donner ici l'analyse du théorème de Jean Bernoulli, considéré dans sa plus grande généralité; mais nous avons bientôt reconnu que cette analyse deviendrait inutile, parce que le résultat auquel elle conduit n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale qui sera démontrée ci-après d'une manière beaucoup plus simple.

§ III. *Moyen d'exprimer toute intégrale proposée par un arc de courbe.*

Pl. III, fig. A. 75. Soit s la longueur de l'arc de courbe AM dont l'origine est fixée au point A et dont l'extrémité M est déterminée par les coordonnées $CP = x$, $PM = y$. Cet arc, dont l'expression ordinaire est $\int dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, peut être exprimé par une autre formule qui jouit de quelques avantages particuliers et que nous allons faire connaître.

Si du point C, centre des coordonnées, on mène CZ perpendiculaire sur la tangente au point M, et qu'on prenne pour nouvelles variables $CZ = p$ et l'angle $TMP = \mu$, on aura l'angle $PCZ = \mu$ et $CZ = p = CM \cos(\mu - MCP)$; développant le second membre et mettant au lieu de CM cos MCP et CM sin MCP leurs valeurs x et y, on aura

$$p = x \cos \mu + y \sin \mu.$$

Différenciant cette équation et observant qu'on a $dx = -ds \sin \mu$ et $dy = ds \cos \mu$, il viendra

$$\frac{dp}{d\mu} = y \cos \mu - x \sin \mu.$$

Au moyen de ces équations, on obtient les valeurs de x et y exprimées en fonctions de p et de μ, savoir :

$$\left.\begin{aligned} x &= p \cos \mu - \frac{dp}{d\mu} \sin \mu, \\ y &= p \sin \mu + \frac{dp}{d\mu} \cos \mu. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Enfin, de celles-ci on tire $dx = -d\mu \sin \mu \left(p + \frac{ddp}{d\mu^2}\right)$, $dy = d\mu \cos \mu \left(p + \frac{ddp}{d\mu^2}\right)$; donc $ds = d\mu \left(p + \frac{ddp}{d\mu^2}\right)$, et en intégrant.

$$s = \int p d\mu + \frac{dp}{d\mu} + \text{const.} \qquad (12)$$

C'est l'expression de l'arc s dans laquelle il faudra substituer la valeur de p en fonction de μ.

76. Cette valeur peut se déduire de l'équation donnée entre les coordonnées x et y, combinée avec l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = -\cot\mu$, dont le premier membre est une fonction connue de x et y. En effet, on peut supposer que ces équations donnent les valeurs de x et y exprimées en fonction de tang μ; ensuite l'équation $p = x\cos\mu + y\sin\mu$ fera connaître la valeur de p en fonction de $\sin\mu$ et $\cos\mu$.

On peut remarquer que si l'équation entre x et y est algébrique, l'équation entre p, $\sin\mu$ et $\cos\mu$, sera pareillement algébrique; mais en général, quelle que soit cette équation, si on prend l'intégrale $\int pd\mu$ de manière qu'elle s'évanouisse au point A, et que $\frac{dpo}{d\mu}$ soit la valeur de $\frac{dp}{d\mu}$ en ce même point, on aura l'arc AM ou $s = \int pd\mu + \frac{dp}{d\mu} - \frac{dpo}{d\mu}$.

77. Cette même formule servira à exprimer toute intégrale proposée par un arc de courbe.

En effet, on peut supposer que cette intégrale est mise sous la forme $\int pd\mu$, dans laquelle μ représente un arc de cercle indéfini dont le rayon $= 1$, et p une fonction de l'arc μ, ou seulement des lignes trigonométriques $\sin\mu$ et $\cos\mu$. On aura donc l'intégrale cherchée

$$\int pd\mu = s - \frac{dp}{d\mu} + \frac{dpo}{d\mu}. \quad (13)$$

Quant à la courbe AMB qui correspond à cette équation, elle est facile à décrire au moyen des équations (11) dont les seconds membres sont des fonctions connues de l'angle μ ou des lignes trigonométriques qui dépendent de cet angle; et si on élimine μ de ces deux équations, on aura, sous la forme ordinaire, l'équation entre les coordonnées x et y de la courbe dont un arc compris entre des limites données servira à exprimer l'intégrale $\int pd\mu$. Il faut maintenant montrer dans quelques exemples l'usage de cette théorie.

78. *Exemple I.* Soit proposée l'intégrale $Z = \int d\mu\,\sqrt{(1 - c^2\sin^2\mu)}$, que nous avons coutume d'exprimer par l'arc d'ellipse $E(c, \mu)$ compté de l'extrémité du petit axe.

Nous aurons dans ce cas, $p = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\mu)}$, valeur qui étant substituée dans les équations (11), donne en faisant $b = \sqrt{(1 - c^2)}$,

$x = \frac{\cos\mu}{p}$, $y = \frac{b^2 \sin\mu}{p}$. Si on élimine μ de ces deux équations, on en déduira $y^2 = b^2(1 - x^2)$, c'est l'équation de l'ellipse rapportée à son grand axe. Ainsi en faisant $CA = 1$, $CB = b$, et décrivant sur ces deux demi-axes l'ellipse AMB, si on désigne par s l'arc AM compté de l'extrémité du grand axe où $\mu = 0$ jusqu'au point M dont les coordonnées sont x et y, cet arc servira à exprimer l'intégrale Z, de sorte qu'on aura Z ou

Pl. I, fig. 1.

$$E(c, \mu) = s - \frac{dp}{d\mu} = s + \frac{c^2 \sin\mu \cos\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\mu)}}. \tag{14}$$

Cette équation n'est autre chose que le théorème de Fagnani que nous avons donné tom. I, art. 36. En effet, si on détermine l'arc BN compté de l'extrémité du petit axe, par les coordonnées $CQ = \sin\mu$, $NQ = b\cos\mu$, en même temps que l'arc AM l'est par les coordonnées $CP = \frac{\cos\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\mu)}}$, $PM = \frac{b^2 \sin\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\mu)}}$, on aura, en vertu de ce théorème,

$$BN = AM + \frac{c^2 \sin\mu \cos\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\mu)}}.$$

Ainsi l'application de notre formule conduit dans ce cas à un théorème connu.

79. *Exemple II.* Cherchons maintenant la courbe qui par ses arcs peut servir à exprimer l'intégrale $Z = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\mu)}}$, intégrale que nous avons coutume de représenter par $F(c, \mu)$.

Il faut faire dans ce cas $p = (1 - c^2 \sin^2\mu)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donnera les valeurs suivantes des coordonnées x et y :

$$x = \frac{\cos\mu}{(1 - c^2 \sin^2\mu)^{\frac{3}{2}}}(b^2 + c^2 \cos 2\mu),$$

$$y = \frac{\sin\mu}{(1 - c^2 \sin^2\mu)^{\frac{3}{2}}}(1 + c^2 \cos 2\mu).$$

Cette courbe qui appartient au sixième degré et dont la forme se rapproche de celle de l'ellipse, tant qu'on a $c^2 < \frac{1}{2}$, est la même que nous avons déterminée d'une autre manière dans la théorie des fonctions elliptiques, chap. VII; elle donne Z ou

$$F(c, \mu) = s - \frac{c^2 \sin\mu \cos\mu}{(1 - c^2 \sin^2\mu)^{\frac{1}{2}}},$$

et la fonction complète $F^1 c = s^1$, s^1 étant le quart de la courbe compris depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{1}{2}\pi$.

Le cas de $c^2 = \frac{1}{2}$ est généralement résolu, comme on sait, par la lemniscate qui n'est que du quatrième degré, et dont les arcs expriment directement la fonction F sans addition d'aucune quantité algébrique. La solution du même cas déduite de la formule précédente donne une courbe du sixième degré dont l'équation est $y = c(2 + x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(1 - x^{\frac{2}{3}})}$, ou $y^2 = 2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}$. Cette courbe est moins simple que la lemniscate, mais elle a l'avantage d'avoir une figure peu différente de celle de l'ellipse.

80. Il est très remarquable que notre nouvelle formule conduise si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé comme fort difficile, et qui paraît n'admettre aucune autre solution; celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction elliptique de première espèce $F(c, \mu)$.

En général on voit que toutes les fois que p sera une fonction algébrique de $\sin \mu$ et $\cos \mu$, la courbe dont les arcs servent à exprimer l'intégrale $\int p d\mu$, sera aussi une courbe algébrique. Ainsi la quadrature d'une courbe algébrique peut toujours se réduire à la rectification d'une autre courbe algébrique, proposition dont l'inverse seulement était connue.

81. *Exemple III.* Soit proposé de trouver la courbe algébrique dont les arcs représentent la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi(n, c, \mu) = \int \frac{d\mu}{(1 + n \sin^2 \mu) \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \mu)}}$.

Il suffira de faire $p = (1 + n \sin^2 \mu)^{-1} (1 - c^2 \sin^2 \mu)^{-\frac{1}{2}}$, et la substitution de cette valeur dans les équations (11) donnera les valeurs suivantes des coordonnées de cette courbe, où l'on a fait $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \mu)} = \Delta$.

$$x = \frac{\cos \mu}{(1 + n \sin^2 \mu)^2 \Delta^3} [1 + (3n - 2c^2) \sin^2 \mu - 4c^2 n \sin^4 \mu],$$
$$y = \frac{\sin \mu}{(1 + n \sin^2 \mu)^2 \Delta^3} [1 + c^2 - 2n + (3n - 1)(1 + c^2) \sin^2 \mu - 4c^2 n \sin^4 \mu].$$

On aura ensuite pour la fonction Π cette expression

$$\Pi(n, c, \mu) = s + \frac{2n \sin \mu \cos \mu}{(1 + n \sin^2 \mu)^2 \Delta} - \frac{c^2 \sin \mu \cos \mu}{(1 + n \sin^2 \mu) \Delta^3};$$

et si s^1 représente le quart de la courbe compris depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on aura la fonction complète $\Pi^1(n, c) = s^1$.

On trouverait de la même manière la courbe algébrique dont les arcs serviraient à exprimer, dans le cas des paramètres imaginaires, la double fonction de troisième espèce.

$$Z = \int \frac{A + B \sin^2 \mu}{a^2 + 2ac \cos \theta \sin^2 \mu + c^2 \sin^4 \mu} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \mu)}}.$$

82. *Exemple IV*. Soit $p = a \sin \mu \operatorname{tang}^2 \mu$, on aura $x = 2a \operatorname{tang}^3 \mu$, $y = 3a \operatorname{tang}^2 \mu$ et $s = \frac{2a}{\cos^3 \mu} - 2a$.

On déduit de ces valeurs l'équation $ax^2 = \frac{4}{27} y^3$; ainsi la courbe dont il s'agit est la seconde parabole cubique.

83. *Exemple V*. Soit $p = a \cos \mu + b \sin \mu - \frac{ab \sin \mu \cos \mu}{\sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2 \mu)}}$, on aura, en supposant $a^2 = b^2 + c^2$,

$$x = a - \frac{ab^3 \sin^3 \mu}{(a^2 - c^2 \sin^2 \mu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = b - \frac{a^3 b \cos^3 \mu}{(a^2 - c^2 \sin^2 \mu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s = \frac{b^3}{c^2} \left[\frac{a^3}{(a^2 - c^2 \sin^2 \mu)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right].$$

D'après les valeurs de x et de y, on trouve que l'équation de la courbe peut être mise sous la forme $\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, et alors on voit que cette courbe est la développée de l'ellipse.

84. En général, si on prend la valeur de p telle qu'on puisse obtenir algébriquement l'intégrale $\int p d\mu$, l'arc s dont cette intégrale dépend, s'exprimera aussi algébriquement. On produira ainsi une classe infinie de courbes rectifiables, comme sont toutes les développées des courbes algébriques.

Soit alors $\int p d\mu = q$, ou $p = \frac{dq}{d\mu}$, on aura pour décrire l'une quelconque de ces courbes, les équations

$$x = \frac{dq}{d\mu} \cos \mu - \frac{ddq}{d\mu^2} \sin \mu,$$

$$y = \frac{dq}{d\mu} \sin \mu + \frac{ddq}{d\mu^2} \cos \mu,$$

et la longueur d'un de ses arcs sera donnée par la formule

$$s = q + \frac{ddq}{d\mu^2} + \text{const.}$$

85. On voit, par ce qui précède, que toute quadrature proposée se ré-

duit à la rectification d'un arc de courbe compris entre deux points donnés, ce qui peut contribuer à simplifier la construction géométrique d'un grand nombre de problèmes; car en général on peut obtenir plus facilement une première valeur approchée d'un arc de courbe dont on a l'équation que celle d'une quadrature. Mais s'il s'agit de calculer avec beaucoup de précision la longueur d'un arc de courbe proposé, il conviendra de revenir aux formules du § I, pour déterminer l'arc s par le moyen de l'intégrale $\int pd\mu$. C'est ce que nous allons développer dans le § suivant.

§ IV. *Formules pour calculer avec précision la longueur de tout arc de courbe proposé.*

86. Soit comme ci-dessus, l'arc $AM = s$, la perpendiculaire CZ abaissée du point fixe C sur la tangente en $M = p$, l'angle TMP que fait la tangente avec l'ordonnée MP, $= \mu$; on pourra regarder p comme une fonction connue de l'angle μ ou des lignes trigonométriques qui déterminent l'angle μ et faire en conséquence $p = F(\mu)$. Cela posé, on aura la longueur cherchée Fig. A.

$$s = \int pd\mu + \frac{dp}{d\mu} - \frac{dpo}{d\mu},$$

l'intégrale $\int pd\mu$ étant prise de manière qu'elle s'évanouisse au point A.

Cette formule se simplifie en supposant que l'axe des abscisses CP, qu'on peut prendre arbitrairement, se confond avec la perpendiculaire à la courbe menée par le point A, car alors on aura dans ce point $\mu = 0$, et $\frac{dpo}{d\mu} = 0$, ce qui donnera $s = \int pd\mu + \frac{dp}{d\mu}$. Fig. B.

Maintenant, pour avoir la longueur totale $AMB = s'$, il faut prendre l'intégrale $\int pd\mu$ depuis le point A où nous supposons $\mu = 0$ jusqu'au point B où nous supposerons $\mu = \theta$. C'est ce qu'on peut faire au moyen des formules du § I; elles donnent d'abord, en prenant le nombre entier n à volonté, les valeurs approchées $\int pd\mu = \theta M$, $\int pd\mu = \theta N$, dans lesquelles M est la moyenne entre les n quantités suivantes :

$$\tfrac{1}{2}(F0 + F\theta), \quad F\frac{\theta}{n}, \quad F\frac{2\theta}{n} \ldots\ldots \; F\frac{n-1}{n}\theta;$$

et N est la moyenne entre les n quantités

$$F\frac{\theta}{2n}, \quad F\frac{3\theta}{2n}, \quad F\frac{5\theta}{2n} \ldots\ldots \; F\frac{2n-1}{2n}\theta.$$

On aura ensuite des valeurs plus exactes de l'intégrale $\int p d\mu$ en appliquant les corrections nécessaires aux quantités θM et θN.

87. Mais il faut avant tout examiner le cas particulier où nous avons déjà fait observer que le calcul n'indique aucune correction, ce qui ne veut pas dire que la correction est nulle, mais que les quantités θM et θN approchent beaucoup de la vraie valeur de l'intégrale $\int p d\mu$; qu'elles en approchent à peu près également l'une en plus, l'autre en moins; que le milieu pris entre ces deux quantités donnera environ deux fois plus de chiffres significatifs exacts que l'une des deux séparément; qu'enfin, après l'essai fait sur des valeurs assez petites de n, qui feront voir combien de décimales exactes on tire, soit des valeurs θM et θN prises séparément, soit de leur moyenne $\frac{1}{2}(\theta M + \theta N)$, on sera à portée de juger quelle est définitivement la valeur qu'on doit donner à n pour obtenir tel degré d'approximation qu'on voudra.

Dans ce même cas, les quantités $\frac{dp}{d\mu}$ et $\frac{dpo}{d\mu}$ sont nulles, de sorte que l'arc entier s' s'exprimera par l'une des deux valeurs $\theta M'$ et θN, ou plus exactement par le milieu pris entre elles.

88. Ces résultats s'appliquent immédiatement à toutes les courbes ovales qui comme l'ellipse ont la propriété d'être partagées en quatre parties égales et semblables par deux axes rectangulaires, qui sont en même temps perpendiculaires à la courbe.

Alors, en faisant $\theta = \frac{1}{2}\pi$, le quart d'une telle courbe sera exprimé par $\frac{\pi}{2}M$ ou $\frac{\pi}{2}N$, en calculant M ou N d'après une valeur de n qui réponde au degré d'approximation qu'on veut obtenir. Ainsi le calcul donne immédiatement par les quantités M ou N, le rayon du cercle égal en circonférence à la courbe proposée.

Il ne s'agit dans chaque cas que de chercher la fonction p ou $F\mu$ qui représente la perpendiculaire menée du centre sur la tangente au point où l'angle que fait cette tangente avec l'axe des ordonnées est μ. Avec cette fonction $F\mu$ on formera les n quantités dont la moyenne désignée par M ou par N sera la valeur du rayon cherché.

Telle est la proposition générale dont nous avons parlé dans l'art. 74; elle comprend comme cas particuliers, non seulement le théorème de Jean Bernoulli sur la circonférence de l'ellipse, mais encore tous les théorèmes semblables qu'on pourrait déduire de la considération du *motus reptorius* de cet auteur, appliquée aux courbes composées de quatre parties égales et comme l'ellipse; théorèmes qui sont limités par ce genre de construction au cas où n est une puissance de 2, mais qui, suivant notre proposition, auraient lieu également pour toute valeur du nombre entier n.

89. Nous observerons encore que la fonction $P(\lambda, k)$, considérée dans la section I, sous le nom de $P(\lambda, n)$, a pour expression générale..... $\frac{2}{\pi}\int \frac{d\mu \cos 2\lambda\mu}{(1 + a^2 - 2a \cos 2\mu)^k}$, cette intégrale étant prise depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{1}{2}\pi$. Or, si d'après la valeur $p = F(\mu) = \frac{\cos 2\lambda\mu}{(1 + a^2 - 2a \cos 2\mu)^k}$, on construit une courbe qui par ses arcs serve à exprimer l'intégrale $\int p d\mu$, cette courbe sera composée, comme l'ellipse, de quatre parties égales et semblables; de sorte qu'on aura entre les limites assignées $\int p d\mu = \frac{\pi}{2} M$ ou $\int p d\mu = \frac{\pi}{2} N$, et par suite $P(\lambda, k) = M$, ou $P(\lambda, k) = N$, ou plus exactement $P(\lambda, k) = \frac{1}{2}(M + N)$.

Ainsi, la fonction $P(\lambda, k)$ dont nous avons développé les propriétés, se rapporte au cas le plus simple des quadratures, et sa détermination ne dépend que des quantités M et N, qu'on peut former immédiatement au moyen de la fonction $p = F(\mu)$ et du nombre entier n pris arbitrairement. Il en serait de même des coefficiens différentiels $\frac{dP}{da}$, $\frac{d^2P}{da^2}$, etc., qu'on déterminera semblablement après avoir mis chacun d'eux sous la forme $\frac{2}{\pi}\int p d\mu$.

90. On peut remarquer enfin que le résultat trouvé pour les courbes ovales composées de quatre secteurs à angle droit, égaux entre eux et placés symétriquement autour des axes communs, s'étend à une infinité d'autres courbes composées d'un même secteur qui se répète un certain nombre de fois dans des positions alternatives. Soit θ l'angle de ce secteur; si θ est commensurable avec l'angle droit, la courbe rentrera sur elle-même après une ou plusieurs révolutions autour du centre commun de tous les secteurs; mais si θ n'est pas commensurable avec l'angle droit, la courbe fera une infinité de révolutions autour de son centre. Dans tous les cas, l'arc de courbe qui termine le secteur dont l'angle est θ, a pour valeur la quantité θM ou θN, c'est-à-dire, qu'il est égal en longueur à l'arc du secteur circulaire dont l'angle est θ et qui a pour rayon la valeur de M ou de N donnée dans l'art 85. En vertu de cette observation, notre théorème se trouve appliqué à un système infini de courbes, dont les ovales, à quatre parties égales, ne sont qu'un cas particulier.

91. Si nous revenons maintenant à la détermination générale de l'arc s' dont les limites s'étendent depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \theta$, nous verrons qu'il suffit d'ajouter le terme $\frac{dp}{d\mu}$ à la valeur de $\int p d\mu$ ou $\int F d\mu$, donnée dans l'art. 59. On aura donc pour cet objet les deux formules suivantes dans lesquelles $\omega = \frac{\theta}{n}$,

$$s' = \theta M + \frac{dF}{d\mu} - \frac{\omega^2}{12} \cdot \frac{dF}{d\mu} + \frac{\omega^4}{720} \left(\frac{d^3F}{d\mu^3} - \frac{d^3Fo}{d\mu^3} \right),$$

$$s' = \theta N + \frac{dF}{d\mu} + \frac{\omega^2}{24} \cdot \frac{dF}{d\mu} - \frac{7\omega^4}{5760} \left(\frac{d^3F}{d\mu^3} - \frac{d^3Fo}{d\mu^3} \right).$$

Fig. B. Ces formules se simplifient beaucoup, si l'on a $\frac{dF}{d\mu} = 0$, c'est-à-dire, si le rayon vecteur CB est perpendiculaire sur la courbe, au point B, comme le rayon vecteur CA l'est au point A. Or, cette condition est toujours facile à remplir, parce qu'on peut prendre pour centre des coordonnées, l'intersection des deux perpendiculaires à l'arc AMB, menées par ses deux extrémités A et B. Alors on aura les valeurs corrigées

$$s' = \theta M + \frac{\omega^4}{720} \left(\frac{d^3F}{d\mu^3} - \frac{d^3Fo}{d\mu^3} \right),$$

$$s' = \theta N - \frac{7\omega^4}{5760} \left(\frac{d^3F}{d\mu^3} - \frac{d^3Fo}{d\mu^3} \right);$$

lesquelles pourront être portées à tel degré d'exactitude qu'on voudra, en prenant ω assez petit ou n assez grand pour que le terme suivant de la correction soit négligeable.

FIN.